



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικό και Καποδιστριακό  
Πανεπιστήμιο Αθηνών

---

## Τίτλος Μαθήματος

**Ενότητα:** Νεότερες θεωρητικές προσεγγίσεις: Σενάρια διδασκαλίας

Ζαχαρούλα Σμυρναίου

Σχολή Φιλοσοφίας

Τμήμα Παιδαγωγικής και Ψυχολογίας

---



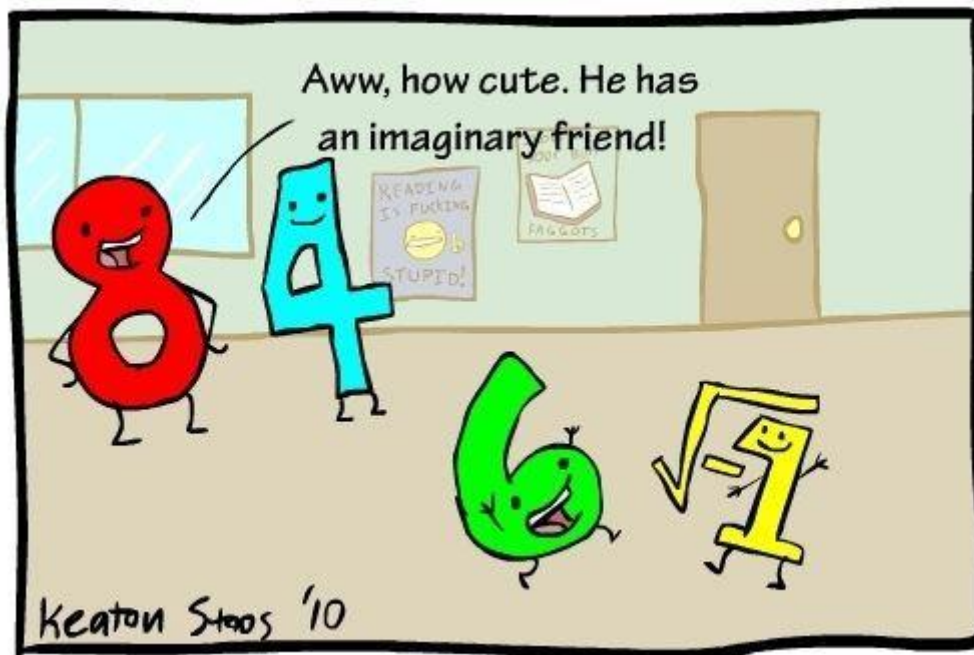
1. Εργασία στα Παιδαγωγικά .....	4
1.1 Τίτλος .....	4
1.1.1 Περιγραφή .....	4
1.1.2 Προαπαιτούμενες Γνώσεις.....	5
1.1.3 Δυσκολίες μαθητών .....	5
1.2 Στόχοι εκπαιδευτικής διαδικασίας .....	5
1.2.1 Γνωστικοί.....	5
1.2.2 Συναισθηματικοί .....	5
1.2.3 Ψυχοκινητικοί .....	6
1.3 Καινοτομίες στην εκπαιδευτική διαδικασία .....	6
1.4 Θεωρία-Μέθοδος μάθησης .....	7
1.5 Πορεία δραστηριοτήτων.....	7
1.6 Φύλλα εργασίας.....	8
2. Βιβλιογραφία.....	14
3. Ηλεκτρονικές πηγές .....	14

## 1. Εργασία στα Παιδαγωγικά

- Καθηγήτρια: Ζαχαρούλα Γ. Σμυρναίου
- Σχολή: Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο
- Τμήμα: Μαθηματικό
- Ονοματεπώνυμα: Ηλιάδη Δανάη Ζωή (Α.Μ. 1112201300064)  
Παπαδημητρίου Στεφανία (Α.Μ. 1112201300207)  
Τραχανά Δήμητρα (Α.Μ. 1112201300282)

