24/10/2014

Μάθημα 5

Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου

$\mathbb{P} = (P_{ij})\ i,j \in S$
$\mathbb{P}^{(n)} = (P_{ij}^{(n)}) = \mathbb{P}^n$
$P_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$

Αρχική Κατανομή
$\underline{P}^{(0)} = (P_0^{(0)}\ P_1^{(0)} \dots)$
$P_i^{(0)} = P(X_0 = i)$

Ορισμός Μεταβατική Κατανομή
$\underline{P}^{(n)} = (P_0^{(n)}\ P_1^{(n)} \dots)\ ,\ P_j^{(n)} = P(X_n = j)$
$P_j^{(n)} = P(X_n = j) = \sum_{i \in S} P(X_0 = i)\ P(X_n = j \mid X_0 = i) = \sum_{i \in S} P_i^{(0)} P_{ij}^{(n)}$

$$\boxed{\underline{P}^{(n)} = \underline{P}^{(0)} \cdot \mathbb{P}^n}$$

Άσκηση $\boxed{6.14}$

$\{ X_n, n = 1, 2, \dots \}$

$X_n = \begin{cases} 0 & \text{αν } n^{\text{οστό}} \text{ φανάρι κόκκινο} \\ 1 & \text{αν } n^{\text{οστό}} \text{ φανάρι πράσινο} \end{cases}$ $\qquad S = \{0, 1\}$

$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} \qquad \mathbb{P}^{(2)} = \mathbb{P}^{(2)} = (\quad)$
$\mathbb{P}^{(n)} = ?$

$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ det(A−λI)=0 , λ ιδιοτιμή

$$\mathbb{P} = U^{-1} \Lambda U \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad U = (\underline{u}_1 \ \underline{u}_2)$$

$$\mathbb{P}^n = U^{-1} \Lambda^n U$$

$\underline{u}$ ιδιοδιάνυσμα

λ_i ιδιοτιμή

$\det(P-\lambda I) = (p-\lambda)^2 - (1-p)^2 = p^2 - 2\lambda p + \lambda^2 - (1-2p+p^2) = p^2 - 2\lambda p + \lambda^2 - 1 + 2p - p^2 =$
$= \lambda^2 - 2p\lambda + 2p - 1$ (τα λ_1, λ_2 είναι ρίζες)

Εδώ $\lambda_1 = 2p-1$

$\lambda_2 = 1$, $\underline{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\underline{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Τελικά

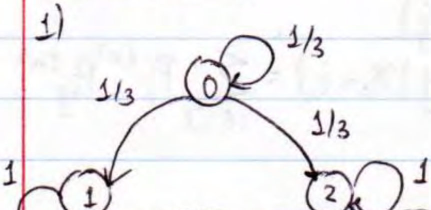
$(A-\lambda I)X = 0$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
λύνουμε το σύστημα για να βρούμε το X που είναι ιδιοδιάνυσμα

$$\mathbb{P}^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\lambda_1^n & 1-\lambda_1^n \\ 1-\lambda_1^n & 1+\lambda_1^n \end{pmatrix}$$

Όταν $p \in (0,1) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

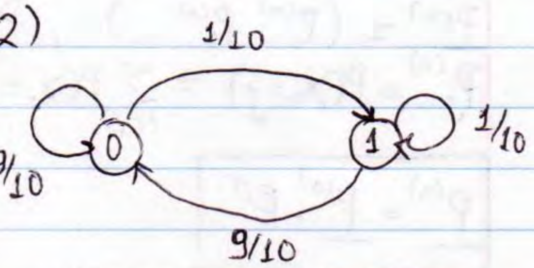
Παράδειγμα:

1)



Το 0 ακολουθεί γεωμετρική κατανομή 1/2 να μείνει 1/2 να φύγει

2)



Μεγαλύτερη πιθανότητα να βρίσκεται στο 0 παρά στο 1 (αλλά στο 1 η πιθανότητα ≠0)

Παρένθεση

1) Ζάρι ανεξάρτητες ρίψεις

N = αριθμός ρίψεων έως την πρώτη φορά 1

$N \sim Geom(1/6)$ $\sum^{\infty} P(N=k) = 1$

$P(N=k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$, $k = 1, 2, \ldots$

2) α-ζάρια → 1ο δίκαιο
→ 2ο δεν είναι 1

Επιλέγω ζάρι στην τύχη, ανεξάρτητες ρίψεις.

T = αριθμός ρίψεων μέχρι την πρώτη φορά "1"

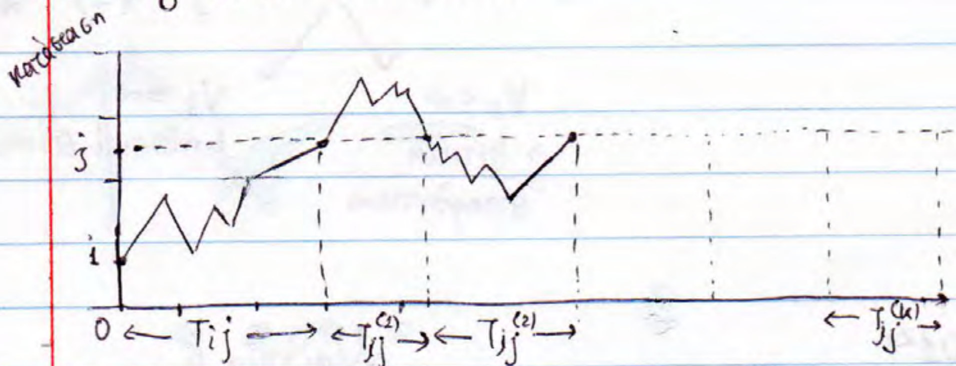
$$P(T=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

$$P(T=k)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\right]+\frac{1}{2}\cdot 0,\ \forall\ k=1,2,\ldots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(T=k)=\frac{1}{2}\sum^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}+\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}\neq 1$$ δεν είναι γνήσια κατανομή

Ασυμπτωτική Συμπεριφορά ΜΑΔΧ
(Μαρκοβιανή Αλυσίδας Διακριτού Χρόνου)

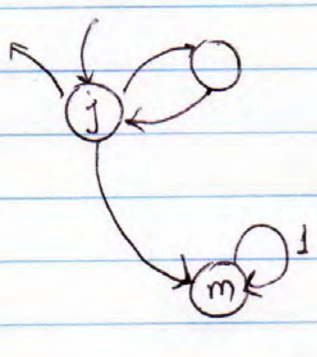
1) Ταξινόμηση Καταστάσεων



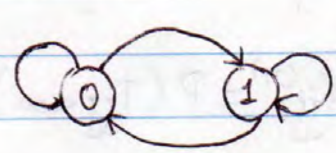
Μαρκοβιανή Ιδιότητα $\Rightarrow$ $T_{ij}, T_{jj}^{(1)}, T_{jj}^{(2)} \ldots$ ανεξάρτητες τ.μ.

$T_{jj}^{(1)}, T_{jj}^{(2)}$ ισόνομα

T_{ij}: χρόνος πρώτης μετάβασης από το i στο j $(i\to j)$
$T_{jj}^{(1)}, T_{jj}^{(2)} \ldots$: χρόνος επανόδου στη j



$p(T_{jj}=\infty)>0$ (j παροδική)



$P(T_{00}=\infty)=0$

$T_{ij}=\min\{n\in\mathbb{N}: X_n=j \mid X_0=i\}$

$f_{ij}^{(n)} = P(T_{ij} = n)$, $n = 1, 2, \dots$

Έστω $i = j$ T_{jj} χρόνος επανόδου

1) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} < 1 \Rightarrow P(T_{jj} < \infty) < 1 \Rightarrow P(\text{μη επανόδου}) > 0$

j παροδική

2) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = 1$ j: επαναληπτική κατάσταση

$\sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} P(T_{jj} = n) = P(T_{jj} < \infty)$

Έστω $V_j = E(T_{jj})$

αν j παροδική $\Rightarrow V_j = \infty$

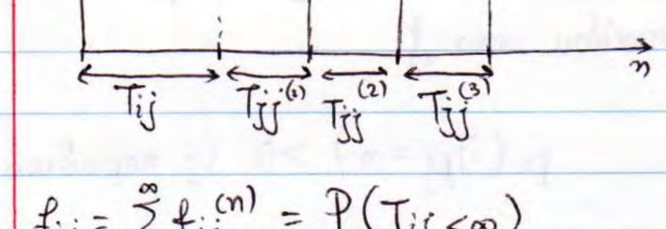
αν j επαναληπτική $\Rightarrow V_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f^{(\cdot)}$

$V_0 < \infty$ η θετικά επαναληπτική

$V_1 = \infty$ μηδενικά επαναληπτική

29/10/2014

Μάθημα 6



T_{ij} = χρόνος πρώτης μετάβασης $i \to j$

$f_{ij}^{(n)} = P(T_{ij} = n)$, $n = 1, 2, \dots$

Όταν $i = j$, $T_{jj}^{(n)}$ = χρόνος επανόδου στην j

$f_{jj}^{(n)} = P(T_{jj} = n)$

$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = P(T_{ij} < \infty)$

$f_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = P(T_{jj} < \infty)$

$V_j = E[T_{jj}]$ αναμενόμενος χρόνος επανόδου

Ορισμός $(V_j = \infty)$

- j παροδική αν $f_{jj} < 1$
- j επαναληπτική αν $f_{jj} = 1$

αν $V_j < \infty$ — **Θετικά επαναληπτική**

αν $V_j = \infty$ — **Μηδενικά επαναληπτική**

Έστω $I_{ij}^{(n)} = 1(X_n = j \mid X_0 = i) = \begin{cases} 1, & \text{αν } X_n = j \\ 0, & \text{αν } X_n \neq j \end{cases}$

Δηλαδή $I_{ij}^{(n)} \sim \text{Bernoulli}(P_{ij}^{(n)})$

όπου $P[I_{ij}^{(n)} = 1] = P[X_n = j \mid X_0 = i] = P_{ij}^{(n)} \Rightarrow E[I_{ij}^{(n)}] = P_{ij}^{(n)}$

Έστω $M_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} I_{ij}^{(k)}$ = αριθμός επισκέψεων στην j στα πρώτα n βήματα

Έστω $m_{ij}(n) = E[M_{ij}(n)] = E\sum_{k=1}^{n} I_{ij}(k) = \sum_{k=1}^{n} E[I_{ij}(k)] = \sum_{k=1}^{n} P_{ij}^{(k)}$ (*)

Καθώς $n \to \infty$

$M_{ij} \xrightarrow{?}$

Ισχύει ότι $M_{ij}(n+1) \geq M_{ij}(n) \geq 0$ $\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} M_{ij}(n) = M_{ij}(\infty)\ (\leq \infty)$ $= \sum_{k=1}^{\infty} I_{ij}(k)$

αύξουσα! όσο περνάνε τα βήματα, ο αριθμός επισκέψεων ή θα μένει σταθερός ή θα αυξάνεται!

το όριο μπορεί να είναι και άπειρο!

Κατανομή της $M_{ij}(\infty)$

- $P[M_{ij}(\infty) = 0] = P[T_{ij} = \infty] = 1 - f_{ij}$
- $P[M_{ij}(\infty) = k] = \underset{\text{1η φορά στο } j}{f_{ij}} \cdot \underset{k-1 \text{ επάνοδος στο } j}{f_{jj}^{k-1}} \underset{\text{ποτέ ξανά στο } j}{(1 - f_{jj})}, \quad k = 1, 2, \ldots$

Περιπτώσεις

(A) j παροδική: $f_{jj} < 1 \Rightarrow 1 - f_{jj} > 0$

$P[M_{ij}(\infty) < \infty] = P[M_{ij}(\infty) = 0] + \sum_{k=1}^{\infty} P[M_{ij}(\infty) = k] =$

$= (j - f_{ij}) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij} f_{jj}^{k-1} (1-f_{jj}) = 1$ ($M_{ij}(\infty) < \infty$ με πιθ. 1)

$\Rightarrow m_{ij}(\infty) = E[M_{ij}(\infty)] = \sum_{k=1}^{\infty} k\, P[M_{ij}(\infty) = k] = \dfrac{f_{ij}}{1-f_{jj}} < \infty$

(B) j <u>επαναληπτική</u>: $f_{jj} = 1$

$\Rightarrow P[M_{ij}(\infty) = k] = \begin{cases} 1 - f_{ij}, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, .. \end{cases}$

$\Rightarrow P[M_{ij}(\infty) < \infty] = \sum_{k=0}^{\infty} P[M_{ij}(\infty) = k] = 1 - f_{ij} < 1$

Άρα $\boxed{P[M_{ij}(\infty) = \infty] = f_{ij}} \Rightarrow \boxed{m_{ij}(\infty) = \infty}$

(A) j παροδική $\Rightarrow M_{ij}(\infty) < \infty$ με πιθανότητα 1

$m_{ij}(\infty) = E[M_{ij}(\infty)] = \dfrac{f_{ij}}{1-f_{jj}} < \infty$

(B) j επαναληπτική $\Rightarrow M_{ij}(\infty) = \begin{cases} 0, & \text{με πιθανότητα } 1 - f_{ij} \\ \infty, & \text{με πιθανότητα } f_{ij} \end{cases}$

