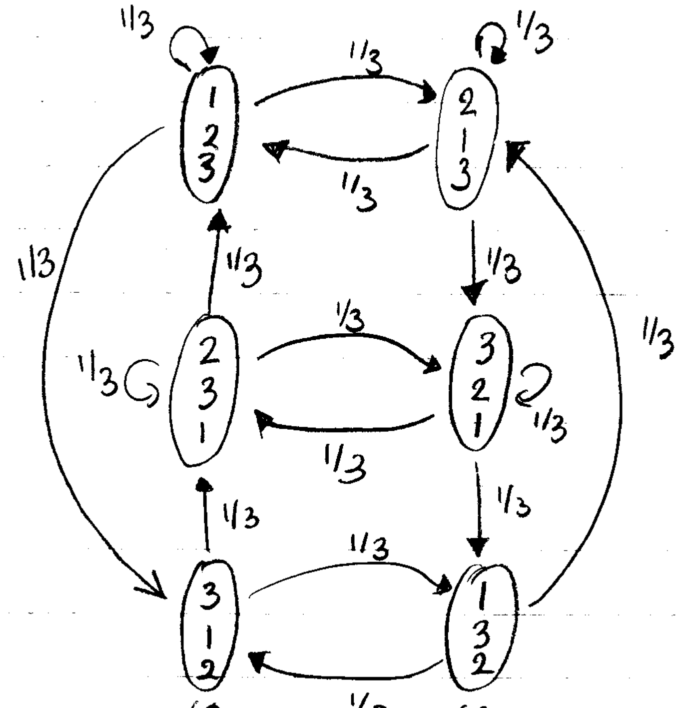
Στοχαστικές Ανελίξεις

Σειρά Ασκήσεων 1

Άσκηση 1 Οι δυνατές καταστάσεις αυτής της διαδικασίας καθορίζονται από τη σειρά με την οποία βρίσκονται σωριασμένα τα βιβλία στο τραπέζι. Επομένως συμβολίζουμε την κατάσταση με ένα διάνυσμα $\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$, $i, j, k \in \{1,2,3\}$. Για τις πιθανότητες μετάβασης

βλέπουμε ότι αν επιλεγεί το βιβλίο i η κατάσταση θα παραμείνει η ίδια (πιθανότητα 1/3). Αν επιλεγεί το j στο επόμενο βήμα θα μπει στην κορυφή και η επόμενη κατάσταση θα είναι η $\begin{pmatrix} j \\ i \\ k \end{pmatrix}$ (πιθ. 1/3). Όμοια, αν επιλεγεί το k η επόμενη κατάσταση θα είναι η $\begin{pmatrix} k \\ i \\ j \end{pmatrix}$.

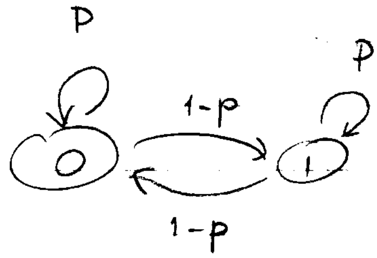
Το διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης είναι:



Άσκηση 2 (a) Αν $X_n = i$, δηλαδή ο $n^{οστος}$ σταθμός μεταδίδει την τιμή i στον $(n+1)$-σταθμό. Αυτός με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από τους προηγούμενους, θα μεταδώσει τιμή i και με πιθανότητα $1-p$ την άλλη τιμή j. Επομένως η διαδικασία $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ είναι Μαρκοβιανή με πίνακα πιθανοτήτων πρώτης μετάβασης

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & \quad 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} \end{array}$$

κ' το διάγραμμα



(b) Ζητείται η πιθανότητα $\lim_{n\to\infty} p_{00}^{(n)}$

Από το διάγραμμα βλέπουμε ότι για $0<p<1$ η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη, θετικά επαναληπτική και απεριοδική, με οριακή κατανομή $\underline{\pi} = (\pi_0, \pi_1)$ που δίνεται από τις εξισώσεις

$$\left.\begin{array}{l} \pi_0 = \pi_0 \cdot p + \pi_1 (1-p) \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_0 = \pi_1 = 1/2$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$, δηλαδή $\lim_{n\to\infty} p_{00}^{(n)} = \pi_0 = \frac{1}{2}$

(Σημείωση Αν $p=0$ η αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική και περιοδική, επομένως $\lim_{n\to\infty} p_{00}^{(n)}$ δεν υπάρχει.