### 1.1 Τίτλος

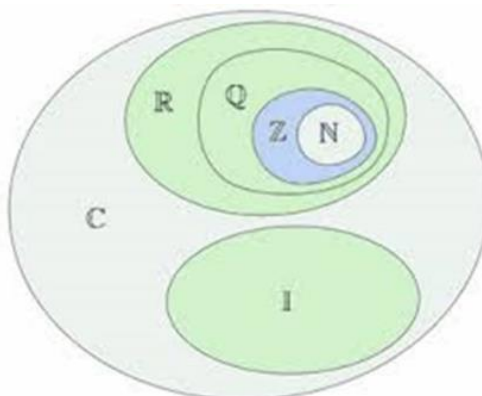
Η έννοια των Μιγαδικών αριθμών



#### 1.1.1 Περιγραφή

Οι μιγαδικοί αριθμοί αποτελούν ένα νέο στοιχείο των μαθηματικών, το οποίο οι μαθητές της θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης καλούνται να αντιμετωπίσουν κατά την τελευταία τάξη του λυκείου. Η ενότητα αυτή αναφέρεται στο μιγαδικό σύνολο, ως συνδυασμό του ήδη γνωστού συνόλου των πραγματικών αριθμών με αυτό των φανταστικών. Γίνεται εισαγωγή της έννοιας του στοιχείου  $i$  και των ιδιοτήτων του καθώς και της μοναδικότητας του τρόπου γραφής των αριθμών του μιγαδικού συνόλου. Στην συνέχεια, ασχολούμαστε με τις πράξεις στο σύνολο  $C$ , τη γεωμετρική απεικόνιση και την επίλυση σχετικών ζητημάτων.

Ό συντομότερος δρόμος ανάμεσα σε δύο αλήθειες στο πεδίο των πραγματικών περνά μέσα από το πεδίο των μιγαδικών, J.Hadamard



### 1.1.2 Προαπαιτούμενες Γνώσεις

Για να μπορέσουν οι μαθητές να αντεπεξέλθουν στις απαιτήσεις της νέας αυτής ενότητας είναι απαραίτητο να έχουν γνώση εννοιών και ασκήσεων κυρίως από τα δυο προηγούμενα σχολικά έτη. Πιο συγκεκριμένα, από την ύλη της Άλγεβρας που διδάσκεται στην Α΄ Λυκείου θα πρέπει να είναι σε θέση να χειρίζονται ανισοτικές σχέσεις και ασκήσεις με απόλυτες τιμές. Επιπλέον, είναι απαραίτητο να γνωρίζουν τις βασικές ταυτότητες και τον τρόπο επίλυσης οποιουδήποτε τριωνύμου. Με αυτόν τον τρόπο δε θα αντιμετωπίσουν δυσκολία σε ασκήσεις που πραγματεύονται τα παραπάνω στο μιγαδικό επίπεδο. Παράλληλα, είναι καλό να έχουν γνώση της τριγωνικής ανισότητας.

Όσον αφορά στην ύλη της Β΄ Λυκείου είναι σημαντική η αφομοίωση των συνθηκών παραλληλίας και καθετότητας διανυσμάτων και ευθειών, καθώς και οι ορισμοί και βασικές εξισώσεις κωνικών τομών.

### 1.1.3 Δυσκολίες μαθητών

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι οι μιγαδικοί αριθμοί αποτελούν μια άγνωστη έννοια για τους μαθητές. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται πλήθος δυσκολιών από μεριάς των μαθητών, όπως συμβαίνει άλλωστε με κάθε νέα διδακτική ενότητα, ιδιαίτερα κατά την πρώτη επαφή με αυτή.

Αρχικά, οι μαθητές δυσκολεύονται κατά την εισαγωγή στο μιγαδικό σύνολο. Έχοντας μάθει κατά τα προηγούμενα χρόνια να δουλεύουν αποκλειστικά με το σύνολο των πραγματικών αριθμών και τα υποσύνολά του, τους είναι ιδιαίτερα δύσκολο να κατανοήσουν την διεύρυνση του συνόλου σε ένα μεγαλύτερο, αυτό των μιγαδικών αριθμών. Επιπλέον, οι ιδιότητες του συνόλου  $\mathbb{C}$ , όπως η μη ύπαρξη διάταξης μεταξύ των αριθμών, κάνουν τα πράγματα να φαντάζουν ακόμα πιο δυσνόητα.

Στην συνέχεια, το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών δυσκολεύεται να κατανοήσει το φανταστικό στοιχείο  $i$  και τις ιδιότητές του. Έχοντας μάθει στις προηγούμενες τάξεις ότι το τετράγωνο ενός πραγματικού αριθμού είναι πάντα θετικός αριθμός, φαντάζει αδύνατο στους μαθητές πως ένα στοιχείο υψωμένο στην δεύτερη δύναμη δίνει αποτέλεσμα υπό του μηδενός. Η κατάσταση περιπλέκεται όταν χρειάζεται να υπολογίσουν αριθμητικές παραστάσεις που περιλαμβάνουν εξαιρετικά μεγάλες δυνάμεις του  $i$ .