$m_{ij}(\infty) = \infty$

<u>Θυμόμαστε (*)</u>: $m_{jj}(n) = E[M_{jj}(n)] = \sum_{k=1}^{n} P_{jj}(k)$

Για $n \to \infty$, $m_{jj}(\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{ij}(k)$

<u>Θεώρημα</u>: j παροδική $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} P_{ij}^{(k)} < \infty$

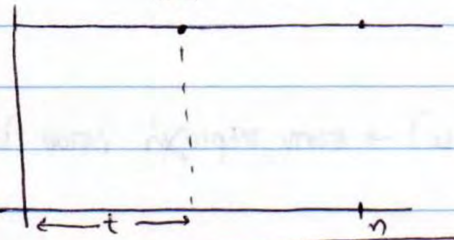
$m_{jj} = \begin{cases} \dfrac{f_{jj}}{1-f_{jj}}, & j \text{ παροδική} \\ \infty, & j \text{ επαναληπτική} \end{cases}$

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \qquad \mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^{n}$$

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in S} P_{ik}^{(t)} P_{kj}^{(n-t)} \quad \forall t<n$$

$$f_{ij}^{(n)} = P[T_{ij}=n]$$

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{t=1}^{n} P[T_{ij}=t] \cdot P_{jj}^{(n-t)}$$



$$P_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

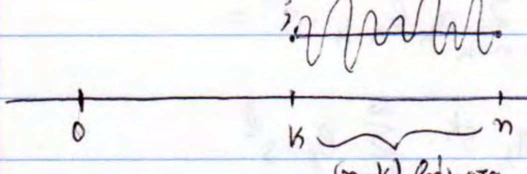
$$\Rightarrow \boxed{P_{ij}^{(n)} = \sum_{t=1}^{n} f_{ij}^{(t)} \, P_{jj}^{(n-t)}}$$

31/10/2014

Μάθημα 7

Υπενθύμιση! $\forall\, i,j \quad P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} \cdot P_{jj}^{(n-k)}$

$\forall\, n \geq 1$



Ειδικότερα $P_{jj}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{jj}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}$ πιθανότητα επανόδου σε k-βήματα

"Παράρτημα": (Πιθανό)-Γεννήτριες

Έστω ακολουθία $\{a_n, n=0,1,2,\dots\}$

Γεννήτρια συνάρτηση $A(S) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n S^n$

Όταν κατανομή πιθανότητας $\{P_n, n=0,1,2,\dots\}$
↪ (ισοδ. X τ.μ. με $P(X=n)=P_n, n=0,1,\dots$)

Πιθανογεννήτρια: $P(s)=\sum_{n=0}^{n} P_n \cdot s^n = E(s^X) = E\left[(e^{\ln s})^X\right] =$

$= E\left(e^{(\ln s)X}\right) = M_X(\ln s)$

1) $|s|<1 \Rightarrow P(s)<\infty$ (συγκλίνει) → στην περιοχή όπου $|S|<1$
2) $P(1)=1$
3) $P'(1)=\sum_{n=1}^{\infty} n\, p_n = E(X)$
4) Η πιθανογεννήτρια όπως και η ροπογεννήτρια χαρακτηρίζει την κατανομή.
Δηλαδή, αν ξέρω την πιθανογεννήτρια, ξέρω και τη κατανομή της.

• Έστω ακολουθίες $\left.\begin{matrix}\{a_n, n=0,1,2,\dots\} \\ \{b_n, n=0,1,2,\dots\}\end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix}A(s) \\ B(s)\end{matrix}$ <u>γεννήτριες</u>

$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$ <u>συνέλιξη</u> των $\{a_n\}, \{b_n\}$

Έστω $\Gamma(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n \cdot s^n \Longrightarrow \Gamma(s)=A(s)B(s)$

$s^n = s^k \cdot s^{n-k}$

$\Gamma(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} s^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} a_k b_{n-k}\cdot s^n =$

$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot s^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} b_{n-k} s^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l \cdot s^l$

$\{P_{ij}^{(n)}, n=0,1,2,\dots\}$ ακολουθία $\quad P_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$

$P_{ij}(s)=\sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} \cdot s^n$ (γεννήτρια)

$\{f_{ij}^{(n)}, n=0,1,2,\dots\}, \ f_{ij}^{(0)}=0$ (κατανομή της T_{ij})
$\overset{\shortparallel}{P[T_{ij}=n]}$
☺

$F_{ij}(s)=\sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)}\, s^{n}$ (πιθανογεννήτρια της T_{ij})

α) Όταν $i\neq j \Rightarrow P_{ij}(s)=F_{ij}(s)\cdot P_{jj}(s)$

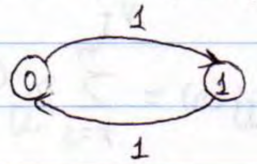
β) Όταν $i=j \Rightarrow P_{jj}(s)=1+F_{jj}(s)\cdot P_{jj}(s)$

$$P_{jj}(s)=\frac{1}{1-F_{jj}(s)}$$

<u>Οριακή Κατανομή ΜΑΔΧ</u> (Μαρκοβιανή Αλυσίδα Διακριτού Χρόνου)

$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$

(*) Αντιπαράδειγμα



$$P=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$P_{01}^{(n)}=\begin{cases}1, & n=2k+1\\ 0, & n=2k\end{cases}$$

$$\{P_{01}^{(n)}\}=\{1,0,1,0,1,0,\dots\}\Rightarrow \lim P_{01}^{(n)}\ \nexists$$

(A) Έστω j παροδική

$m_{ij}(n)=E\left[M_{ij}(n)\right]=\sum_{k=1}^{n} P_{ij}^{(k)}$

j - παροδική $\Rightarrow m_{jj}(\infty)<\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} P_{ij}^{(k)}<\infty \Rightarrow \lim_{k\to\infty} P_{ij}^{(k)}=0$

(B) Έστω j επαναληπτική

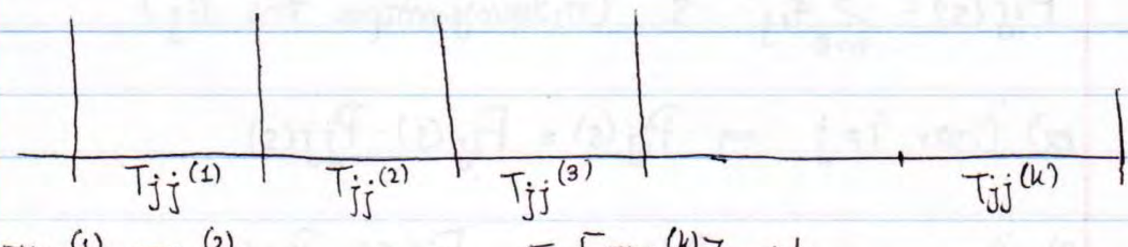
$f_{jj}=\sum_{k=1}^{\infty} f_{jj}^{(k)}=1=P(T_{jj}<\infty)$

$V_j=E\left[T_{jj}\right]$ → $=\infty$ j μηδ. επαναληπτική
→ $<\infty$ j θετικά επαναληπτική

αναμενόμενος χρόνος επανόδου ☺

0. παροδική $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} P_{00}^{(k)}=0$

1 επαναληπτική | $\lim_{k\to\infty}$



$T_{jj}^{(1)}, T_{jj}^{(2)}, \ldots$, ανεξ $E[T_{jj}^{(k)}] = V_j$

$M_{jj}(n) = E$(αρ. επανόδων σε n- βήμα $| x_0 = j$) = ανάν. διαδικ.

• Στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_{ij}(n)}{n} = \mu = \frac{1}{V_j}$$

Γνωρίζουμε: $m_{jj}(n) = \sum_{k=1}^{n} P_{jj}^{(k)} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P_{jj}^{(k)} = \frac{1}{V_j}}$

Όμως τι γίνεται $\lim_{k\to\infty} P_{jj}^{(k)}$ -επαναληπτική-

$$C - \lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} = \frac{1}{V_j} \quad \text{(Cesaro limit)}$$

αν $\exists \lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} = \frac{1}{V_j}$

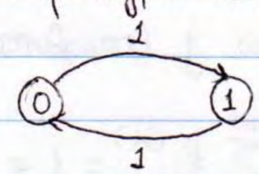
Θεώρημα: Αν $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow$

$\Rightarrow C - \lim_{n\to\infty} a_n = a$. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει

$$P_{00}^{(n)} = \begin{cases} 1, & n = 0, 2, 4, \ldots \\ 0, & n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

$$\{P_{00}^{(n)}\} = \{1, 0, 1, 0, 1, \ldots\}$$

Αντιπαράδειγμα (συνέχεια)



Έστω $\bar{P}_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n} P_{00}^{(k)}$

$\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \ldots\} \to \frac{1}{2}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{m_{00}(n)}{n} = \frac{1}{2}$

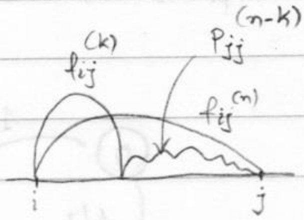
05/11/2014

Μάθημα 8

$\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}$$

① j παροδική $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = 0 \quad \forall i$



② $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \underbrace{f_{ij}}_{\text{πιθανότητα του } i \text{ να πάει στο } j} \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)}}_{\text{πιθανότητα επιστροφής στο } j \text{ σε "άπειρα" βήματα.}}$

Όταν j επαναληπτική

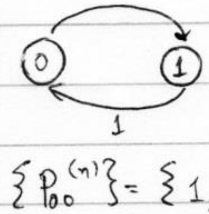
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P_{jj}^{(k)} = \frac{1}{V_j}, \quad V_j = E[T_{jj}] = \sum_{k=1}^{\infty} k\, f_{jj}^{(k)}$$

Γνωρίζουμε $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{m_{jj}^{(n)}}{n} = \dfrac{1}{V_j}$ (ανανεωτικό θεώρημα)

όπου $m_{jj}(n) = E\left[\sum_{k=1}^{n} 1(X_k = j) \mid X_0 = j\right]$

$\Rightarrow \longrightarrow$ αν $\exists \lim\limits_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} \rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} = \dfrac{1}{V_j}$

μπορεί να μην υπάρχει το όριο.



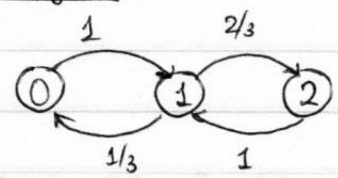
$$P_{00}^{(n)} = \begin{cases} 1, & n=2k \\ 0, & n=2k+1 \end{cases}$$

$\{P_{00}^{(n)}\} = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\}$ (αυτή η ακολουθία δεν έχει όριο γιατί είναι περιοδική)

Κατάσταση j είναι <u>περιοδική</u> (με περίοδο d)

Αν $P_{jj}^{(n)} = 0 \quad \forall n \neq kd, \ k \in \mathbb{N}$ Αν $d=1$, η j <u>απεριοδική</u>

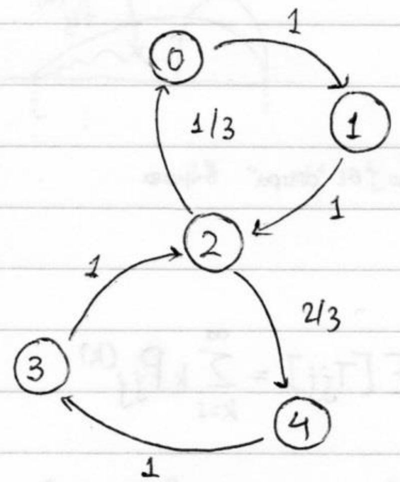
Παράδειγμα:



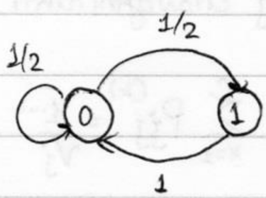
$P_{00}^{(n)}$

n	$>0, =0$
1	0
2	+
3	0
4	+
5	0

(Περιοδική με $\partial = 2$)



$\partial = 3$



$\partial = 1$.