Αν $p=1$ η αλυσίδα είναι διαχωρίσιμη με δύο απορροφητικές κλάσεις $C_1=\{0\}$, $C_2=\{1\}$, επομένως $p_{00}^{(n)} = 1 \ \forall n$

Άσκηση 3 (α) Έστω X_n η κατηγορία του οδηγού στην αρχή του έτους n, όπου

$$X_n = \begin{cases} (0,0) & \text{αν ο οδηγός δεν είχε ατύχημα τα χρόνια } n-2, n-1 \\ (1,0) & \text{αν " " είχε ατύχημα το έτος } n-2 \text{ κ' δεν είχε το έτος } n-1 \\ (0,1) & \text{" " " δεν " " " " } n-2 \text{ " είχε " " } n-1 \\ (1,1) & \text{" " είχε ατύχημα κ' στα δύο έτη } n-2, n-1 \end{cases}$$

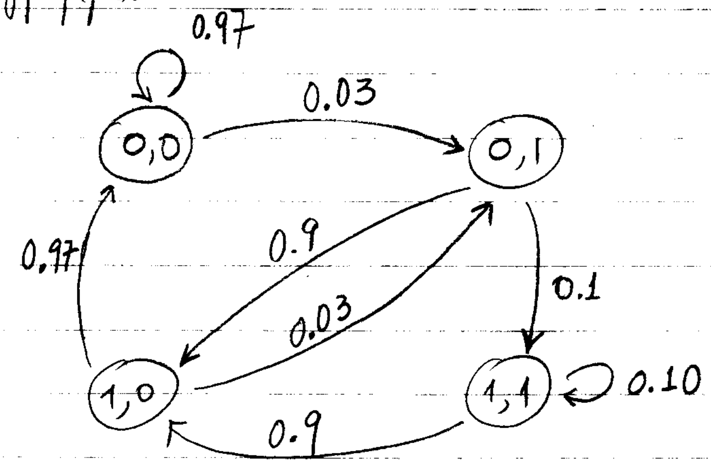
Υποθέτουμε ότι στα έτη 0,1 ο οδηγός ταξινομείται ως καλός $X_0 = X_1 = (0,0)$
Η διαδικασία $\{X_n,\ n = 0, 1, \ldots\}$ είναι Μαρκοβιανή

διακριτού χρόνου, με πιθανότητα μετάβασης ενός βήματος (για $n \geq 2$) που ορίζονται ως εξής·

Αν $X_n = (0,0)$, αυτό σημαίνει ότι στο έτος $n-1$ δεν υπήρχε ατύχημα.
Επομένως στο έτος n η πιθανότητα ατυχήματος είναι 0,03.

Αν γίνει ατύχημα στο έτος n, η κατάσταση στην αρχή του έτους $n+1$ θα είναι (0,1), ενώ αν δε γίνει η νέα κατάσταση παραμένει (0,0).

Όμοια προκύπτουν οι υπόλοιπες πιθανότητες μετάβασης και έχουμε το διάγραμμα



Από το διάγραμμα προκύπτει ότι η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη, θετικά επαναληπτική και απεριοδική. Επομένως η οριακή κατανομή δίνεται από τη μοναδική λύση του συστήματος

$$\left.\begin{aligned}
\pi_{00} &= \pi_{00} \cdot 0.97 + \pi_{10}\, 0.97 \\
\pi_{10} &= \pi_{01}\, 0.9 + \pi_{11}\, 0.9 \\
\pi_{01} &= \pi_{00}\, 0.03 + \pi_{10}\, 0.03 \\
\pi_{00} + \pi_{01} &+ \pi_{10} + \pi_{11} = 1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}
\pi_{00} &= 0.9387 \\
\pi_{01} &= 0.0290 \\
\pi_{10} &= 0.0290 \\
\pi_{11} &= 0.0033
\end{aligned}$$

Οι οριακές πιθανότητες έχουν κ' ερμηνεία συχνοτήτων, δηλαδή αν ορίσουμε $M_{00}(n) = \sum_{t=0}^{n} 1(X_t = (0,0))$, $M_{11}(n) = \sum_{t=0}^{n} 1(X_t = (1,1))$, κτλ

τότε $\lim_{n\to\infty} \frac{M_{ij}(n)}{n+1} = \pi_{ij}$ με πιθ 1 και $\lim_{n\to\infty} \frac{E[M_{ij}(n)]}{n+1} = \pi_{ij}$

Το κόστος μιας περιόδου (έτους) για τον οδηγό, ως συνάρτηση της κατάστασης είναι

$$C_{00} = 400, \quad C_{01} = C_{10} = 450, \quad C_{11} = 550.$$

Επομένως το αναμενόμενο μέσο ετήσιο κόστος σε άπειρο ορίζοντα είναι ίσο με

$$\bar{C} = C_{00}\pi_{0} + C_{01}\pi_{01} + C_{10}\pi_{10} + C_{11}\pi_{11} = 403.39$$

(b) Ζητείται ο αναμενόμενος χρόνος πρώτης μετάβασης από την $(1,1)$ στην $(0,0)$.
Έστω $f_{(ij)}$ ο αναμενόμενος χρόνος πρώτης μετάβασης

από την (i,j) στη $(0,0)$ για $(i,j) \neq (0,0)$.