Επιπρόσθετα, οι μαθητές παρουσιάζουν αυξημένη δυσκολία στην επίλυση εξισώσεων στο μιγαδικό επίπεδο, αφού έρχονται αντιμέτωποι με αρνητική διακρίνουσα. Πρέπει ακόμα να κατανοήσουν, αναλόγως με την εκφώνηση της άσκησης, ποιες από τις ρίζες που βρίσκουν είναι αποδεκτές σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης (για παράδειγμα, ζητείται να λυθεί η εξίσωση στο σύνολο των πραγματικών ή των μιγαδικών αριθμών;).

Τέλος, το μεγαλύτερο μέρος της τάξης παρουσιάζει δυσκολίες με την απεικόνιση των μιγαδικών αριθμών στο επίπεδο καθώς και με τους γεωμετρικούς χώρους. Δυσκολεύονται να κατανοήσουν την έννοια της κίνησης ενός μιγαδικού αριθμού στον δοσμένο γεωμετρικό χώρο. Όταν μάλιστα τέτοιου είδους δραστηριότητες συνδυάζονται με απόλυτες τιμές, το επίπεδο δυσκολίας αυξάνεται ακόμα περισσότερο για τους μαθητές.

Κρίνεται, λοιπόν, αναγκαίο να εισάγουμε τη νέα διδακτική ενότητα με τον βέλτιστο δυνατό τρόπο, ώστε οι μαθητές, από την πρώτη κιόλας επαφή τους με το αντικείμενο, να κατανοήσουν τις βασικές έννοιες και στη συνέχεια να εμβαθύνουν στο κεφάλαιο έχοντας στέρεες βάσεις.

## 1.2 Στόχοι εκπαιδευτικής διαδικασίας

### 1.2.1 Γνωστικοί

Μετά το πέρας της εφαρμογής του συγκεκριμένου σχεδίου διδασκαλίας, οι μαθητές θα έχουν κατανοήσει τις βασικές έννοιες των μιγαδικών αριθμών χωρίς να δυσκολεύονται στην εκτέλεση πράξεων και την επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος. Ακόμα, θα είναι σε θέση να αντιληφθούν αποτελεσματικότερα την απεικόνιση ενός αριθμού στο επίπεδο και την έννοια των γεωμετρικών τόπων.

### 1.2.2 Συναισθηματικοί

Μέσω της ομαδικής εργασίας οι μαθητές θα μπορέσουν να κατανοήσουν την πραγματική αξία της συνεργασίας με τους συμμαθητές τους. Αποστρέφονται την εγωκεντρική συμπεριφορά και μαθαίνουν

να δρουν ως μέλη μιας ομάδας. Ανακαλύπτουν ,δηλαδή, πως όταν τα άτομα συνεργάζονται αρμονικά για έναν κοινό στόχο, μπορούν να καταφέρουν σπουδαία αποτελέσματα. Επιπλέον, οι μαθητές, μέσα από έρευνα και σχετική εργασία, θα έχουν την απαραίτητη ωριμότητα να αντιληφθούν την εφαρμογή των μιγαδικών αριθμών στην καθημερινότητα. Ως καθηγητές, καθοδηγούμε τους εκπαιδευόμενους στην αντιμετώπιση των μιγαδικών αριθμών ως απαραίτητο υπόβαθρο για την αντιμετώπιση ζητημάτων της οπτικής, της κβαντομηχανικής και άλλων τομέων.