$f_{00}^{(1)} = \frac{1}{2} > 0$

$$\boxed{\begin{aligned} \partial j &= \text{ΜΚΔ}\{n : f_{jj}^{(n)} > 0\} \\ &= \text{ΜΚΔ}\{n : P_{jj}^{(n)} > 0\} \end{aligned}}$$

$\{n : f_{jj}^{(n)} > 0\} = \{1, \dots\}$ $\quad \partial j = 1$

Αν $P_{00}^{(1)} = 0$

$P_{00}^{(2)} > 0$ $\quad \{n : P_{jj}^{(n)} > 0\} = \{2, 3, \dots\} \Rightarrow \partial = 1$

$P_{00}^{(3)} > 0$

$\partial j = \text{ΜΚΔ}\{n : P_{jj}^{(n)} > 0\}$

$\partial j = 1$ απεριοδική

$\partial j > 1$ περιοδική με περίοδο j

Θεώρημα: Έστω j επαναληπτική

Αν j → μηδενικά επαναληπτική $\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} P_{jj}^{(n)} = 0$

→ θετικά επαναληπτική $\Rightarrow$
- $\partial j = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} P_{jj}^{(n)} = \frac{1}{V_j} > 0$
- $\partial j > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} P_{jj}^{(n)} \nexists$ ⊛

$$\circledast \quad \lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n\partial_j)} = \frac{\partial_j}{V_j}$$

Επίσης:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_{jj}(n)}{n} = \begin{cases} 0, & j \text{ περιοδική ή μηδενικά επαναληπτική} \\ \frac{1}{V_j}, & j \text{ θετικά επαναληπτική} \end{cases}$$

Παράδειγμα

① $$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "1"] & 1 \arrow[l, bend left, "1"] \end{tikzcd}$$

θετ. επαναληπτική & περιοδική :)

$\lim_{n\to\infty} P_{00}^{(n)} = ? \Rightarrow \nexists$ (λόγω περιοδικότητας)

Στο πρώτο βήμα $(n=1)$ η $P_{00}^{(1)} = 0$, αφού πηγαίνει με πιθ. 1 στο 1!
Στο δευτ. βήμα $(n=2)$ η $P_{00}^{(2)} = 1$, αφού ήταν στο 1 και γυρνάει με πιθ. 1 στο 0! κοκ!
$n=1 \Rightarrow P_{00}^{(1)} = 0$
$P_{00}^{(2)} = 1$
$P_{00}^{(3)} = 0$
$P_{00}^{(4)} = 0$
δηλ. $P_{00}^{(n)} = 0$, όταν το n πολ/σιο του 2 άρα είναι περιοδική με $\partial = 2$

$j = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_{00}(n)}{n} = \frac{1}{V_0} = \frac{1}{2}$$

$f_{00}^{(k)}, \ k = 1, 2, \dots$

$$f_{00}^{(k)} = \begin{cases} 1, & k = 2 \\ 0, & k \neq 2 \end{cases} \quad \nearrow P[T_{00} = 2] = 1$$

$$f_{00} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{00}^{(k)} = 1 \Rightarrow \text{0 επαναληπτική}$$

$V_j = E[T_{jj}] = 2 < \infty \Rightarrow$ 0 θετικά επαναληπτική

0 περιοδική, $\partial_0 = 2$

$\lim_{n\to\infty} P_{10}^{(n)} = f_{10} \cdot \lim_{n\to\infty} P_{00}^{(n)}$ ($\nexists$ αφού το $\lim_{n\to\infty} P_{00}^{(n)}$ $\nexists$. αλλιώς, θα έπρεπε να υπολογίσουμε και το f_{10} για να βρούμε τελικά το όριο)

$$f_{10} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{10}^{(k)} \qquad f_{10}^{(k)} = P[T_{10} = k]$$

12/11/2014

Μάθημα 9

Επικοινωνία Καταστάσεων

Ορισμοί 1) Η κατάσταση j είναι προσιτή από i $(i \to j)$ αν $\exists\, n$: $P_{ij}^{(n)} > 0$

$\Rightarrow \exists$ μονοπάτι: $i \to i_0 \to i_1 \to \dots \to i_k \to j$ με θετική πιθανότητα

2) Οι i, j επικοινωνούν αν $i \to j$ και $j \to i$

Παρατηρήσεις:

1) $i \leftrightarrow i$ (συμβατικά $P_{ii}^{(0)} = 1$)

2) $i \to j$, $j \to k \Rightarrow i \to k$

3) $i \leftrightarrow i$, $i \leftrightarrow j \Leftrightarrow j \leftrightarrow i$, $j \leftrightarrow k \Rightarrow i \leftrightarrow k$

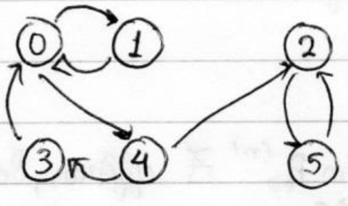
$\leftrightarrow$: σχέση ισοδυναμίας

$S = C_1 \cup C_2 \cup \dots$

$C_\ell \cap C_m = \emptyset \quad \forall\, \ell \neq m$

: $\forall\, i, j \in C_\ell \Rightarrow i \leftrightarrow j$

$\forall\, i \in C_\ell,\ j \in C_m,\ \ell \neq m \Rightarrow i \not\leftrightarrow j$



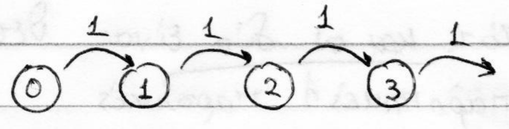
$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$C_1 = \{0, 1, 3, 4, \}$
$C_2 = \{2, 5\}$
κλάσεις επικοινωνίας

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leftrightarrow 1 \\ 0 \leftrightarrow 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \leftrightarrow 3$$

$2 \not\leftrightarrow 4$

Παρ. 2

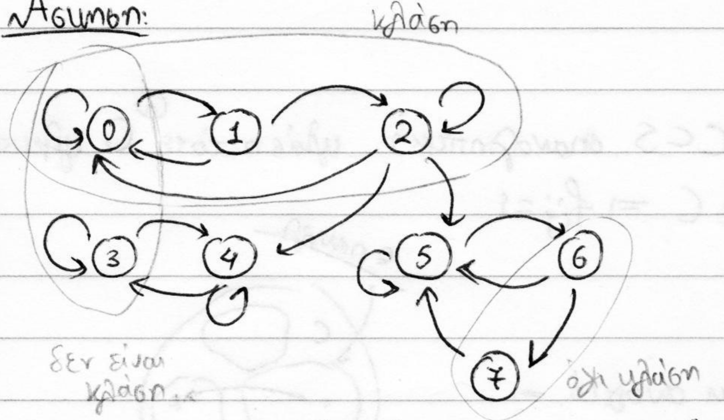


$C_0 = \{0\}$

$C_1 = \{1\}$

$\vdots$

Άσκηση:



$C_1 = \{0,1,2\}$

$C_2 = \{3,4\}$

$C_3 = \{5,6,7\}$

$C_3 =$ κλειστό, $C_2 = \{3,4\} =$ κλειστό $C \cup C$ κλειστό

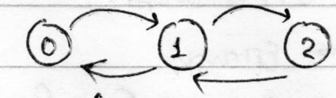
Ορισμοί

α) $C \subset S$ κλειστό σύνολο αν $\forall\, i \in C,\ j \notin C \Rightarrow P_{ij} = 0$

β) $C \subseteq S$ ανοιχτό αν C όχι κλειστό $\Leftrightarrow \exists\, i \in C,\ j \notin C$ $P_{ij} > 0$ $\cancel{\Leftrightarrow}$ $\forall\, i \in C\ \exists\, j \notin C : P_{ij} > 0$

Ορισμός:

Μια ΜΑ αδιαχώριστη αν αποτελείται από μία κλάση επικοινωνίας $\Leftrightarrow$ Όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν



αδιαχώριστη

Αν ΜΑ αδιαχώριστη $\Rightarrow \forall\, C \subset S$, C ανοιχτό

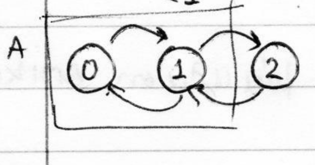
Θεώρημα 1: Αν $i \leftrightarrow j$ τότε και οι δύο είναι θετικά επαναληπτική ή μηδενικά επαναληπτικές ή παροδικές επίσης απεριοδικές ή περιοδικές με την ίδια περίοδο

Πόρισμα
1) Όλες οι καταστάσεις μιας κλάσης επικοινωνίας είναι του ίδιου τύπου
2) Αν μια ΜΑ είναι αδιαχώριστη τότε όλες οι καταστάσεις ίδιου τύπου

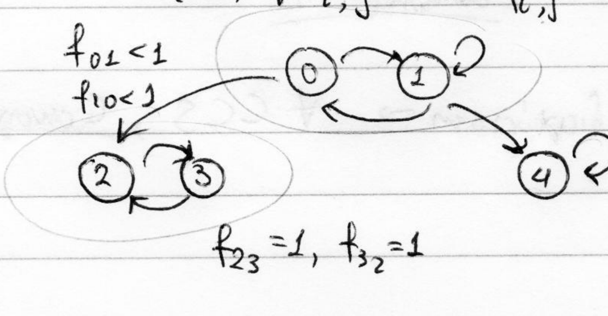
Θεώρημα 2: Αν $C \subset S$ επαναληπτική κλάση τότε C (a) κλειστό σύνολο και $\forall\, i,j \in C \Rightarrow f_{ij} = 1$

(a) Αρκεί να δείξω
Αν A κλάση και ανοιχτό ⇒
A παροδική

Απόδειξη: Έστω $A \subset S$, κλάση, ανοιχτό σύνολο $\Rightarrow \exists\, i \in A, j \notin A$: $P_{ij} > 0 \Rightarrow i \to j$. Όμως τότε $j \not\to i \Rightarrow f_{ji} = 0$ $f \neq j,i$
Τότε $f_{ii} = P_{ij} \cdot \cancel{f_{ji}}^{0} + P_{i \neq j} \cdot P[$ επιστ. $i \mid X_1 \neq j] =$
$= (1 - P_{jj}) \underbrace{P[\ \mid\ ]}_{<1} < 1 \Rightarrow$ i παροδική



A ανοιχτό κ όμως 1, 2 ∈ A επαναλ.
Αν C κλειστή κλάση $\begin{cases} \Rightarrow \text{επαναλ.} \\ \Rightarrow \forall\, i,j \in C \Rightarrow f_{i,j} = 1 \end{cases}$



$C_1 = \{2,3\} \Rightarrow$ επαναλ. (κλειστή)
$C_2 = \{0,1\}$ ανοιχτή $\Rightarrow$ παροδική
$C_3 = \{4\}$
ανοιχτή ⇒ παροδική

Ανοιχτή κλάση $\Rightarrow$ παροδική
Επαναλ. κλάση $\Rightarrow$ κλειστή
Κλειστή κλάση $\Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{γενικά} \\ \text{οτιδήποτε} \end{array} \right\}$ αν $|C| < \infty \Rightarrow$ θετικά επαναληπτική

19/11/2014

<u>Μάθημα 10</u>

Οριακές πιθανότητες $\left(\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}\right)$

C-οριακές πιθανότητες $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P_{ij}^{(k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} m_{ij}^{(n)}$

Επικοινωνία Καταστάσεων

Κλάσεις επικοινωνίας $\rightarrow$ ανοικτές
$\searrow$ κλειστές

Αδιαχώριστη αλυσίδα (1 κλάση)

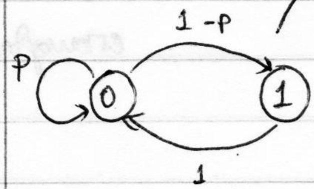
<u>Υπενθύμιση:</u> 1) Στάσιμη στοχαστική ανέλιξη
2) Για Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου $\underline{P}^{(n)} = (P_j^{(n)}, j \in S)$
$\underline{P}^{(n)}$ μεταβατική κατανομή, $P_j^{(n)} = P(X_n = j)$
$\underline{P}^{(n)} = \underline{P}^{(0)} \cdot \mathbb{P}^n$
$\Rightarrow$ Η ΜΑΣΧ είναι στάσιμη αν $\underline{P}^{(n)} =$ σταθερό $\forall n$

Έστω $\underline{\Pi} = (\Pi_j, j \in S)$ διάνυσμα πιθανότητας τέτοιο ώστε $\underline{\Pi} = \underline{\Pi} \cdot \mathbb{P}$
$(\Leftrightarrow \underline{\Pi} \cdot (I - \mathbb{P}) = 0$ για $|S| < \infty)$

διάνυσμα στάσιμης κατανομής

Τότε αν $\underline{P}^{(0)} = \underline{\Pi} \Rightarrow \underline{P}^{(1)} = \underline{P}^{(0)} \mathbb{P}^1 = \underline{\Pi} \cdot \mathbb{P} = \underline{\Pi}$
$\Rightarrow \underline{P}^{(2)} = \underline{\Pi} \Rightarrow \boxed{\underline{P}^{(n)} = \underline{\Pi} \ \forall n}$

Παράδειγμα:



$\Theta E \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \underline{p}^{(n)} = \underline{w}$ (ανεξ. του $\underline{p}^{(0)}$)