Οι χρόνοι αυτοί ικανοποιούν το σύστημα εξισώσεων

$$\left.\begin{array}{l} f_{10} = 1 + 0.97 \cdot 0 + 0.03 \cdot f_{01} \\ f_{01} = 1 + 0.9 \cdot f_{10} + 0.10 \cdot f_{11} \\ f_{11} = 1 + 0.1 \cdot f_{11} + 0.9 \cdot f_{10} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f_{10} = 1.07 \\ f_{01} = 2.18 \\ f_{11} = 2.18 \end{array}$$

Επομένως ένας οδηγός που αυτή τη χρονιά πληρώνει 550 ευρώ κατά μέσο όρο θα περιμένει 2.18 χρόνια για να πάει στην κατηγορία των 400 ευρώ.

ΑΣΚΗΣΗ 4 (a) Έστω X_n = ο τύπος της βάσης n, με $X_n \in S = \{A, C, G, T\}$.

Είναι προφανές ότι η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη, θετικά επαναληπτική και απεριοδική, επομένως η οριακή κατανομή υπάρχει και είναι $\pi = (\pi_A, \pi_C, \pi_G, \pi_T)$

$$\left.\begin{array}{l} \pi = \pi P \\ \underline{\pi} \cdot \underline{1} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \pi_A = 0.2639 \\ \pi_G = 0.2245 \\ \pi_C = 0.2772 \\ \pi_T = 0.2344 \end{array}$$

Ερμηνεία 1: Συχνότητα. Σε μια μεγάλη αλυσίδα περίπου 26,39% των βάσεων είναι τύπου A κτλ.

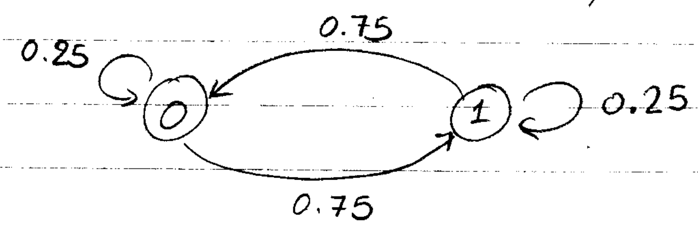
Ερμηνεία 2: Οριακή Κατανομή. Αν πάρουμε μια βάση της αλυσίδας σε ένα σημείο πολύ μακριά από την αρχή, τότε ανεξάρτητα από την αρχική βάση η πιθ. να βρούμε A τείνει στο 0,2639 κτλ.

(β) Ζητείται η πιθανότητα $\lim_{n\to\infty} P(X_n=A, X_{n+1}=A) =$

$$= \lim_{n\to\infty} P(X_n=A) \cdot P(X_{n+1}=A / X_n=A) = \pi_A \cdot p_{AA} = 0,2639 \cdot 0.200 = 0.0528$$

ΑΣΚΗΣΗ 5 Έστω X_n το αποτέλεσμα του παιχνιδιού n όπου $X_n=1$ (αν κερδίζει) ή $X_n=0$ (αν χάνει).

Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος η $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα με διάγραμμα μετάβασης



Αδιαχώριστη
Θετικά Επαναληπτική
Απεριοδική

$$\left.\begin{array}{l} \pi_0 = 0.25\pi_0 + 0.75\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_0 = \pi_1 = 1/2$$

Το καθαρό κέρδος στην κατάσταση 0 είναι ίσο με -1
και στην κατάσταση 1 ίσο με $2.5-1=1.5$

Επομένως το αναμενόμενο μέσο κέρδος ανά παιχνίδι είναι ίσο με $\pi_0 \cdot (-1) + \pi_1 \cdot (1.5) = 0,25 > 0$

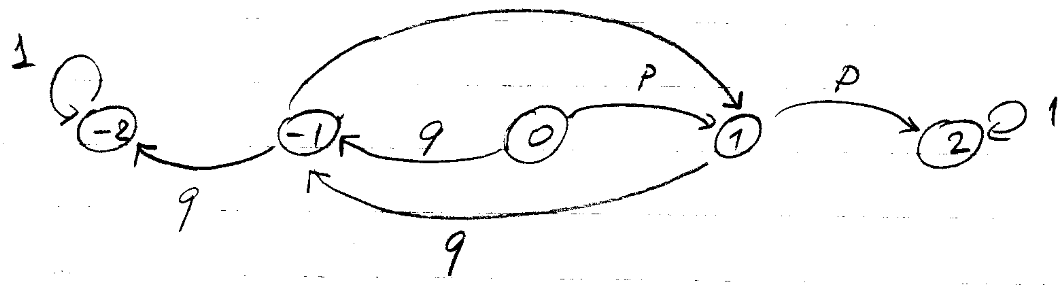
επομένως μακροπρόθεσμα το παιχνίδι αποφέρει θετικό κέρδος.

Άσκηση 6

Έστω X_n τυχαία μεταβλητή που ορίζεται ως εξής

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{αρχή του αγώνα} \\ 1 & \text{το αμέσως προηγούμενο παιχνίδι το κέρδισε η A} \\ -1 & \text{'' '' '' '' '' '' '' B} \\ 2 & \text{τα δύο τελευταία παιχνίδια κέρδισε η A} \\ -2 & \text{'' '' '' '' '' '' B} \end{cases}$$

(a) Η $\{X_n\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα με διάγραμμα μεταβάσεων ενός βήματος $(q = 1-p)$



Η διαδικασία έχει απορροφητικές καταστάσεις τις -2 και 2 και μεταβατικές τις $0, 1, -1$

Απορρόφηση στην -2 σημαίνει νίκη του B κ' στην 2 νίκη του A.