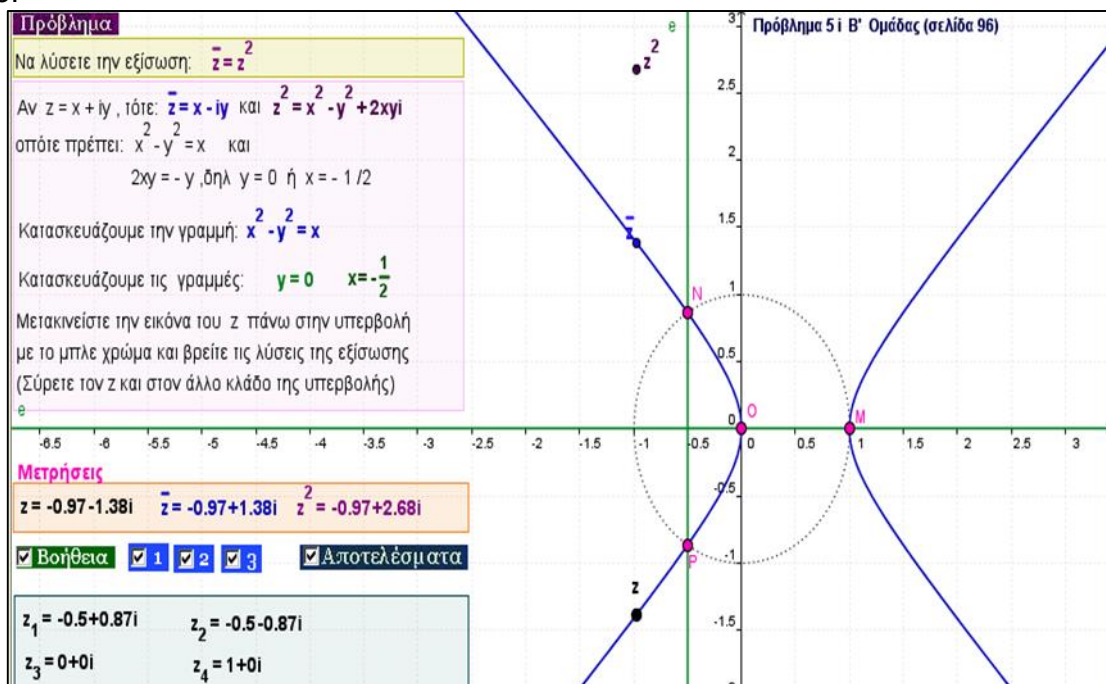
### 1.2.3 Ψυχοκινητικοί

Η τάξη, στο σύνολο της, θα έχει την δυνατότητα να απεικονίζει τους γεωμετρικούς τόπους, στους οποίους ανήκουν οι μιγαδικοί αριθμοί, που συναντούνται σε διάφορες δραστηριότητες και να τους μελετά. Επιπρόσθετα, οι μαθητές θα χειρίζονται με ιδιαίτερη ευκολία μαθηματικό λογισμικό, ως επιπλέον μέσα διδασκαλίας για την απεικόνιση των γεωμετρικών τόπων.

## 1.3 Καινοτομίες στην εκπαιδευτική διαδικασία

Κύριος στόχος της εκπαιδευτικής διαδικασίας είναι η εξοικείωση των μαθητών με την καινούρια διδακτική ενότητα και η κατανόηση αυτής, με τον βέλτιστο δυνατό τρόπο. Για να επιτευχθεί αυτό, είναι ανάγκη να εφαρμοστεί μια σειρά καινοτόμων μεθόδων, που θα κεντρίσουν το ενδιαφέρον των μαθητών, ώστε να συμμετέχουν ενεργά στην διδασκαλία την έννοιας.

Ζώντας στην εποχή της τεχνολογίας, δε θα μπορούσαμε να μην εκμεταλλευτούμε τις άπειρες δυνατότητες του διαδικτυακού χώρου και των υπολογιστών. Κάνοντας μια μικρή έρευνα στο διαδίκτυο, εύκολα συνειδητοποιούμε ότι υπάρχει μεγάλη συλλογή προγραμμάτων και ιστοσελίδων που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν στη διδασκαλία των μαθηματικών. Συνεπώς, ορισμένες από τις διαθέσιμες διδακτικές ώρες, θα γίνουν στο εργαστήριο ηλεκτρονικών υπολογιστών, όπου θα ασχοληθούμε με κατάλληλο μαθηματικό λογισμικό, όπως το GeoGebra. Χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα αυτό, οι μαθητές θα αντιληφθούν καλύτερα την απεικόνιση των μιγαδικών αριθμών στο επίπεδο.