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Έστω π.χ. $X_0 = 0$ δηλ. $\underline{p}^{(0)} = (1,0)$

$$\underline{p}^{(1)} = (1,0)\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (p\,,\,1-p) \neq p^{(0)}$$

$$\underline{\pi} = \underline{\pi}\cdot\mathbb{P}$$

$$(\pi_0\ \ \pi_1) = (\pi_0\ \ \pi_1)\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_0 p + \pi_1,\ \pi_1(1-p))$$

$$\left.\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_0 p + \pi_1 \\ \pi_1 &= \pi_0(1-p) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \pi_1 &= \pi_0(1-p) \\ \pi_1 &= \pi_0(1-p) \\ \pi_0 + \pi_1 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (1-\pi_0) = \pi_0(1-p) \\ \pi_0 = \dfrac{1}{2-p} \qquad \pi_1 = \dfrac{1-p}{2-p} \end{array}$$

Αν $p^{(0)} = \left(\dfrac{1}{2p}, \dfrac{1-p}{2}\right) \Rightarrow \dots\ \underline{p}^{(n)} = \left(\dfrac{1}{2-p}, \dfrac{1-p}{2-p}\right)\ \forall n$

Έστω διάνυσμα $\underline{\pi} = (\pi_j, j\in S)$ τέτοιο ώστε

$$\left.\begin{aligned} \underline{\pi} &= \underline{\pi}\cdot\mathbb{P} \\ \sum_{j\in S}\pi_j &= 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \pi_j = \sum_{i\in S} \pi_i P_{ij}\ \ \forall j\in S & \text{εξισώσεις ισορροπίας} \\ \sum_{j\in S}\pi_j = 1 & \text{εξίσωση κανονικοποίησης} \end{array}$$

Αν $\underline{\pi} \geq 0 \Rightarrow$ (π στάσιμη κατανομή της ΜΑΔΧ) $\Rightarrow$ Αν $\underline{p}^{(0)} = \underline{\pi} \Rightarrow \underline{p}^{(n)} = \underline{\pi}\ \forall n$

Εξισώσεις ισορροπίας

$$\pi_j = \sum_{i\in S} \pi_i P_{ij} \quad j\in S$$

$\underline{\pi} = 0$ πάντα λύση

Μας ενδιαφέρουν οι μη αρνητικές/μη μηδενικές λύσεις

Παρατηρήσεις

1) Έστω $\underline{\pi}^{(0)} = \underline{\pi}^{(0)}\mathbb{P}$, $\underline{\pi}^{(0)} \geq 0$, $\underline{\pi}^{(0)} \neq \underline{0}$

$\Rightarrow \exists$ άπειρες λύσεις $\underline{\pi} = \underline{\pi}\cdot\mathbb{P}$, $\underline{\pi} \geq 0$, $\underline{\pi} \neq \underline{0}$

$$\underline{\pi} = \lambda \pi^{(0)}, \lambda > 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\pi} \geq 0 \\ \underline{\pi} \neq 0 \\ \underline{\pi} = \lambda \underline{\pi}^{(0)} = \lambda \cdot \pi^{(0)}\mathbb{P} = \underline{\pi}\cdot\mathbb{P} \end{cases}$$

2) Έστω $\underline{\pi}^{(0)} = \underline{\pi}^{(0)}\mathbb{P}$, $\pi^{(0)} \geq 0$, $\neq \underline{0}$

$\Rightarrow \exists$ λύση του $\begin{aligned} \underline{\pi} &= \underline{\pi}\cdot\mathbb{P} \\ \sum_{j\in S}\pi_j &= 1 \end{aligned}$

Αν $\sum_j \pi_j^{(0)} = 1$ ✓

Αν $\sum_j \pi_j^{(0)} = R > 0$, $R \neq 1$

για $\lambda = 1/R$ $\quad \underline{\pi} = \frac{1}{R}\underline{\pi}^{(0)} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\underline{\pi} = \underline{\pi}\cdot\mathbb{P} \\ &\sum \pi_j = \frac{1}{R}\sum \pi_j^{(0)} = 1 \end{aligned}}$

Ερώτημα: Πότε $\exists$ λύση των εξισώσεων στάσιμης κατανομής;

(A) ΜΑΔΧ αδιαχώριστη

(B) ΜΑΔΧ διαχωρίσιμη.

(A) Θεώρημα: Έστω αδιαχώριστη ΜΑΔΧ

Η αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική αν και μόνο αν έχει μοναδική στάσιμη κατανομή $\underline{\pi}$ τέτοια ώστε $\pi_j > 0$ $\forall j \in S$

Σ'αυτή την περίπτωση $\boxed{\pi_j = \frac{1}{V_j}, j \in S}$

$$\text{Θ.Ε. αδιαχ} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \underline{\pi} = \underline{\pi}\cdot \mathbb{P} \\ \sum \pi_j = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{αυτό το σύστημα} \\ \text{έχει μοναδ. λύση} \end{array}$$

Για Θ.Ε. αδιαχ.

$$\lim P_{ij}^{(n)} = \frac{1}{v_j} \quad \text{(απεριοδική)}$$

$$\lim \frac{1}{n} m_{ij}^{(n)} = \frac{1}{v_j}$$

28/11/2014

Μάθημα 11

Στάσιμη Κατανομή

$\underline{\pi} = (\pi_j)_{j\in S}$ κατανομή πιθ.: στάσιμη κατανομή αν $\underline{\pi} = \underline{\pi}\,\mathbb{P}$,

$\pi_j = \sum_{j\in S} \pi_i P_{ij}, \ \forall j \in S$

$\sum_{j\in S} \pi_j = 1$

Αν $\underline{P}^{(0)} = \underline{\pi} \Rightarrow \underline{P}^{(n)} = \underline{\pi} \quad \forall n \geq 1$

Θεώρημα: Μία Μ.Α. αδιαχώριστη θετικά επαναληπτική $\Leftrightarrow \exists$ μοναδική στάσιμη κατανομή $\underline{\pi}$, με $\pi_j > 0 \ \forall j$

Τότε $\pi_j = \frac{1}{v_j} \ \forall j$

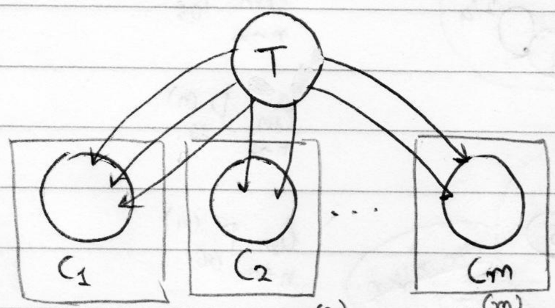
απεριοδική: $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \overset{\pi_j}{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{v_j}}} \ \forall j \in S$ (αδιαχ. θετ. επαν.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_{ij}^{(n)}}{n} = \frac{1}{v_j}$$

Διαχωρίσιμες αλυσίδες ($|S|<\infty$)

Μία διαχωρίσιμη ΜΑΔΧ έχει $C_1, C_2, \dots, C_m$ θετικά επαναληπτικές κλάσεις ($m \geq 1$)

T = σύνολο παροδικών καταστάσεων.



$\underline{\pi}^{(1)}$ μοναδική στας. κατανομή $\quad \underline{\pi}^{(2)} \quad \underline{\pi}^{(m)}$

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \\ T \end{array} \overset{\begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & \cdots & C_m & T \end{array}}{\begin{bmatrix} \mathbb{P}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{P}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{P}_m & 0 \\ & & R & & \end{bmatrix}}$$

$\underline{\pi}^{(1)} = \pi^{(1)} \mathbb{P}_1$

$\underline{\pi}^{(1)} \underline{e} = 1$

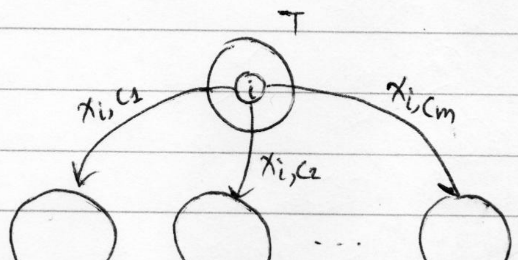
Πιθανότητα απορρόφησης i κατάσταση, k κλάση

Έστω x_{ik}, $i \in T$

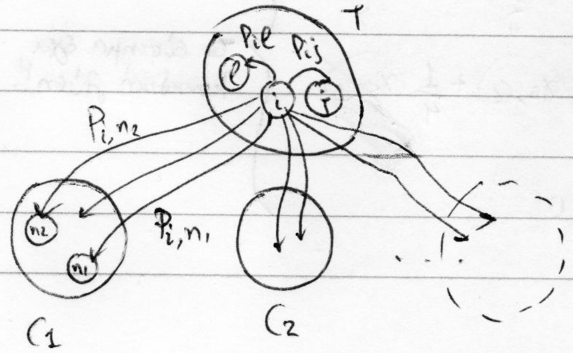
$k = 1, 2, \dots, m$

$x_{ik} = x_{i,C_k} = x_i(C_k) = \lim_{n\to\infty} P(X_n \in C_k \mid X_0 = i)$ πιθ. απορρόφησης στη $C_k \mid X_0 = i$

$\forall k \ \{x_{i,C_k}, i \in T\}$ ικανοποιούν γραμμικό σύστημα



$$\forall i \in T: \sum_{k=1}^{m} x_{i,C_k} = 1$$

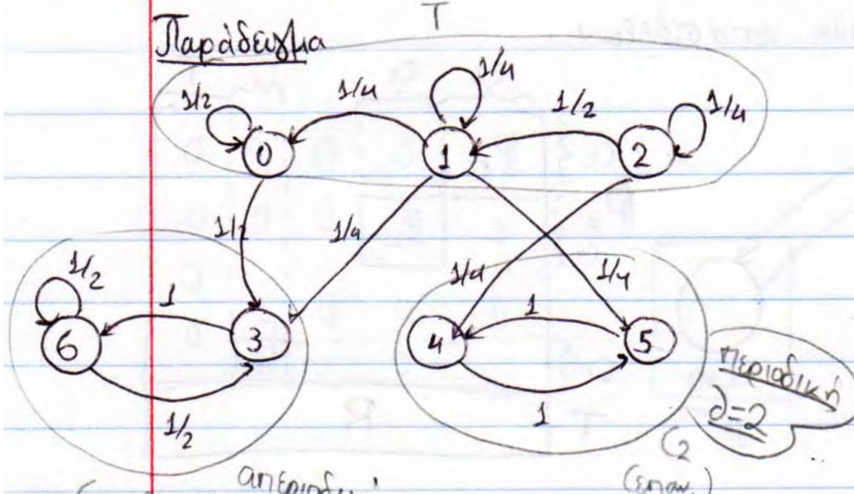


$$x_{i,C_k} = \sum_{j\in S} p_{ij} x_{j,C_k} =$$

$$= \sum_{j\in C_k} p_{ij} \underbrace{x_{j,C_k}}_{=1} + \cancel{\sum_{j\in C_r \neq C_k} p_{ij} x_{j,C_k}}^{\,0} + \sum_{j\in T} p_{ij} x_{j,C_k}$$

$$\boxed{x_{i,C_k} = \sum_{j\in C_k} P_{ij} + \sum_{j\in T} P_{ij}\, x_{j,C_k} \quad i\in T}$$

Παράδειγμα



$\lim_{n\to\infty} P_{05}^{(n)}$

$\lim_{n\to\infty} P_{36}^{(n)}$

$\lim_{n\to\infty} P_{66}^{(n)}$

$\lim_{n\to\infty} P_{25}^{(n)}$

Στάσιμες κατανομές στις C_1, C_2

$$\pi_j = \sum_i \pi_j P_{ij}$$

C_1 $\pi_6 = \pi_6 \cdot \frac{1}{2} + \pi_3 \cdot 1$

πως πας στην κατ. 6? Αν είσαι στην 6 με πιθ. $\frac{1}{2}$ ή αν είσαι στην 3 με πιθ. 1!

$\pi_3 + \pi_6 = 1$

$\pi_3, \pi_6 = \ldots$

C_2 αντίστοιχα. $\left.\begin{array}{l}\pi_4 = \pi_4 \cdot 0 + \pi_5 \cdot 1 \\ \pi_4 + \pi_5 = 1\end{array}\right\}$ $\pi_4 = \pi_5 = \frac{1}{2}$

Πιθανότητες απορρόφησης

στην C_1 $x_{0,C_1}, x_{1,C_1}, x_{2,C_1}$

- $x_{0,C_1} = \frac{1}{2} x_{0,C_1} + \frac{1}{2} \cdot \underset{x_{3,C_1}}{\underset{\parallel}{1}}$
- $x_{1,C_1} = \frac{1}{4} x_{1,C_1} + \frac{1}{4} x_{0,C_1} + \frac{1}{4} \overset{1}{\overset{\parallel}{x_{3,C_1}}} + \frac{1}{4} \cdot \overset{0}{\overset{\parallel}{\cancel{x_{5,C_1}}}}$
- $x_{2,C_1} = \frac{1}{4} x_{2,C_1} + \frac{1}{2} x_{1,C_1} + \frac{1}{4} \cdot \underset{x_{4,C_1}}{\underset{\parallel}{0}}$ (η 4 δεν είναι στην C_1!)

η κατάσταση 5 είναι στην κλάση C_2!