(b) Έστω f_i ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι την απορρόφηση από i σε μια από τις $-2, 2$. Ο f_0 είναι η αναμενόμενη διάρκεια του αγώνα. Με ανάλυση πρώτου βήματος παίρνουμε

$$\left.\begin{aligned} f_0 &= 1 + p f_1 + q f_{-1} \\ f_1 &= 1 + p \cdot 0 + q f_{-1} \\ f_{-1} &= 1 + p \cdot f_1 + q \cdot 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_0 = \frac{1+p+q+pq}{1-pq}, \quad f_1 = \frac{1+q}{1-pq}, \quad f_{-1} = \frac{1+p}{1-pq}$$

Επομένως η αναμενόμενη διάρκεια του αγώνα είναι ίση με $f_0 = \dfrac{1+p+q+pq}{1-pq} = \dfrac{2+p(1-p)}{1-p(1-p)}$

(Για $p=\frac{1}{2}$ προκύπτει $f_0 = 3$, δηλ με ισοδύναμους αντιπάλους κατά μέσο όρο χρειάζονται 3 παιχνίδια, ενώ προφανώς για $p=0$ ή $p=1 \Rightarrow f_0 = 2$)

(γ) Η πιθανότητα να κερδίσει ο A είναι ίση με την πιθανότητα απορρόφησης στην κατάσταση 2. Έστω x_{i2} η πιθανότητα απορρόφησης από τη i στην κατάσταση 2 για $i=-1,0,1$.

Με ανάλυση ενός βήματος προκύπτει

$$\left.\begin{aligned} x_{02} &= p\,x_{12} + q\,x_{-1,2} \\ x_{1,2} &= p\cdot 1 + q\,x_{-1,2} \\ x_{-1,2} &= p\,x_{1,2} + q\cdot 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_{0,2} &= \frac{p^2(1+q)}{1-pq} = \frac{p^2(2-p)}{1-p(1-p)} \\ x_{1,2} &= \frac{p}{1-pq} = \frac{p}{1-p(1-p)} \\ x_{-1,2} &= \frac{p^2}{1-pq} = \frac{p^2}{1-p(1-p)} \end{aligned}$$

Επομένως ξεκινώντας από την κατάσταση 0, η πιθανότητα να κερδίσει ο A, B είναι ίση με

$$P_A = x_{0,2} = \frac{p^2(2-p)}{1-p(1-p)} \qquad P_B = 1-P_A = \frac{1-p-p^2+p^3}{1-p(1-p)}$$

Για $p=0$ έχουμε $P_A = 0, P_B = 1$, για $p=1 \Rightarrow P_A = 1, P_B = 0$ και για $p=\frac{1}{2} \Rightarrow P_A = P_B = \frac{1}{2}$

Επομένως αν οι αντίπαλοι είναι ισοδύναμοι έχουν ίσες πιθανότητες να κερδίσουν δύο παιχνίδια στη σειρά, και κανένας δεν ευνοείται, όπως φυσικά αναμενόταν.

(δ) Ο παίκτης Α κάτω από το σύστημα των δύο νικών σε σειρά έχει πιθανότητα να κερδίσει $P_A = \dfrac{p^2(2-p)}{1-p(1-p)}$

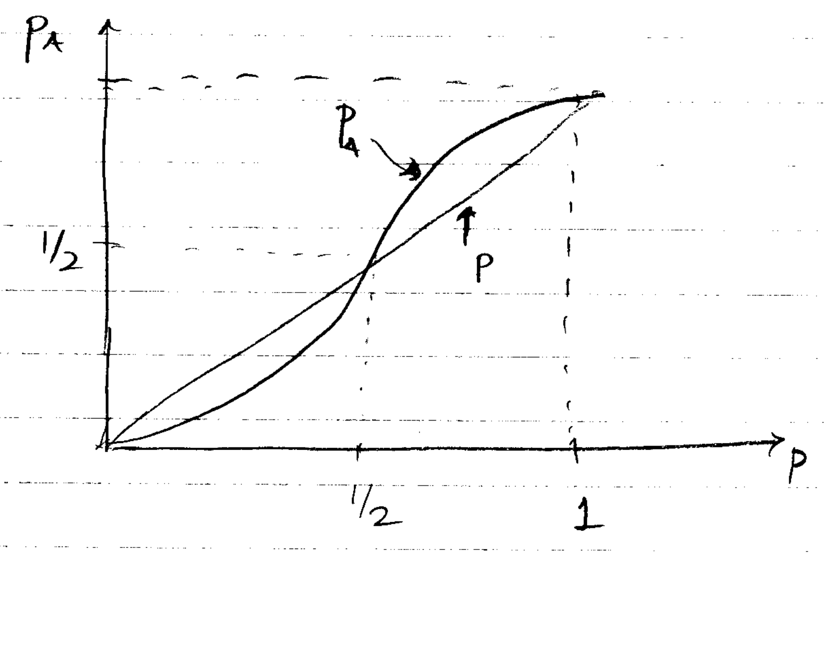
ενώ αν παιχτεί ένα μόνο παιχνίδι έχει πιθανότητα p. Προτιμά το σύνθετο αγώνα αν (Θεωρώντας $p>0$)