Επιπλέον, μέσω της γεωμετρικής απεικόνισης, θα ανταποκρίνονται ευκολότερα σε εφαρμογές των μιγαδικών αριθμών που συνδυάζουν γεωμετρικούς τόπους. Ως καθηγητές, λοιπόν, μιας νέας εποχής, οδηγούμε τους μαθητές μας στην ορθή χρήση των τεχνολογιών, ώστε να έχουν θετικό αντίκτυπο στις γνώσεις και της μαθησιακές τους ικανότητες.

Ακόμα, μπορούμε να χωρίσουμε τους μαθητές σε ομάδες (τριών ή τεσσάρων ατόμων), καθεμία από τις οποίες θα περιλαμβάνει μαθητές και των δύο φύλων, που ανήκουν σε διαφορετικά γνωστικά επίπεδα. Στη συνέχεια, συνεργαζόμενοι θα προσπαθήσουν να απαντήσουν σωστά στο φύλλο εργασίας που θα τους δοθεί. Με τον τρόπο αυτό ξεκινά ένα «παιχνίδι» ανταλλαγής απόψεων, συνεργασίας και επισήμανσης λαθών μεταξύ των μελών, μέσα από το οποίο ο μαθητής διδάσκεται

την αξία της ομαδικής εργασίας. Σύμφωνα, μάλιστα, με την θεωρία του Λευκορώσου ψυχολόγου, Vygotsky, κάθε μαθητής αλληλεπιδρόμενος με τους συνομήλικους του, μπορεί να οδηγηθεί σε ένα γνωστικό επίπεδο, ανώτερο αυτού που από μόνος του κατέχει.

Επιπλέον, είναι γνωστή η επιθυμία των μαθητών να συμμετέχουν σε ένα μάθημα διασκεδαστικό και ευχάριστο. Για τον λόγο αυτό, για την εισαγωγή τόσο των βασικών όσο και των εξεζητημένων εννοιών του κεφαλαίου (όπως η ύπαρξη του φανταστικού αριθμού  $i$ ), θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν μονοσέλιδα κόμικς όπως το ακόλουθο

#### 1.4 Θεωρία-Μέθοδος μάθησης

Για να στεφθεί με επιτυχία η εφαρμογή του συγκεκριμένου σεναρίου, είναι ανάγκη να ο μαθητής να διαδραματίζει ενεργητικό ρόλο κατά τη διδασκαλία της εν λόγω ενότητας. Συνεπώς η μέθοδος μάθησης που χρησιμοποιείται είναι αυτή του οικοδομισμού (constructivism). Η διδασκαλία οργανώνεται θέτοντας στο κέντρο της τον ίδιο το μαθητή και προσπαθώντας να οικοδομήσουμε νέα γνώση, στηριζόμενοι στην ήδη υπάρχουσα. Ο ρόλος του διδάσκοντα είναι υποβοηθητικός και εμπνευστικός στο πλαίσιο της επικείμενης ανάπτυξης. Βάσει της θεωρίας αυτής, λοιπόν, η εκπαίδευση πρέπει να έχει ως κύριο σκοπό να βοηθήσει τους μαθητές να γεφυρώσουν το χάσμα ανάμεσα στις άτυπες και τις τυπικές γνώσεις τους.

Το παρόν σχέδιο διδασκαλίας στηρίζεται επιπλέον και στην ανακαλυπτική μέθοδο του Bruner. Σύμφωνα με τον Αμερικανό ψυχολόγο, μετά την σωστή καθοδήγηση από τον εκπαιδευτικό, οι μαθητές θα είναι σε θέση να ανακαλύψουν μόνοι τους καινούριες έννοιες. Με τον τρόπο αυτό, οι μαθητές αφομοιώνουν ευκολότερα και για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα το αντικείμενο που διδάσκονται, γεγονός που τους επιτρέπει να επεκταθούν σε άλλα θέματα, μέσα από προσωπική εργασία και έρευνα, συνδυάζοντας ορθά τις γνώσεις και τις ιδέες τους. Η συγκίνηση της μάθησης είναι ουσιαστικά η ανταμοιβή και η κινητήριος δύναμη για την δημιουργική εργασία του μαθητή. Επιπλέον, είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθεί και η μαιευτική μέθοδος του Σωκράτη. Σύμφωνα με αυτή, ο καθηγητής δεν πρέπει να διαδραματίζει τον ρόλο ενός παθητικού φορέα γνώσεων, που 'βομβαρδίζει' τους μαθητές με καινούριες, δυσνόητες έννοιες. Είναι ανάγκη να οδηγήσει τους μαθητές στην ανακάλυψη της καινούριας γνώσης, θέτοντας τους τα κατάλληλα ερωτήματα. Ο εκπαιδευτικός, λοιπόν πρέπει να λειτουργεί ως διάλογος μεταξύ μαθητών και μάθησης.