το σύστημα έχει μοναδική λύση!!

$\underline{C_2}$

$x_{i,C_2} = 1 - x_{i,C_2} \quad \forall\, i \in T$

$\lim\limits_{n\to\infty} P_{06}^{(n)} = x_{0,C_1} \cdot \pi_6$

$\lim\limits_{n\to\infty} P_{15}^{(n)} = \cancel{x_{1,C_2} \cdot \pi_5}$ (το όριο δεν υπάρχει, αφού C_2 περιοδική με $d=2$

$\lim\limits_{n\to\infty} P_{43}^{(n)} = 0$ ($3 \in C_1$ και $4 \in C_2$)

05/12/2014

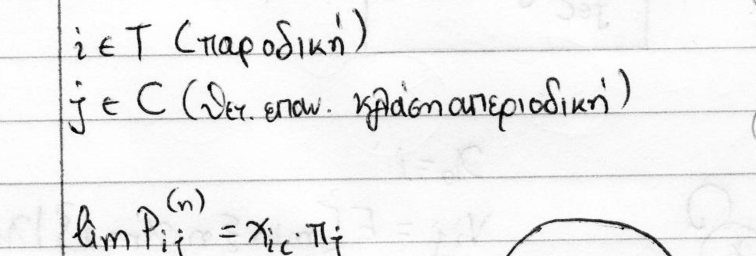
Μάθημα 12

Οριακές Πιθανότητες

Έστω C θετικά επαναληπτική κλάση, απεριοδική | στάσιμη κατανομή στο C, $\{\pi_i, i \in C\}$

$\forall\, i,j \in C \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad \forall\, i$!!

μετά από πάρα πολλά βήματα, θα είναι τόσες πολλές και διαφορετικές οι μεταβάσεις που η κατάσταση στην οποία θα βρεθώ δεν εξαρτάται καθόλου από την αρχική μου κατάσταση i. Αυτό όμως δεν αναιρεί την Μαρκοβιανή ιδιότητα.



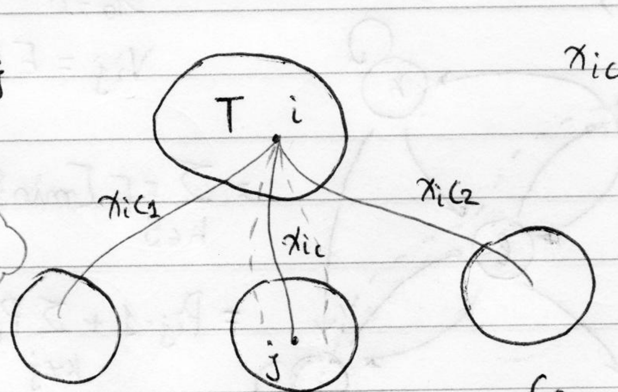
$i \in T$ (παροδική)

$j \in C$ (θετ. επαν. κλάση απεριοδική)

$\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = x_{iC} \cdot \pi_j$

$x_{iC} = \lim\limits_{n\to\infty} P[X_n \in C \mid X_0 = i]$

αν η κλάση είναι περιοδική τότε το όριο αυτό δεν υπάρχει :)



Αναμενόμενοι Χρόνοι Πρώτης Μετάβασης

T_{ij} = χρόνος πρώτης μετάβασης στη $j \mid X_0=i$ $= \min\{n: X_n=j \mid X_0=i\}$

$\forall\, i\neq j \quad T_{ij}\geq 1$

Αν $i=j \quad T_j=T_{jj}\geq 1$ (Αν δηλ. ξεκινάω από το j τότε σκέφτομαι τον χρόνο επανόδου στο j)

$E[T_{ij}]=V_{ij}$ = αναμενόμενος χρόνος πρώτης μετάβασης
(exp. first passage times) ↑

$i=j \quad E[T_j]=V_j$
$\left[\pi_j=\frac{1}{V_j}\right]$

$x_{ic}=\lim\limits_{n\to\infty} P[X_n\in C \mid X_0=i]$

$\lim P_{ij}^{(n)}=\frac{1}{V_j}$ i θ.ε. απεριοδική

π.χ. αν $V_j=5 \Rightarrow \pi_j=\frac{1}{5}=0{,}2$

V_j ↓ $i=j$

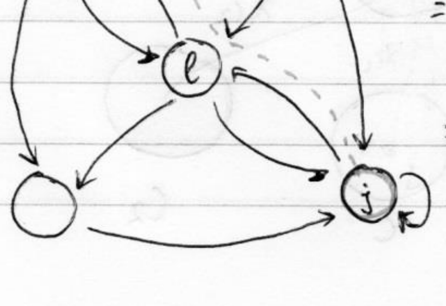
a) j θετ. επαναληπτική $\Rightarrow V_j=\frac{1}{\pi_j}$

β) j μηδ. επαναληπτική ή παροδική $\Rightarrow V_j=\infty$

π_j = στάσιμη πιθανότητα

$$\boxed{\pi_j=\sum_{i\in C}\pi_j\cdot P_{ij} \qquad \sum_{j\in C}\pi_j=1}$$

V_{ij} $(i\neq j)$



$X_0=i$

$$V_{ij}=E[\underbrace{\min\{n: X_n=j\}}_{Y} \mid X_0=i]=$$

$$=\sum_{k\in S} E[\min\{n: X_n=j\} \mid X_0=i,\ X_1=k]\cdot P_{ik}$$

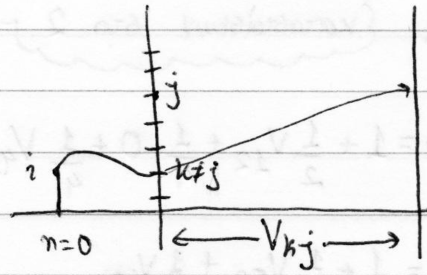
$$=P_{ij}\cdot 1+\sum_{k\neq j}P_{ik}\,(1+V_{kj})=$$

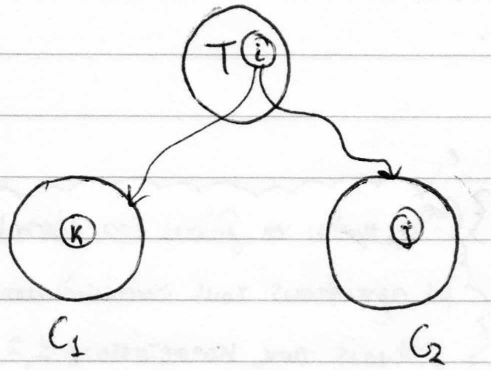
$$= \boxed{P_{ij}\,1 + \sum_{k\neq j} P_{ik}\cdot 1} +$$

$$+ \sum_{k\neq j} P_{ik} V_{kj}$$

$$\boxed{V_{ij} = 1 + \sum_{k\neq j} P_{ik} V_{kj}\ ,\ i\in S}$$

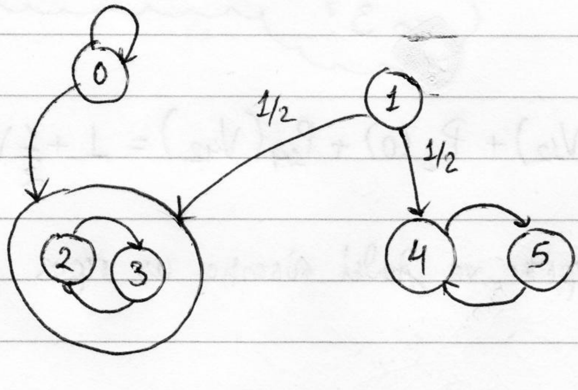
$$E[\min\{n : X_n = j \mid X_0 = i\ ,\ X_1 = k] = \begin{cases} 1 & ,\ k=j \\ 1+V_{kj} & ,\ k\neq j \end{cases}$$





$$V_{ij} = 1 + \sum_{k\neq j} P_{ik} V_{kj}$$

$V_{ij} = \infty\ ,\ i\in C$, $j\in C_2$ | $V_{ij} = ?$ $i\in T$, $j\in C_2$



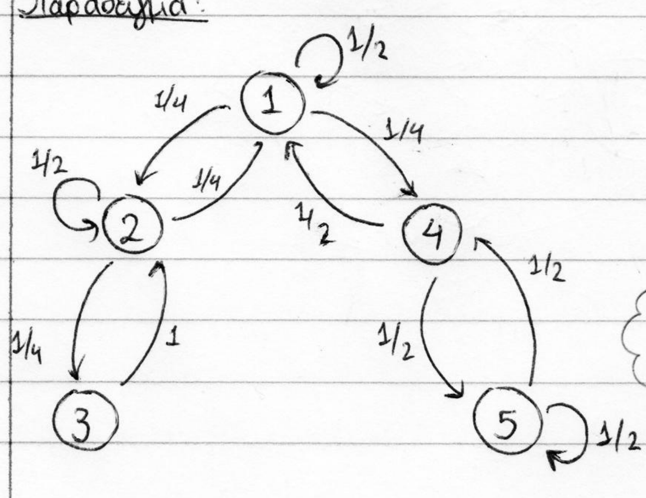
$V_{04} = \infty$

$V_{02} < \infty$

$V_{12} = \infty$

$V_{14} = \infty$

Παράδειγμα:



(αδιαχώριστη + πεπερασμένη)

↓

θετικά επαναληπτική απεριοδική αλυσίδα

$P_{11} > 0 \Rightarrow 1$: απεριοδική

η περιοδικότητα ή η απεριοδικότητα είναι ιδιότητα κλάσης. Αφού λοιπόν η 1 είναι απεριοδική, όλες οι άλλες καταστάσεις είναι απεριοδικές αφού ανήκουν στην ίδια κλάση. (αδιαχώριστη αλυσίδα)

$V_{12} = ?$

Για να βρώ το χρόνο από το $1 \to 2$ πρέπει να βρω τους χρόνους όλων των V_{i2} καταστάσεων στο 2

$$\left.\begin{aligned} V_{12} &= 1 + \tfrac{1}{2} V_{12} + \tfrac{1}{4}\cdot 0 + \tfrac{1}{4} V_{42} \\ V_{42} &= 1 + \tfrac{1}{2} V_{52} + \tfrac{1}{2} V_{12} \\ V_{52} &= 1 + \tfrac{1}{2} V_{52} + \tfrac{1}{2} V_{42} \end{aligned}\right\} 3\times 3$$

$V_{32} = 1 + 1\cdot 0$

$V_2 = \frac{1}{\pi_2}$ $\quad \boxed{V_{53}}\ \{V_{i3}, i \in S\}$

Θα πρέπει να λύσω ένα σύστημα με αγνώστους τους αναμενόμενους χρόνους των καταστάσεων 1,2,4,5 στο 3!

$V_{12} = E[T_{12}] = 1 + P_{11}(V_{12}) + P_{12}(0) + P_{14}(V_{42}) = 1 + \frac{1}{2} V_{22} + \frac{1}{4} V_{42}$

Για να υπολογίσω το V_{ij} πρέπει να λυθεί σύστημα ως προς $\{V_{kj}, k \in S, k \neq j\}$

10/12/2014

Μάθημα 13

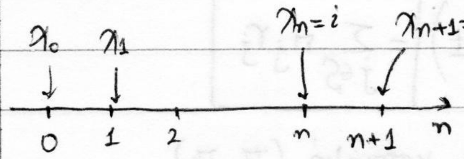
Μαρκοβιανές Αλυσίδες με Αμοιβές

$\{X_n, n = 0,1,\dots\}$ ΜΑΔΧ | R_n = αμοιβή στην περίοδο n

$\mathbb{P} = (P_{ij})_{i,j \in S}$

Παράδειγμα

(αυτοκίνητο, μηχάνημα) X_n = κατάσταση λειτουργίας στην αρχή περιόδου n



$R_n(i,j)$

π.χ. $\boxed{R_n \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2)}$

δηλ. μπορεί να ακολουθεί μία κανονική κατανομή με μέση τιμή μ_{ij} και διασπορά σ^2

π.χ. $\boxed{\sigma^2 = 0 \Rightarrow R_n = R_n(i,j)}$

1) Το R_n τ.μ. με κατανομή που εξαρτάται από X_n, X_{n+1}

2) $R_n = r_{ij}$

3) $R_n = r_i$

Εδώ εξαρτώμαι από όλο το παρελθόν, άρα η Μαρκοβιανή ιδιότητα χάνεται. Δεν θα μελετηθούν

Γενικό μοντέλο αμοιβής

R_n = τ.μ. με κατανομή που εξαρτάται από $\underline{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}}$ ☺

Έστω ότι η ΜΑΔΧ $\{X_n, n=1,2,\ldots\}$ είναι θ.ε. με οριακή κατανομή π

δηλ. $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j \ \forall i$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_{ij}^{(n)}}{n} = \pi_j \ \forall i$$

$$? \ \exists \ \lim_{n\to\infty} \frac{E(R_1+R_2+\ldots+R_n)}{n} = ?$$

$E[R_n | X_n = i] = ?$

(3) $E[R_n | X_n = i] = r_i$

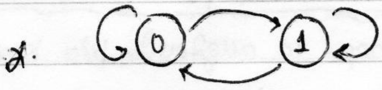
(2) $E[R_n | X_n = i] = \sum_j E[R_n | X_n = i, X_{n+1} = j]\, P[X_{n+1} = j | X_n = i] =$