$$P_A > p \Rightarrow \frac{p^2(2-p)}{1-p(1-p)} > p \Rightarrow \frac{p(2-p)}{1-p(1-p)} > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(2-p) > 1-p(1-p) \Rightarrow 2p-p^2 > 1-p+p^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2p^2-3p+1 < 0.$$

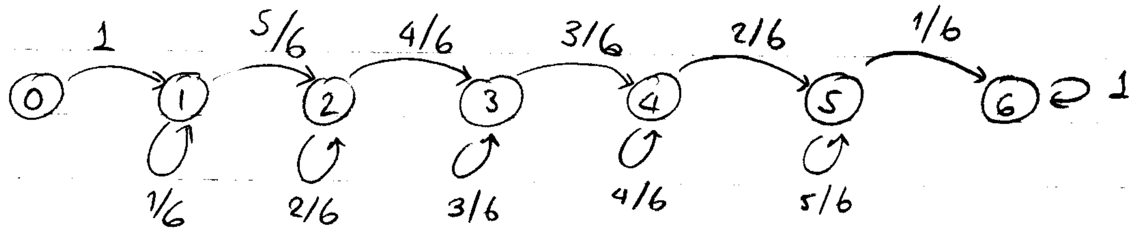
Το τριώνυμο έχει ρίζες $\frac{1}{2}, 1$ επομένως η ανισότητα ισχύει για $\frac{1}{2}<p<1$, δηλαδή ο Α προτιμάει τις δύο νίκες σε σειρά αν και μόνο αν είναι ισχυρότερος του Β, οπότε μειώνεται η πιθανότητα να χάσει "κατά τύχη".
Η γραφική παράσταση της P_A επιβεβαιώνει αυτό το συλλογισμό.



Άσκηση 7 Έστω X_n ο αριθμός των διαφορετικών ενδείξεων που έχουν εμφανιστεί στις n πρώτες ρίψεις.
Η $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $S=\{1,2,\dots,6\}$, αρχική κατ. $X=0$ και πιθανότητες μετάβασης P_{ij} που υπολογίζονται ως εξής

Αν $X_n=i$ δηλαδή έχουν εμφανιστεί ήδη i διαφορετικές ενδείξεις τότε αν η $(n+1)$-ρίψη είναι μια από τις i, (με πιθανότητα $i/6$), η νέα κατάσταση θα είναι επίσης $X_{n+1}=i$, ενώ αν η $(n+1)$-ρίψη είναι μια από τις $6-i$ που δεν έχουν εμφανιστεί η νέα κατάσταση θα είναι η $X_n=i+1$.
Επομένως

$$P_{i,j}=\begin{cases} i/6, & j=i \\ 1-\dfrac{i}{6}, & j=i+1,\ j\leq 6 \end{cases}$$



Η διαδικασία έχει απορροφητική κατάσταση την 6, ενώ οι 1,..,5 είναι παροδικές. Ο αναμενόμενος αριθμός ρίψεων είναι ίσος με τον αναμενόμενο χρόνο πρώτης μετάβασης από την 0 στην 6, f_{06}.
Έστω f_{i6} ο αναμ. χρόνος πρώτης μετάβασης από $i \to 6$.
Με ανάλυση πρώτου βήματος προκύπτει:

$$f_{56} = 1 + \frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{5}{6}\cdot f_{56} \Rightarrow f_{56} = 6$$

$$f_{46} = 1 + \frac{4}{6}\cdot f_{46} + \frac{2}{6}\cdot f_{56} = 3 + \frac{4}{6}\cdot f_{46} \Rightarrow f_{46} = 9$$

$$f_{36} = 1 + \frac{3}{6} f_{36} + \frac{3}{6}\cdot f_{46} = \frac{11}{2} + \frac{1}{2} f_{36} \Rightarrow f_{36} = 11$$

$$f_{26} = 1 + \frac{2}{6} f_{26} + \frac{4}{6} f_{36} = \frac{25}{3} + \frac{1}{3} f_{26} \Rightarrow f_{26} = \frac{25}{2} = 12.5$$

$$f_{16} = 1 + \frac{1}{6} f_{16} + \frac{5}{6} f_{26} = \frac{137}{12} + \frac{1}{6} f_{16} \Rightarrow f_{16} = \frac{137}{10} = 13.7$$