#### 1.5 Πορεία δραστηριοτήτων

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, για να μπορέσουν οι μαθητές να ανταποκριθούν με επιτυχία στο κεφάλαιο των μιγαδικών αριθμών θα πρέπει να έχουν βασικές αλγεβρικές και γεωμετρικές γνώσεις, κυρίως από τις δύο προηγούμενες λυκειακές τάξεις.

Αρχικά, λοιπόν, θα γίνει μια σύντομη επανάληψη στην ύλη των προηγούμενων τάξεων (επίλυση τριωνύμου, ανισοτικές σχέσεις, απόλυτη τιμή). Με τον τρόπο αυτό, θα προετοιμάσουμε το σύνολο των τελειόφοιτων για τις νέες γνώσεις που θα λάβει, ενώ παράλληλα θα ελέγξουμε το γνωστικό επίπεδο των παιδιών, γεγονός που θα μας βοηθήσει στον μετέπειτα διαχωρισμό των μαθητών σε ομάδες. Μετά το πέρας της επανάληψης, θα εξετάσουμε το μιγαδικό σύνολο, ως επέκταση αυτού των πραγματικών αριθμών. Θα συζητήσουμε σχετικά με το σύνολο των πραγματικών αριθμών και, αφού υποδείξουμε τα χαρακτηριστικά του μιγαδικού συνόλου, θα οδηγήσουμε τους μαθητές στην διατύπωση του ακριβή ορισμού.

Επιπλέον, θα εισάγουμε το φανταστικό στοιχείο  $i$  ( $i^2 = -1$ ) του συνόλου  $C$  και τις ιδιότητες που το διέπουν. Θα αναθέσουμε στους μαθητές να βρουν την τιμή των τεσσάρων πρώτων δυνάμεων του  $i$ , χρησιμοποιώντας τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις τους πάνω στις δυνάμεις των αριθμών, και μέσω παραδειγμάτων θα βεβαιωθούν ότι είναι σε θέση να υπολογίζουν οποιαδήποτε δύναμη του φανταστικού στοιχείου. Στη συνέχεια, θα εισάγουμε την έννοια του μέτρου μιγαδικού αριθμού. Με αυτόν τον τρόπο, ο μαθητής θα λύσει ασκήσεις αυξημένης δυσκολίας που θα περιλαμβάνουν γεωμετρικούς τόπους χρησιμοποιώντας κριτική σκέψη και συνδυαστική ικανότητα. Τέλος, όταν πια το επίπεδό του θα είναι υψηλό θα μπορέσει, μέσα από τη χρήση προγραμμάτων και εφαρμογών να ελέγξει και ο ίδιος τα προβλήματα που θα επιλύει, ενώ θα μελετά σε βάθος το κεφάλαιο.

## 1.6 Φύλλα εργασίας

# ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

### ΘΕΩΡΙΑ:

Να επιλέξετε την σωστή από τις απαντήσεις που δίνονται στις παρακάτω ερωτήσεις

A. Αν  $|z+3-4i|=2$  θα ισχύει

1. Το  $z$  είναι οπωσδήποτε φανταστικός
2. Το  $z$  ανήκει σε κύκλο με κέντρο  $K(3, -4)$  και ακτίνα  $\rho=2$
3. Το  $z$  ανήκει σε κύκλο με κέντρο  $K(-3, 4)$  και ακτίνα  $\rho=4$
4. Το  $z$  ανήκει σε κύκλο με κέντρο  $K(-3, 4)$  και ακτίνα  $\rho=2$
5. Το  $z$  ανήκει σε κύκλο με κέντρο  $K(3, 4)$  και ακτίνα  $\rho=2$

B. Το  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1821}$  ισούται με

- 1)  $1+i$     2)  $1-i$     3)  $i$     4)  $2$     5)  $-2$

### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1 η

Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

- $i^3 + i^{13} + i^{23} + i^{33} + i^{43}$
- $(16-i^4) + (i^2+3)^2 - i^{27}$

### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2 η

Να λύσετε στο μιγαδικό επίπεδο την παρακάτω εξίσωση:

$$2z^2 - 6z + 8 = -4i^2$$

### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3 η

Δίνονται οι μιγαδικοί  $z_1, z_2, z_3, z_4$  με  $z_3 z_4 \neq 0$  και  $|z_3|^2 + |z_4|^2 \leq 1$