$= \sum_j r_{ij} P_{ij} \equiv r_i$

(1) $E[R_n | X_n = 1] = \sum_j P_{ij} \, E[R_n | X_n = i, X_{n+1} = j] \overset{\text{αν}}{=} r_{ij}$

Γενικά ορίζουμε
$\boxed{r_i = E[R_n | X_n = i],\ i \in S}$

$$\bar{R} = \lim_{n\to\infty} E\frac{\left(\sum_{t=0}^{n-1} R_t\right)}{n} = \lim_{n\to\infty} E\left(\frac{\sum R_t}{n}\right) = \boxed{\sum_{j\in S} \pi_j r_j}$$

π.χ.  οριακή κατανομή (π_0, π_1)

$$\bar{R}_n = \frac{E\left(\sum_{t=0}^{n-1} R_t\right)}{n} = \frac{E(R_0)+E(R_1)+E(R_2)+\dots+E(R_{n-1})}{n} = \frac{r_0 m_0(n) + r_1 m_1(n)}{n} =$$

$$= r_0 \underbrace{\frac{m_0(n)}{n}}_{\pi_0} + r_1 \underbrace{\frac{m_1(n)}{n}}_{\pi_1} \qquad E(R_t) = \begin{cases} r_0 & \text{αν } X_t = 0 \\ r_1 & \text{αν } X_t = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim \bar{R}_n = \pi_0 r_0 + \pi_1 r_1$$

$(X_0, X_1, \dots, X_n) = (00101000)$ $n = 0, \dots, 7$

Άσκηση: Δωμάτιο

Διακριτός χρόνος $n = 1, 2, 3, \dots$

X_n = αρ. ατόμων στο δωμάτιο στην αρχή της περιόδου

Αν αρχή δωμάτιο άδειο ⇒ μπαίνουν 1, 2, 3 μ.π. P_1, P_2, P_3

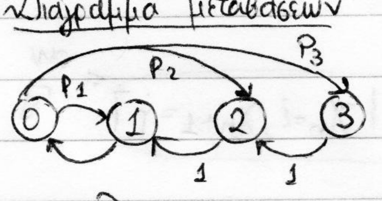
Αν δεν είναι άδειο φεύγει ένα άτομο. $\frac{1}{R_n}$

Έσοδο = 10 €/άτομο, περίοδο

Να βρεθεί αναμενόμενο μέσο έσοδο/περίοδο

$\{X_n, n=1,2,\dots\}$ ΜΑΔΧ $S = \{0,1,2,3\}$

π, r Διάγραμμα μεταβάσεων



$$\Leftrightarrow P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

αδιαχώριστη, $|S| < \infty$ ⇒ Θ.Ε.

(το $\bar{R}$ λογικά συμβολίζει αυτό που ζητάμε, δηλ. το αναμενόμενο έσοδο ανά περίοδο.)

$$\theta.\varepsilon. \Rightarrow \boxed{\bar{R} = \pi_0 r_0 + \pi_1 r_1 + \pi_2 r_2 + \pi_3 r_3}$$

$(\pi_0, \dots, \pi_3)$ = μοναδική στάσιμη κατανομή

$$\left.\begin{aligned} \underline{\pi} &= \underline{\pi} \cdot \mathbb{P} \\ \Sigma \pi_j &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \pi_0 &= \pi_1 \cdot 1 \\ \pi_1 &= \pi_0 P_1 + \pi_2 \cdot 1 \\ \pi_2 &= \pi_0 P_2 + \pi_3 \cdot 1 \\ \pi_0 + \pi_1 &+ \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{aligned}$$

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 \cdot 1 \\ \pi_0 P_1 + \pi_2 \cdot 1 \\ \pi_0 P_2 + \pi_3 \cdot 1 \\ \pi_0 \cdot P_3 \end{pmatrix}$$

(η τέταρτη γραμμ. εξίσωση δε χρειάζεται, αφού είναι γραμμ. εξαρτημένη με μία από τις τρεις ήδη υπάρχουσες)

$$\pi_0 = \frac{1}{2 + P_2 + 2P_3}$$

$$\pi_1 = \frac{1}{2 + P_2 + 2P_3}$$

$$\pi_2 = \frac{P_2 + P_3}{2 + P_2 + 2P_3}$$

$$\pi_3 = \frac{P_3}{2 + P_2 + 2P_3}$$

$r_0 = 0$ (όταν έχουμε 0 άτομα, το μέσο κέρδος 0)

$r_1 = 1 \cdot 10 = 10$ (όταν έχουμε 1 άτομο, 10€)

$r_2 = 2 \cdot 10 = 20$ (για 2 άτομα $2 \cdot 10 = 20$ €)

$r_3 = 3 \cdot 10 = 30$ (για 3, 30€)

$R = \pi_0 r_0 + \pi_1 r_1 + \pi_2 r_2 + \pi_3 r_3$

12/12/2014

Μάθημα 14

Τυχαίος Περίπατος

$Y_1, Y_2, \dots$ αιτμ ακέραιες

$P(Y = k) = a_k, \; k \in \mathbb{Z}$

$X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \;, n = 1, 2, \dots$

$X_0 = 0$

(το X_n είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων του Y)

$X_0 = 0$
$X_1 = Y_1$
$X_2 = Y_1 + Y_2$
$\vdots$
$X_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$

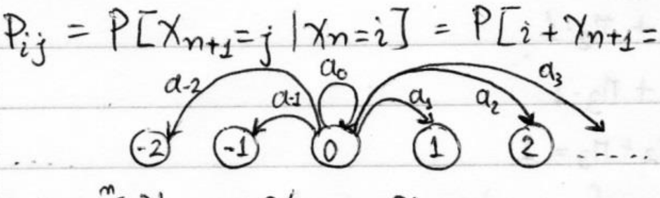
$\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$

Αν $X_n = i$, $X_{n+1} = i + Y_{n+1}$

η κατανομή αυτή δεν εξαρτάται από το παρελθόν! (οι μεταβλητές μας είναι ανεξάρτητες & ισόνομες!)

Έχουμε τη Μαρκοβιανή ιδιότητα!

$P_{ij} = P[X_{n+1}=j \mid X_n=i] = P[i+Y_{n+1}=j] = P[Y_{n+1}=j-i] = a_{j-i}$



$X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ $\quad Y_1 + \dots + Y_n$

ακολουθεί κανονική κατανομή

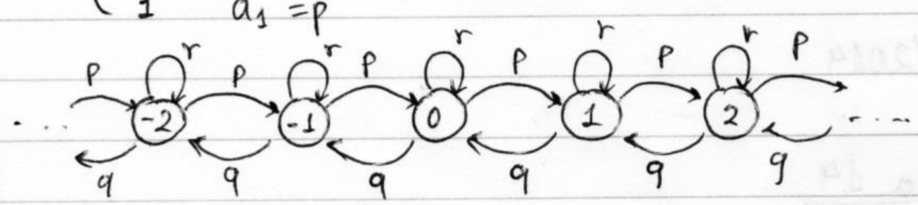
Όταν $E(|Y|)=\mu<\infty$ $\quad E(Y^2)<\infty$

$V(Y)=\sigma^2$

$\frac{X_n}{n} \to \mu$ μ.π. 1 $\qquad \frac{Y_1+\dots+Y_n-n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \to N(0,1)$

Ειδική Περίπτωση: $\boxed{a_{-1}+a_0+a_1=1}$ απλός τυχαίος περίπατος

$$Y = \begin{cases} -1 & a_1 = q \\ 0 & a_0 = r \\ 1 & a_1 = p \end{cases}$$



Αν $p=0$, $q>0$, παροδική ($\to -\infty$)

Αν $p>0$, $q=0$, παροδική ($\to +\infty$)

όλες οι καταστάσεις είναι του ίδιου τύπου, θυμίζω :)

Έστω $p,q>0$ (η περίπτωση που μας ενδιαφέρει) ⇒ αδιαχώριστη αλυσίδα

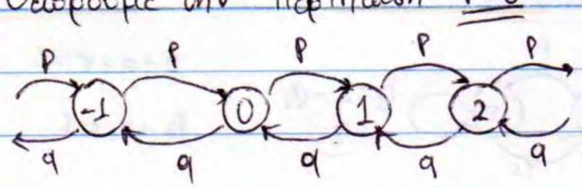
Περιοδικότητα:

Αν $r>0$ ⇒ απεριοδική

Αν $r=0$ ⇒ περιοδική με $d=2$

Επαναληπτική ή Παροδική? Η απάντηση δεν εξαρτάται από το r

Θεωρούμε την περίπτωση $\underline{r=0}$



$(p+q=1\ ;\ p,q>0)$

Θυμόμαστε: i επαναληπτική $\iff \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$

Έστω $i=0$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{(n)} = \begin{cases} \to \infty \\ \to <\infty \end{cases}$

$P_{00}^{(n)} = ?$

Παίρνουμε την κατάσταση 0. Αν αυτή είναι παροδική τότε όλες παροδικές, αν είναι μηδ. επαναληπτική, τότε όλες μηδ. επαναληπτικές (αδιαχώριστη αλυσίδα)

$$P_{00}^{(n)} = P[X_n = 0 \mid X_0 = 0] = \begin{cases} 0 & n \neq 2k \\ \binom{2k}{k} p^k q^k & n = 2k \end{cases}$$

$$P_{00}^{(2k)} = P(k \text{ επιτυχίες σε } 2k \text{ δοκιμές, με } p = P(\text{επιτ})) = \binom{2k}{k} p^k \cdot q^k,\ k \geq 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} p^k q^k = \sum_k \frac{(2k)!}{k!\,k!} p^k q^k$$

Τύπος Sterling

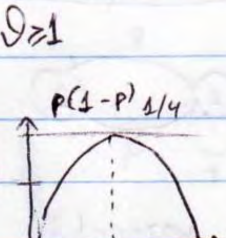
$$k! \approx k^{k+1/2} \cdot e^{-k} \sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi k}\, e^{-k} k^k$$

$$\left(\lim_{k\to\infty} \frac{k!}{\sqrt{2\pi k}\, e^{-k} k^k} = 1 \right) \quad P_{00}^{(2k)} \approx \frac{(4pq)^k}{\sqrt{\pi k}}$$

$$\sum_k \frac{(\overset{\vartheta}{4pq})^k}{\sqrt{\pi k}} = ? \qquad \sum \frac{\vartheta^k}{\sqrt{k}} \begin{cases} \to <\infty & \vartheta < 1 \\ \to = \infty & \vartheta \geq 1 \end{cases}$$

$$\vartheta = 4pq = 4p(1-p) = 4p - 4p^2 \leq 1 \ \forall p$$

$= 1$ αν $p = \frac{1}{2}$



$$\boxed{0 \begin{cases} \to \text{παροδική } p \neq q \\ \to \underset{\text{(μηδενικά)}}{\text{επαναληπτική}}\ p = q \end{cases}}$$

$$p(1-p) \leq \frac{1}{4}\ \forall p$$

Θεώρημα σελ. 26

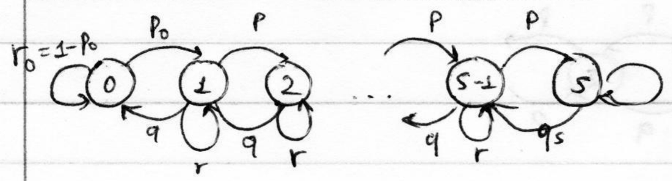
Είναι ΠΑΝΤΑ μηδενικά επαναληπτική

$p=q=1/2$

$$P_{00}^{(2k)} \simeq \frac{(4pq)^2}{\sqrt{\pi k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \xrightarrow[k]{} 0$$

$$\lim P_{00}^{(2k)} = 0 \Rightarrow \underline{\text{Μ.Ε.}}$$

Πεπερασμένος Τυχαίος Περίπατος



$p+q+r=1$

$p_0+r_0=1$

0, S φράγματα (barriers)

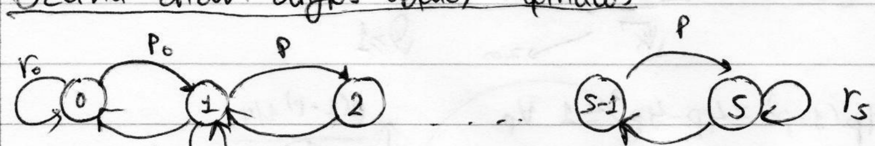
Αν $p_0=0,\ r_0=1 \Rightarrow \{0\}$ απορ. κλάση
Αν $q_s=0,\ r_s=1 \Rightarrow \{S\}$ απορ. κλάση
Αν $r_0=0,\ p_0=1$