$$f_{06} = 1 + f_{16} = 14.7$$

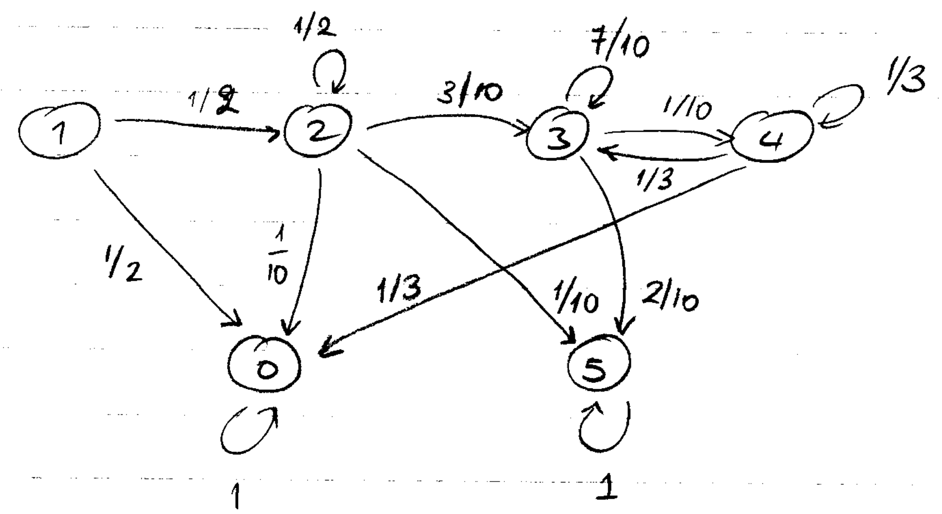
Επομένως ο αναμενόμενος αριθμός ρίψεων από την αρχή του παιχνιδιού έως όσου εμφανιστούν όλες οι ενδείξεις είναι 14.7

Παρατηρήσεις

1. Υπολογίστε την ίδια ποσότητα χρησιμοποιώντας συλλογισμούς μόνο από Πιθανότητες, χωρίς μοντέλο Μαρκοβιανής αλυσίδας.

2. Πώς αλλάζει η μοντελοποίηση του προβλήματος όταν το ζάρι δεν είναι δίκαιο, αλλά ισχύει γενικά $P(\text{ένδειξη}=i) = p_i$, $p_1 + \dots + p_6 = 1$?

Άσκηση 8   Το διάγραμμα μεταβάσεων είναι



(a) Οι καταστάσεις 0 και 5 είναι απορροφητικές και οι 1, 2, 3, 4 παροδικές.

(b) Ζητείται η πιθανότητα απορρόφησης από την 2 στην 5 x_{25}
Έστω x_{i5} = P(απορρόφησης στην κατ 5 $| X_0 = i)$

$$x_{15} = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot x_{25}$$

$$x_{25} = \frac{1}{10}\cdot 0 + \frac{1}{10}\cdot 1 + \frac{1}{2}x_{25} + \frac{3}{10}x_{35}$$

$$x_{35} = \frac{2}{10}\cdot 1 + \frac{7}{10}\cdot x_{35} + \frac{1}{10}x_{45}$$

$$x_{45} = \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}x_{35} + \frac{1}{3}x_{45}$$

$\Rightarrow$

$$x_{15} = \frac{17}{50} = 0{,}34$$

$$x_{25} = \frac{17}{25} = 0{,}68$$

$$x_{35} = 4/5 = 0{,}80$$

$$x_{45} = 2/5 = 0{,}40$$

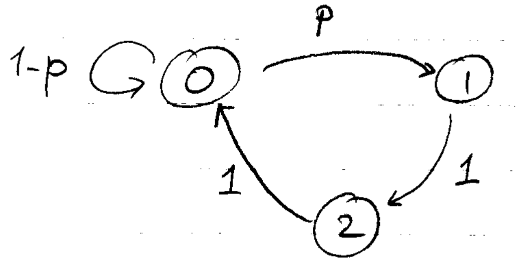
Επομένως ένας τηλεθεατής που βλέπει μόνο κρατικά κανάλια έχει 68% πιθανότητα να καταλήξει σε παθολογική εξάρτηση.

Άσκηση 9

(α) Στό τέλος μιάς μέρας το μηχάνημα μπορεί να βρίσκεται σε μια από τις εξής τρείς καταστάσεις:

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{λειτουργεί κανονικά} \\ 1 & \text{έχει πάθει βλάβη, δεν έχει αρχίσει η επισκευή} \\ 2 & \text{έχει γίνει η πρώτη μέρα επισκευής} \end{cases}$$

Το διάγραμμα μεταβάσεων είναι



$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(β) Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη, θετικά επαναληπτική κ' απεριοδική. Επομένως υπάρχει οριακή κατανομή κ' δίνεται από

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 = \pi_0 p \\ \pi_2 = \pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \pi_0 = \dfrac{1}{1+2p} \\ \pi_1 = \dfrac{p}{1+2p} \\ \pi_2 = \dfrac{p}{1+2p} \end{array}$$