Να αποδείξετε ότι:

$$\left|\frac{z_1}{z_3}\right|^2 + \left|\frac{z_2}{z_4}\right|^2 \geq |z_1 + z_2|^2$$



**ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4<sup>η</sup>**

A. Αν  $|z|=1$  να αποδειχτεί ότι  $\left| \frac{z-\bar{w}}{1-zw} \right| = 1$

B. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z = x + yi$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  και  $w = \frac{z+3i}{z+3}$

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $z$  για τα οποία ο  $w$  είναι φανταστικός αριθμός .

## ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

### Θέμα 1<sup>ο</sup>

Δίνονται τα σύνολα :

$$A = \{z \in \mathbb{C} / |z|=1\} \text{ και } B = \left\{ w \in \mathbb{C} / w = z + \frac{2}{z}, z \in A \right\}$$

- α) Να εκφράσετε γεωμετρικά το σύνολο A
- β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης  $K = |z_1 - z_2|$ , με  $z_1, z_2 \in A$
- γ) Αν  $z_1, z_2 \in A$  με  $|z_1 - z_2| = 2$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης  $N = |z_1 + z_2 - 2012i|$
- δ) Να αποδείξετε ότι το σύνολο B αποτελείται από σημεία του μιγαδικού επιπέδου που βρίσκονται σε μια έλλειψη και να βρείτε τη μέγιστη τιμή του  $|z - w|$ , όπου  $z \in A$ .

### Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $a, b, c$  με  $|a|=|b|=|c|=\rho>0$  και  $a+b=c$ . Να αποδείξετε ότι :

- α)  $a \neq b$  και  $a \neq c$
- β)  $a^2 + ab + b^2 = 0$  και  $a^3 = b^3$ .
- γ) Ο αριθμός  $\frac{a}{b}$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $\zeta^2 + \zeta + 1 = 0$ , την οποία και να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.
- δ)  $a^{2012} + b^{2012} + c^{2012} = 0$ .
- ε) Αν A, C, B, O είναι αντίστοιχα οι εικόνες των μιγαδικών  $a, c, b, 0$  να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο ACBO είναι ρόμβος, του οποίου να υπολογιστούν οι γωνίες.

### Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2, z_3$  με  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$ .

- α). Να αποδείξετε ότι:  $\bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}$

β). Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$  είναι πραγματικός .

γ). Να αποδείξετε  $|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{1}{3} |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3|$

#### Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z = \alpha + \beta i$ , όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και  $w = 3z - i\bar{z} + 4$ , όπου  $\bar{z}$  είναι ο συζυγής του  $z$ .

α). Να αποδείξετε ότι

$$\operatorname{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4 \quad \text{και} \quad \operatorname{Im}(w) = 3\beta - \alpha.$$

β). Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του  $w$  στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση  $y = x - 12$ , τότε οι εικόνες του  $z$  κινούνται στην ευθεία με εξίσωση  $y = x - 2$ .

γ). Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$ , οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση  $y = x - 2$ , έχει το ελάχιστο μέτρο.

#### Θέμα 5<sup>ο</sup>

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z = \alpha + \beta i$  και  $w = \frac{2 - \bar{z}}{2 + \bar{z}}$ , όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

με  $\beta \neq 0$ . Δίνεται επίσης ότι  $w - z \in \mathbb{R}$ .

α). Να αποδειχθεί ότι  $w - z = 1$ .

β). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του  $z$  στο μιγαδικό επίπεδο.