η κατάσταση 0

Αν $p_0=0 \Rightarrow 0$: απορροφητικό φράγμα
Αν $p_0=1 \Rightarrow 0$: ανακλαστικό φράγμα
Αν $0<p_0<1 \Rightarrow 0$: ελαστικό φράγμα
(αντίστοιχα και για την κατάσταση S)

πρόσημα	p_0	q_s	
	+	+	αδιαχ., Θ.Ε.
	+	0	$\{S\}$ απορ., $\{0,\dots,S-1\}=T$ (όλες εκτός από την S παροδικές)
	0	+	$\{0\}$ απορ, $\{1,\dots,S\}=T$ (όλες εκτός από την 0 παροδικές)
	0	0	$\{0\}, \{S\}$ απορ., $\{1,\dots,S-1\}=T$

Θετικά επαν. απλός τυχαίος Περίπατος



Εξ. στάσιμης κατανομής

$0:\ \pi_0=\pi_1 q+\pi_0 r_0 \rightarrow \pi_0(1-r_0)=\pi_1 q \Rightarrow \pi_0 p_0=\pi_1\cdot q \Rightarrow \pi_1=\pi_0\cdot\frac{p_0}{q}$

$1:\ \pi_1=\pi_0 p_0+\pi_1 r+\pi_2\cdot q=\pi_1 q+\pi_1 r+\pi_2 q=\pi_1(1-p)+\pi_2 q \Rightarrow \pi_1 p=\pi_2 q$

$\pi_2=\pi_1\frac{p}{q}=\pi_0\frac{p_0 p}{q^2}$

$\pi_2 p = \pi_3 q, \dots$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \pi_k = \pi_0 \dfrac{p_0 p^{k-1}}{q^k}, \; k=1,2,\dots,s-1 \\[2ex] \pi_s = \pi_0 \dfrac{p_0 p^{s-1}}{q_s q^{s-1}} \end{array}}$$

$$\sum_{i=0}^{s} \pi_i = 1 \Rightarrow \pi_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{s-1} \frac{p_0 p^{k-1}}{q^k} + \frac{p_0 p^{s-1}}{q_s q^{s-1}} \right] = 1 \Rightarrow \pi_0 = \dots$$

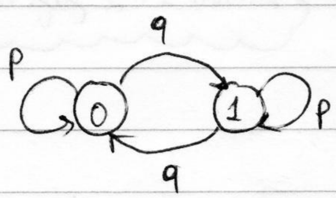
$\mathbb{P} = (P_{ij})$ διπλά στοχαστικός

$$\sum_{j \in S} P_{ij} = 1 \quad \forall i \in S$$

$$\sum_{i \in S} P_{ij} = 1 \quad \forall j \in S$$

π.χ. για $S = \{0, 1\}$ $\quad p+q=1, \quad \mathbb{P} = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$

$\pi_0, \pi_1 = ?$



$$\left.\begin{array}{l} \pi_0 = \pi_0 \cdot p + \pi_1 \cdot q \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_0 q = \pi_1 q \Rightarrow \boxed{\pi_0 = \pi_1 = \frac{1}{2}}$$

<u>Ασκήσεις</u>

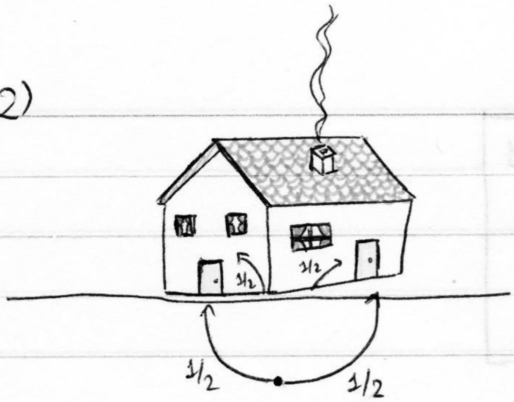
1) Αποδείξτε ότι για $S = \{0, 1, \dots, k\}$, $\pi_j = \frac{1}{k+1} \quad \forall j \in S$

<u>Εξισώσεις Ισορροπίας:</u> $\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i P_{ij}$

$$\sum_{j \in S} \pi_j = 1$$

Για $\pi_i = \frac{1}{k+1} \quad \forall i \qquad \frac{1}{k+1} = \sum_{i \in S} \frac{1}{k+1} P_{ij} = \frac{1}{k+1} \underbrace{\sum P_{ij}}_{=1}$

2)

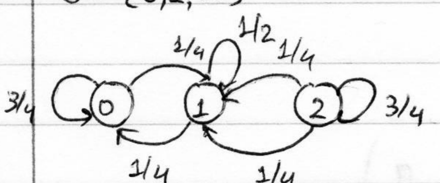


Έχει δύο ζευγ. παπούτσια. Παίρνει ένα ζευγάρι από την πόρτα που φεύγει (αν υπάρχει, διαφορετικά ξυπόλητος)
Στην επιστροφή, αφήνει τα παπούτσια του (αν φοράει) στην πόρτα που μπαίνει
?% ημερών ξυπόλητος

Έστω X_n=αρ. ζευγ. στη δεξιά πόρτα στην αρχή της μέρας n

$\{X_n, n=1,2,\dots\}$ Μαρκοβιανή? (Αν γνωρίζω $X_n=i$, $i \in \{0,1,2\}$ τότε το X_{n-1} εξαρτάται από το i και τη σημερινή μέρα (ανεξάρτητο από το παρελθόν))

$S=\{0,1,2\}$



κατάστ. 0: 0 παπούτσια
κατάστ. 1: 1 ζευγ. παπούτσια
κατάστ. 2: 2 ζευγ. παπούτσια

Αδιαχ. } ⇒ θ.ε.
Πεπερ. }

$P_{00}>0 \Rightarrow 0$ απεριοδική

% ημερών όπου: { $X_n=0$ και βγαίνει δεξιά ($\boxed{1/3}$ + $\boxed{1/2}$ = $\boxed{1/6}$)
ή $X_n=2$ και βγαίνει αριστερά } + $\boxed{=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}}$

% ημ. όπου $X_n=0$, $\frac{1}{\nu_0}=\pi_0$ ($\boxed{1/3}$ + $\boxed{1/2}$ = $\boxed{1/6}$)

% ημ. όπου $X_n=1$ $=\pi_1$

Στάσιμη Κατανομή

λύνουμε το σύστημα! ∃ και 2ος τρόπος, αν παρατηρήσουμε ότι $\mathbb{P}$ διπλά στοχαστικός! Έτσι βρίσκουμε εύκολα τη στάσιμη κατανομή

διπλά στοχαστικός $\mathbb{P}=\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

3) Ανεξάρτητες ρίψεις δίκαιου ζαριού

Έστω X_n = μέγιστη ένδειξη πρώτων n ρίψεων

$\{X_n, n=1,2,\dots\}$ Μαρκοβιανή?

$$P = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 2 & 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 3 & 0 & 0 & 3/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 4/6 & 1/6 & 1/6 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$T = \{1,2,3,4,5\}$

$C = \{6\}$

$P_{ij}^{(m)} \quad \forall\ i,j,m$

1) Αν $j<i \Rightarrow P_{ij}^{(m)} = 0$ όλες οι m ρίψεις να είναι $\le i$

2) Αν $j=i \Rightarrow P_{ii}^{(m)}$

$P[X_m = i \mid X_0 = i] = \left(\frac{i}{6}\right)^m$

3) Αν $j>i$ $P_{ij}^{(m)} = ?$

$P_{ij}^{(m)} = P[\max(Y_1, Y_2, \dots, Y_m) = j]$

όπου $Y_1, Y_2, \dots$ ανεξ. $P(Y=i) = \frac{1}{6}$ $i=1,\dots,6$

$\left[\underline{\text{υποδ:}}\ P(\max(Y_1, Y_2, \dots, Y_m) \le j) = P(Y_1 \le j, \dots, Y_m \le j) = \left(\frac{j}{6}\right)^m \right]$

13/12/2014

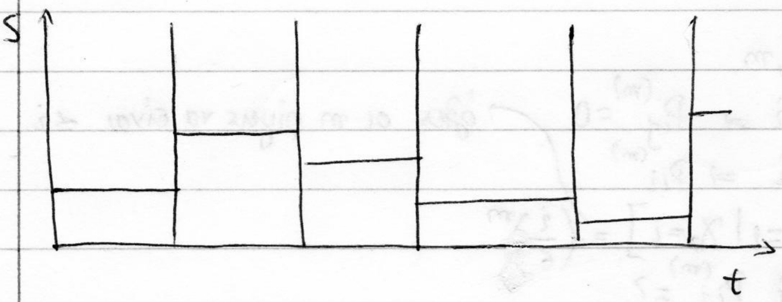
<u>Μάθημα 15</u>

<u>Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου</u>

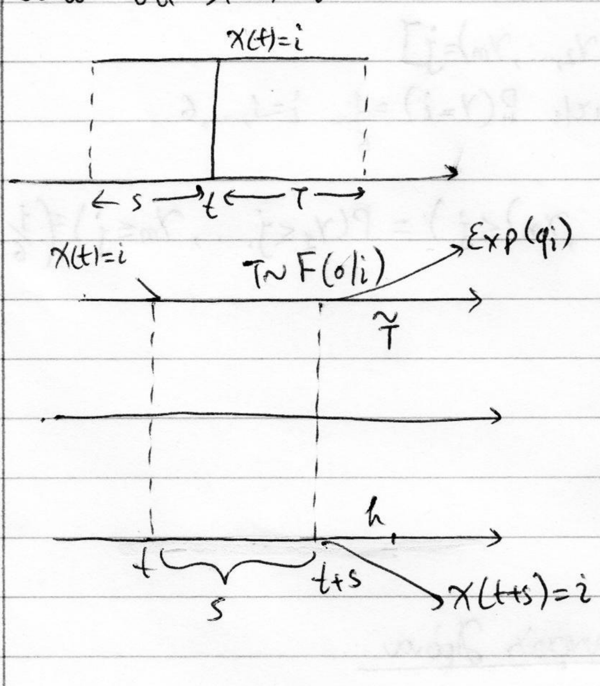
Χώρος καταστάσεων $S \subseteq \mathbb{N}_0$
$X(t)$ = κατάσταση τη στιγμή t
$\{X(t), t \geq 0\}$

Υποθέσεις
1) Μαρκοβιανή Ιδιότητα
Δοθέντος ότι $X(t) = i$ οι τ.μ. $X(t+s), X(t-h)$ ανεξάρτητες για κάθε $h, s > 0$
2) Σε οποιοδήποτε διάστημα πεπερασμένου μήκους, γίνεται πεπερασμένος αριθμός μεταβάσεων με πιθανότητα 1

Υλοποίηση



Έστω ότι $X(t) = i$



$T > S$

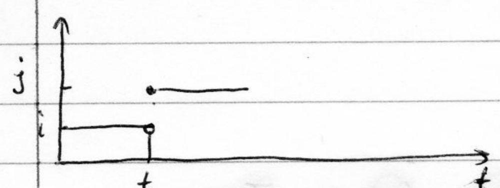
$$[T>h] \overset{\text{έλλειψη μνήμης}}{=} P[T>s+h \mid T>s] = P[\tilde{T}>h \mid X(t+s)=i]$$

$T \neq U(0,10)$

Μαρκοβιανή Ιδιότητα $\Rightarrow$ T = χρόνος παραμονής στην κατάσταση $i \sim$ Ε...

Έστω T_i ο χρόνος παραμονής στην κατάσταση i.
Τότε $T_i \sim Exp(q_i)$

② Έστω $X(t)=i$ και τη χρονική στιγμή t γίνεται μετάβαση



$X(t^-)=i$
$X(t^+)=j$

$P[X(t^+)=j \mid X(t^-)=i] = P_{ij}, \ j\neq i$
$\underline{\Sigma P_{ij}=1}, \ j\in S, j\neq i$

<u>1η Περιγραφή</u>

T_i = χρόνος παραμονής στην $i \in S \sim Exp(q_i)$
Όταν γίνει μετάβασης $P[X(t^+)=j \mid X(t^-)=i] = P_{ij}$
Δεδομένα: $\boxed{\begin{array}{l} q_i, \ i\in S \\ P_{ij}, \ i,j\in S, i\neq j \end{array}}$

$E(T_i) = \frac{1}{q_i}, \ f_i(t) = q_i \cdot e^{-q_i t}, \ t>0.$

<u>Υπόθεση</u>: $q_i < \infty \ \forall \ i\in S$

<u>Παρένθεση (Εκθετική Κατανομή)</u>
① Έστω $T \sim Exp(\lambda)$, $f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, \ t\geq 0$
$F(t) = 1-e^{-\lambda t}, \ P(T>t) = e^{-\lambda t}$

Έστω $T_1 \sim Exp(\lambda)$, $T_2 \sim Exp(\mu)$ ανεξάρτητες.