(γ) Τα έσοδα (αμοιβές) R_{ij} για μεταβάσεις $X_n = i$, $X_{n+1} = j$ είναι

$$R_{00} = R, \quad R_{01} = \alpha R, \quad R_{12} = -C, \quad R_{20} = -C$$

Επομένως τα αναμενόμενα έσοδα της περιόδου n όταν $X_n = i$ είναι

$$r_0 = (1-p) R_{00} + p R_{01} = (1-p) R + p \alpha R$$

$$r_1 = r_2 = C$$

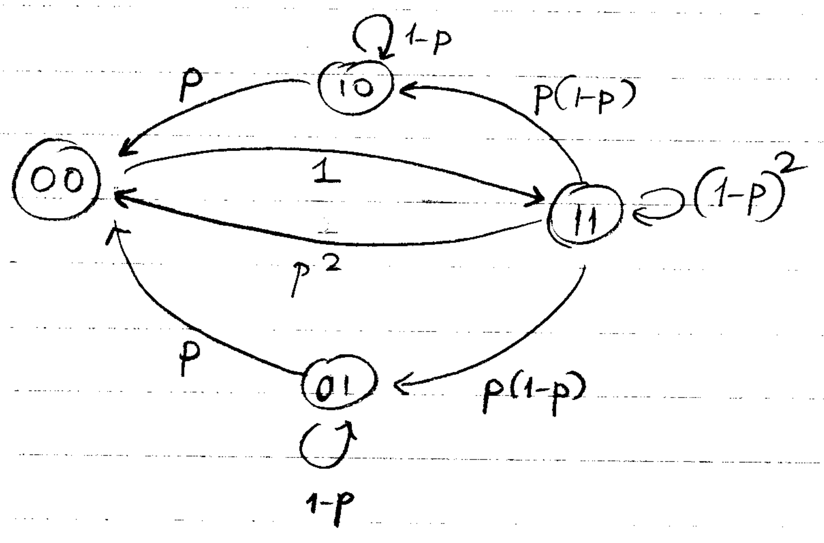
Το αναμενόμενο μέσο κέρδος ανά μονάδα χρόνου είναι ίσο με

$$\bar{r} = r_0\pi_0 + r_1\pi_1 + r_2\pi_2$$

$$= \frac{R\left[1-p+\alpha p\right] - 2Cp}{1+2p}$$

Άσκηση 10 (a) Έστω X_n = κατάσταση στο τέλος της μέρας n

όπου
$$X_n = \begin{cases} 00 & \text{, και τα δύο χαλασμένα} \\ 10 & \text{, το πρώτο λειτουργεί το δεύτερο χαλασμένο} \\ 01 & \text{, " " χαλασμένο " " λειτουργεί} \\ 11 & \text{, κ' τα δύο λειτουργούν} \end{cases}$$



$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} 00 \\ 10 \\ 01 \\ 11 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 \\ p^2 & p(1-p) & p(1-p) & (1-p)^2 \end{pmatrix}$$

(β) Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη, θετικά επαναληπτική και απεριοδική. Η οριακή κατανομή είναι:

$$\left.\begin{aligned}\pi_{00} &= p^2\pi_{11} + p\pi_{10} + p\pi_{01}\\ \pi_{10} &= p(1-p)\pi_{11} + (1-p)\pi_{10}\\ \pi_{01} &= p(1-p)\pi_{11} + (1-p)\pi_{01}\\ \pi_{00}+\pi_{10}+\pi_{01}+\pi_{11} &= 1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}\pi_{00} &= \frac{2p-p^2}{3-p^2}\\ \pi_{01} = \pi_{10} &= \frac{1-p}{3-p^2}\\ \pi_{11} &= \frac{1}{3-p^2}\end{aligned}$$

(γ) Τα έσοδα για κάθε μετάβαση είναι

$R_{00,11} = -C$ $\quad$ $R_{10,10} = R$ $\quad$ $R_{10,00} = \alpha R$

$R_{01,01} = R$ $\quad$ $R_{01,00} = \alpha R$

$R_{11,11} = 2R$ $\quad$ $R_{11,10} = R+\alpha R = (1+\alpha)R$ $\quad$ $R_{11,01} = (1+\alpha)R$ $\quad$ $R_{11,00} = \alpha R + \alpha R = 2\alpha R$

Επομένως $\quad r_{00} = -C$

$$r_{10} = (1-p)R + p\alpha R = R(1-p+\alpha p)$$

$$r_{01} = R(1-p+\alpha p)$$

$$r_{11} = (1-p)^2\cdot 2R + 2p(1-p)(1+\alpha)R + p^2\, 2\alpha R$$

$$= R\cdot\left[(1-p)^2 + 2p(1-p)(1+\alpha) + 2\alpha p^2\right] = R(1-p^2+2ap)$$

κ' το μέσο καθαρό κέρδος ανά μονάδα χρόνου

$$\bar{r} = r_{00}\pi_{00} + r_{10}\pi_{10} + r_{01}\pi_{01} + r_{11}\pi_{11} = \frac{-C(2p-p^2) + 2(1-p)R(1-p+\alpha p) + R(1-p^2+2\alpha p)}{3-p^2}$$