γ). Αν ο αριθμός  $z^2$  είναι φανταστικός και  $\alpha\beta > 0$ , να υπολογισθεί ο  $z$  και να

$$\text{αποδειχθεί ότι } (z + 1 + i)^{20} - (\bar{z} + 1 - i)^{20} = 0.$$

#### Θέμα 6<sup>ο</sup>

Δίνονται οι διαφορετικοί μεταξύ τους μιγαδικοί αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  που έχουν ίσα μέτρα και

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

Να αποδείξετε ότι

α)  $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$

β)  $\alpha^3 = \beta^3 = \gamma^3$

γ) Οι εικόνες των αριθμών  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου

δ) Οι εικόνες των αριθμών  $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$  είναι επίσης κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

# ΦΥΛΛΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

## Θέμα Α

A1. (α) Πώς εκφράζεται η απόσταση των εικόνων δύο μιγαδικών στο μιγαδικό επίπεδο;  
Μονάδες 4 (β) Τι ονομάζεται μέτρο ενός μιγαδικού και με τι ισούται;

Μονάδες 6

A2. Έστω  $z_1, z_2$  δύο μιγαδικοί αριθμοί. Να αποδειχθεί ότι

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Μονάδες 7

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος

1. Αν η εξίσωση  $az^2 + bz + c = 0$  με  $a, b, c \in \mathbb{C}$  έχει ρίζα τον αριθμό  $3 - 2i$  τότε έχει και τον  $\frac{13}{3 - 2i}$
2. Αν ένας μιγαδικός αριθμός δεν είναι φανταστικός τότε ούτε το τετράγωνό του θα είναι φανταστικός αριθμός
3. Ισχύει  $|z_1 - z_2|^2 = z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2$

Μονάδες 8

## Θέμα Β

B1. Να λυθούν στο μιγαδικό επίπεδο οι παρακάτω εξισώσεις:

1.  $|z| + z = 2 + i^{43}$
2.  $z + |z + 3 + i| = 6 - 2i$
3.  $(z^2 + 1)^2 + z^3 + z = 0$

B2. Αν  $|z + 3| = 2|z - 3|$

1. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του  $z$

Μονάδες 7

2. Αν  $w = \frac{z - 9}{z - 5}$  να βρεθεί ο Γ.Τ των εικόνων του  $w$  αν  $w \in \mathbb{C}$

**Θέμα Γ**

Έστω σημείο  $A(1,0)$  του μιγαδικού επιπέδου και μιγαδικοί αριθμοί  $z$  για τους οποίους ισχύει:

$$z^2 + \bar{z}^2 - 2z\bar{z} + 8(z + \bar{z}) = 0$$

1. Να βρεθεί ο γεωμετρικό τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$

Μονάδες 10

2. Να υπολογιστεί η ελάχιστη απόσταση των αριθμών  $z$  από το σημείο  $A$

Μονάδες 10

**Θέμα Δ**

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός  $z$  για τον οποίο ισχύει η σχέση

$$|z - 2i| = |2iz + 1| \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

1. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του  $z$

Μονάδες 5

2. Να αποδείξετε ότι  $m = \frac{z^5 + 1}{z^5 - 1} \in I$

Μονάδες 5

3. Να αποδείξετε ότι  $\operatorname{Im} z \in [-1, 1]$

Μονάδες 5

4. Να αποδείξετε ότι  $|z - \frac{1}{z} - 2i| + |z - \frac{1}{z} + 2i| = 4$

Μονάδες 7

5. Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού όταν  $w \in \mathbb{C}, z\bar{w} \neq -1$

Μονάδες 8

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:**

Να απαντηθούν όλα τα παραπάνω θέματα.

## 2. Βιβλιογραφία

- Η θεωρία του κονστρουκτιβισμού και τα μαθηματικά, Τζελέπης Χαράλαμπος
- Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων
- «Η ανακαλυπτική μάθηση», εφημερίδα Ταχυδρόμος

## 3. Ηλεκτρονικές πηγές

<http://icteduc.wikispaces.com>

[www.mathematica.gr](http://www.mathematica.gr)

# Σημειώματα

## Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Ζαχαρούλα Σμυρναίου.  
«Παιδαγωγικά, Νεότερες θεωρητικές προσεγγίσεις: Σενάρια διδασκαλίας, Σχεδιάζοντας ένα εκπαιδευτικό σενάριο για τις φυσικές επιστήμες, Μιγαδικοί Αριθμοί». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014.  
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: σύνδεσμο μαθήματος.

## Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

## Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

## Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

### Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

Εικόνα 1. “Imaginary friends” by Keaton Stoos '10. Copyrighted. Πηγή:

<https://plus.google.com/communities/100568607954673744130/stream/0c69a7a4-3f0d-4732-a4f5-37e383291f8d>

Εικόνα 2. Set Theory Menu. Copyright © 2014 MathsIsFun.com. Πηγή:

<http://www.mathsisfun.com/sets/>



## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