$T = min(T_1, T_2) \Rightarrow T \sim Exp(\lambda+\mu)$

$P(T \le t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(min(T_1, T_2) > t) = 1 - p(T_1 > t, T_2 > t) =$

$= 1 - P(T_1 > t) \cdot P(T_2 > t) = 1 - e^{-\lambda t} \cdot e^{-\mu t} = 1 - e^{-(\lambda+\mu)t} = P(T \le t)$

$\Rightarrow T \sim Exp(\lambda+\mu)$

(2) $P(T = T_1) = P(T_1 < T_2) = \int_{u=0}^{+\infty} P[T_1 < T_2 | T_2 = u] \cdot \mu \cdot e^{-\mu u} \partial u =$

$= \int_0^{+\infty} P(T_1 < u) \cdot \mu \cdot e^{-\mu u} \partial u = \int_0^{+\infty} (1 - \lambda e^{-\lambda u}) \cdot \mu \cdot e^{-\mu u} \partial u = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$

και αντίστοιχα $P(T = T_2) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$

<u>2η περιγραφή:</u>

<u>Παράδειγμα:</u> $S = \{0, 1, 2\}$

$\{X(t), t \ge 0\}$, $X(t) \in S$

<u>Το σύστημα εξελίσσεται ως εξής:</u>

Έστω $X(t) = 0$ (στιγμή εισόδου 0)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Alarm 1: Διάρκεια } T_{01} \sim Exp(q_{01}) \\ \text{Alarm 2: Διάρκεια } T_{02} \sim Exp(q_{02}) \end{array}\right\} \text{ανεξάρτητα μεταξύ τους}$$

Όταν χτυπήσει το πρώτο από τα δύο alarm, το σύστημα πάει στην αντίστοιχη κατάσταση

Αν π.χ. η νέα κατάσταση είναι $X(s) = 1$,

Alarm 1 διάρκεια $T_{10} \sim Exp(q_{10})$

Alarm 2 διάρκεια $T_{12} \sim Exp(q_{12})$ κ.ο.κ.

2η περιγραφή $\Leftrightarrow$ 1η περιγραφή όπου $q_i = \dots$
$P_{ij} = \dots$

<u>2η περιγραφή</u>

Αν $X(t) = i$

Ένα alarm για κάθε $j \neq i$, διάρκεια $T_{ij} \sim Exp(q_{ij})$

Μένω στην i μέχρι να χτυπήσει το πρώτο alarm, έστω ότι είναι το $j_0 \Rightarrow$ μετάβαση στην j_0

Δεδομένα $\{q_{ij}\}$, $i, j \in S$, $i \neq j$

Έστω $X(t) = i$, $T_i =$ χρόνος παραμονής στην i.

$$T_i = \min_{j \neq i} (T_{ij}) \Rightarrow T_i \sim Exp(q_i) \text{ όπου } q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$$

σε στιγμή μετάβασης $P(i \to j) = P(T_i = T_{ij}) = \dfrac{q_{ij}}{q_i}$

<u>Περ. 1</u>

$T_i \sim Exp(q_i)$
$P(i \to j) = P_{ij} \ \forall i \neq j$

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$$

$$P_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}$$

<u>Περ. 2</u>

$T_{ij} \sim Exp(q_{ij})$
$\forall i, j, i \neq j$

$$q_{ij} = q_i \cdot P_{ij} \ \forall i \neq j$$

17/12/2014

Μάθημα 16

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου

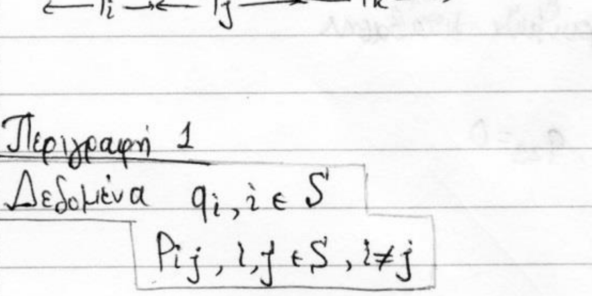
$\{X(t), t\geq 0\}$

$X(t) \in S \subseteq \{0,1,2,\dots\}$

Μαρκοβιανή Ιδιότητα

Δεδομ. $X(t)=i$, οι $X(t-s)$, $X(t-h)$ ανεξάρτητες $\forall\ s,h\geq 0$

Υλοποίηση



T_i = χρόνος παραμονής κατάσταση i

$T_i \sim Exp(q_i)$

Όταν για μετάβαση $i \to j$ με πιθ. P_{ij}

$\sum_{j\neq i} P_{ij} = 1$

Περιγραφή 1

$\boxed{\text{Δεδομένα } q_i,\ i\in S \quad P_{ij},\ i,j\in S,\ i\neq j}$

Περιγραφή 2

Αν $X(t)=i$

alarms $T_{ij} \sim Exp(q_{ij})\ \forall j\neq i$

$P_{i\neq j} = \frac{q_{ij}}{\sum_{k\neq i} q_{ik}} = \frac{q_{ij}}{q_i}$

$Exp(\sum_{j\neq i} q_{ij}) = T_i = \min_{j\neq i}(T_{ij})$, $i\to j$ αν $T_{ij} = \min_{k\neq i}(T_{ik})$

Δεδομένα $\boxed{q_{ij},\ i,j\in S,\ i\neq j}$

Μετασχηματισμός

$$\boxed{\begin{aligned} q_i &= \sum_{j\neq i} q_{ik} \\ P_{ij} &= \frac{q_{ij}}{q_i} \end{aligned}} \qquad \boxed{q_{ij} = q_i P_{ij}}$$

Πίνακας ρυθμών μετάβασης (γεννήτορας πίνακας)

Ο πίνακας αυτός δεν είναι απαραίτητα συμμετρικός!

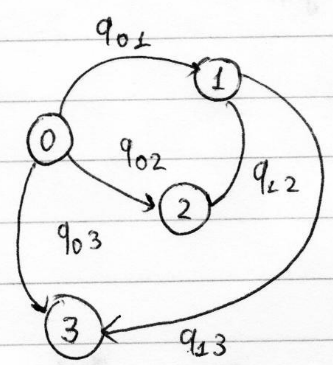
Q

$$Q = \begin{pmatrix} -q_0 & \boxed{q_{01} \quad q_{02} \quad \dots} \\ q_{10} & -q_1 & q_{12} & \dots \\ q_{20} & q_{21} & -q_2 & q_{23} & \dots \\ \dots & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \Sigma = q_0$$

$$\left.\boxed{\begin{array}{l} \text{αθροίσματα γραμμών} = 0 \\ \text{μη διαγώνια στοιχεία} \geq 0 \end{array}}\right\} \text{Στοχαστικός Πίνακας ρυθμών}$$

δηλ. τα διαγώνια στοιχεία είναι αρνητικά, ενώ τα υπόλοιπα όχι.

Από $Q \Leftrightarrow$ διάγραμμα ρυθμών μετάβασης

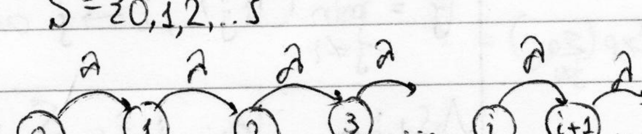


$q_{23} = 0$

Παραδείγματα:

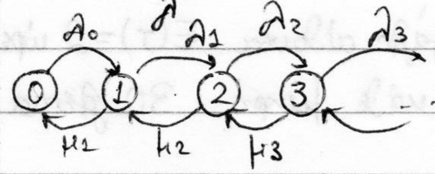
1)
$$Q = \begin{array}{c|c} & 0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{array} & \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & \emptyset \\ & -\lambda & \lambda & \\ \emptyset & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

$S = \{0,1,2,\dots\}$



$q_i=\lambda \ \forall i \rightarrow T_i \sim Exp(\lambda)$ | Poisson process (λ)
$P_{i,i+1}=1 \ \forall i$

$E(T_i)=\frac{1}{\lambda}$



<u>Διαδικασία γεννήσεων - θανάτων</u>
(birth and death process)

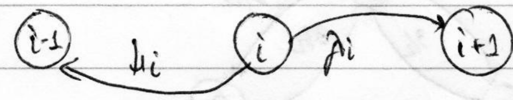
$q_{i,i+1}=\lambda_i$, $i=0,1,2,\dots$ (ρυθμοί γεννήσεων)
$q_{i,i-1}=\mu_i$, $i=1,2,\dots$ (ρυθμοί θανάτων)

<u>Ειδικές Περιπτώσεις</u>

a) $\lambda_i=\lambda \ \forall i$, $\mu_i=\mu \ \forall i$ (απλή)

β) Διαδικασία γεννήσεων θανάτων, όπου <u>κάθε άτομο</u> στον πληθυσμό
 δημιουργεί νέο $\sim T\sim Exp(\lambda)$
 αποχωρεί $\sim T\sim Exp(\mu)$

$X(t)=i$ (i άτομα)



$X(t)=i$

① $q_i=i\lambda+i\mu$ | $q_{i,i+1}=q_i\cdot P_{i,i+1}=(i\lambda+i\mu)\dfrac{i\lambda}{i\lambda+i\mu}=i\lambda$

② $P_{i,i+1}=\dfrac{i\lambda}{i\lambda+i\mu}$

⋮

ⓘ

Παράδειγμα 2)

Βιβλιοθήκη $\begin{cases} \text{1 μεγάλη αίθουσα} \\ \text{2 μικρές αίθουσες} \end{cases}$

Χρόνος Παραμονής: εκθετικός $\begin{cases} \text{μεγάλη αίθουσα } E(T)=2 \text{ ώρες} \\ \text{σε κάθε μικρή 30 λεπτά} \end{cases}$

Μεταβάσεις:

Από μεγάλη σε κάθε μικρή με $\frac{1}{2}$

Από μικρή → στη μεγάλη με $\frac{3}{4}$

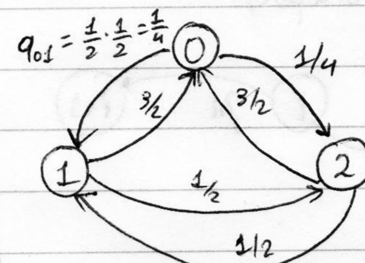
Από μικρή → στην άλλη μικρή με $\frac{1}{4}$

Να βρεθεί ο πίνακας Q και το διάγραμμα των ρυθμών μετάβασης.

Περιγραφή 1

$T_i \sim Exp(q_i) \Rightarrow E(T_i) = \frac{1}{q_i}$ | $X(t)$ = αίθουσα τη στιγμή t $\in \{\underset{\text{μεγάλη}}{0}, 1, 2\}$

$P(i \to j) = P_{ij}$



$E(T_0) = 2 \Rightarrow \boxed{q_0 = \frac{1}{2}}$

$E(T_1) = E(T_2) = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{q_1 = q_2 = 2}$

$P_{01} = P_{02} = \frac{1}{2}$ | $q_{ij} = q_i P_{ij}$

$P_{12} = P_{21} = \frac{1}{4}$

$P_{10} = P_{20} = \frac{3}{4}$

(μείον το άθροισμα των υπολοίπων)

$$Q = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ άρα $-\frac{1}{2}$;-) !

Παράδειγμα 3)

Ταξί κινείται στην πόλη.

Όταν είναι άδειο ο χρόνος μέχρι να το σταματήσει πελάτης ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ ($\sim Exp(\lambda)$)

Ο πελάτης είναι τύπος i με πιθανότητα θ_i, $i=1,2,\ldots,N$

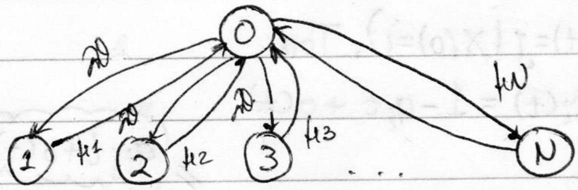
(οι κατηγορίες των πελατών διακρίνονται με βάση το χρόνο που ο καθένας τους χρειάζεται να χρησιμοποιήσει το ταξί για να φτάσει στον προορισμό του)

Διάρκεια διαδρομής πελάτη τύπου-i $\sim Exp(\mu_i)$

$Q = ?$

$S = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$

άδειο · πελάτης τύπου 1 · … · πελάτης τύπου N



$q_{i0} = \mu_i \quad i=1,2,\ldots,N$

$q_{0i} = ?$

$T_0 \sim Exp(\lambda) \Rightarrow q_0 = \lambda$

$P_{01} = \theta_1, \ldots, P_{0N} = \theta_N$

$q_{01} = q_0 \cdot P_{01} = \lambda\theta_1, \; p_{02} = \lambda\theta_2 \ldots$

$$
Q = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & \ldots & \ldots & N \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc}
-\lambda & \lambda\theta_1 & \lambda\theta_2 & \ldots & \lambda\theta_N \\
\mu_1 & -\mu_1 & 0 & \ldots & 0 \\
\mu_2 & 0 & -\mu_2 & \ldots & 0 \\
\vdots & & & & \\
\mu_N & 0 & \ldots & 0 & -\mu_N
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ N \end{array}
$$

19/12/2014

Μάθημα 17