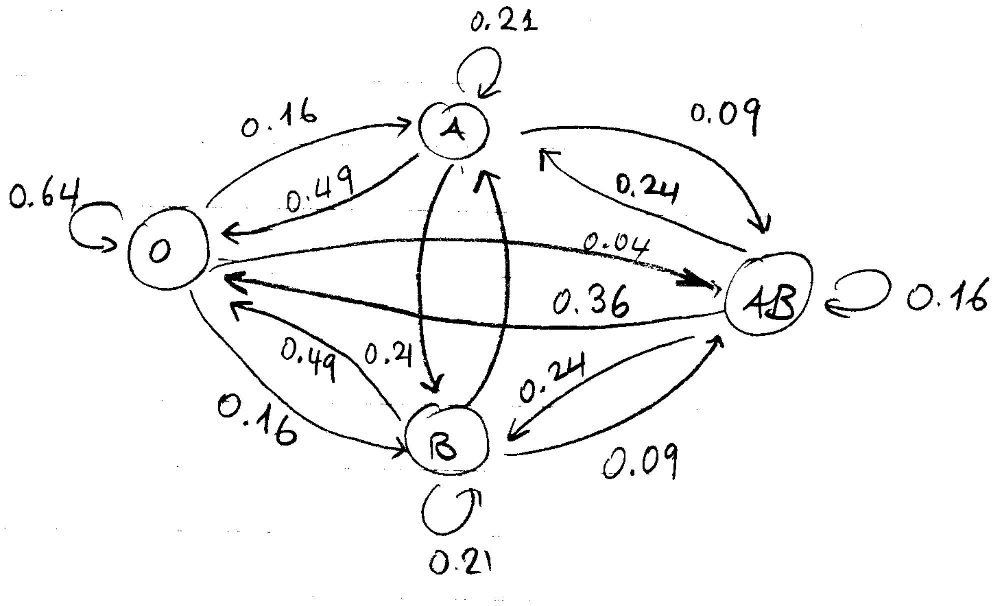
Άσκηση 11 Έστω X_n = κατάσταση στην αρχή της μέρας n.

Για τις πιθανότητες μετάβασης σκεφτόμαστε ως εξής:

Έστω $X_n = 0$, δηλ. καμιά περιοχή δεν έχει πυρκαγιά.
Τότε θα πάει ένα όχημα στην A κ' ένα στη B.
Στην A θα πιάσει φωτιά με πιθανότητα 0.2 ενώ δε θα πιάσει με πιθανότητα 0.8 κ' το ίδιο και στη B.
Επομένως στην αρχή της επόμενης μέρας η κατάσταση θα είναι

$$X_{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{με πιθ. } (0.8)^2 \quad \text{(καμμία πυρκαγιά)} \\ A & \text{" " } (0.8)(0.2) \quad \text{(πυρκαγιά μόνο στην A)} \\ B & \text{" " } (0.8)(0.2) \quad \text{(" " " B)} \\ AB & \text{" " } (0.2)^2 \quad \text{(δύο πυρκαγιές)} \end{cases}$$

Οι υπόλοιπες πιθανότητες μετάβασης υπολογίζονται με αντίστοιχο τρόπο και τελικά έχουμε



$$
\begin{array}{c|cccc}
 & O & A & B & AB \\
\hline
O & 0.64 & 0.16 & 0.16 & 0.04 \\
A & 0.49 & 0.21 & 0.21 & 0.09 \\
B & 0.49 & 0.21 & 0.21 & 0.09 \\
AB & 0.36 & 0.24 & 0.24 & 0.16
\end{array}
$$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.64 & 0.16 & 0.16 & 0.04 \\ 0.49 & 0.21 & 0.21 & 0.09 \\ 0.49 & 0.21 & 0.21 & 0.09 \\ 0.36 & 0.24 & 0.24 & 0.16 \end{pmatrix}$$

(b) Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη, θετικά επαναληπτική κ' απεριοδική.
Οριακή κατανομή

$$\left.\begin{array}{l}
\pi_0 = 0.64\,\pi_0 + 0.49\,\pi_A + 0.49\,\pi_B + 0.36\,\pi_{AB} \\
\pi_A = 0.16\,\pi_0 + 0.21\,\pi_A + 0.21\,\pi_B + 0.24\,\pi_{AB} \\
\pi_B = 0.16\,\pi_0 + 0.21\,\pi_A + 0.21\,\pi_B + 0.24\,\pi_{AB} \\
\pi_0 + \pi_A + \pi_B + \pi_{AB} = 1
\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \pi_0 = 0.57 \qquad \pi_1 = \pi_2 = 0.18 \qquad \pi_3 = 0.07$$

Έστω R_i ο αριθμός καμένων δέντρων στην κατάσταση i

$$R_0 = 0, \quad R_A = 100, \quad R_B = 100, \quad R_{AB} = 500 \ (= 250 + 250)$$

Επομένως ο μέσος αριθμός καμένων δέντρων ανά ημέρα είναι

$$\overline{R} = \pi_0 R_0 + \pi_A R_A + \pi_B R_B + \pi_{AB} R_{AB} = 69.9$$