



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Υπολογιστική άλγεβρα

Ενότητα 13: Βάσεις Groebner και Ρομποτική

Ράπτης Ευάγγελος

Σχολή Θετικών επιστημών

Τμήμα Μαθηματικών

Κεφάλαιο 13

Βάσεις Groebner και Ρομποτική

Τετάρτη 11 Ιουνίου 2014

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε επίπεδα ρομπότ για να κατανοήσουμε τις μαθηματικές ιδέες που απαιτούνται για τη λειτουργία τους.

Για ευρύτερη μελέτη μπορεί κανείς να δει εδώ και επίσης στο βιβλίο εδώ σελίδα 261. Στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν επίπεδα ρομπότ και έτσι θεωρούμε ουσιαστικά την προβολή ενός τρισδιάστατου ρομπότ επί ενός επιπέδου.

Ένα ρομπότ, λοιπόν, θα είναι ένα σύνολο βραχιόνων, οι οποίοι συνδέονται με αρθρώσεις. Θα θεωρούμε ότι οι βραχιόνες έχουν σταθερό μήκος και οι αρθρώσεις αφήνουν τους βραχιόνες να περιστραφούν πλήρως.

Για να φανεί η μέθοδος μελέτης θα περιγράψουμε ένα παράδειγμα

Παράδειγμα 13.0.1. Να μελετηθεί ένα επίπεδο ρομπότ με ένα σταθερό βραχίονα και δύο μετακινούμενους.

Το μήκος του σταθερού βραχίονα είναι α_0 . Το μήκος του πρώτου κινητού βραχίονα είναι α_1 και του δεύτερου α_2 . Σε κάθε άρθρωση θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων. Έτσι έχουμε ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων στον αρχικό βραχίονα (στην σταθερή άρθρωση) και ένα σύστημα συντεταγμένων σε κάθε άλλη άρθρωση. Σύστημα συντεταγμένων σημαίνει δύο άξονες. Σε κάθε άρθρωση ο ένας άξονας είναι ο άξονας που προσδιορίζει ο προηγούμενος βραχίονας και ο άλλος ο κάθετος. Σε αθε άρθρωση έχουμε και μία γωνία, η οποία είναι η γωνία που πρέπει να περιστραφεί ο προηγούμενος βραχίονας με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού για να συμπίσει στον επόμενο βραχίονα. Δες και τα σχήματα παρακάτω.

Μπορείτε επίσης να δείτε τα σχήματα:
εδώ

και
εδώ

Δείτε επίσης στην σελίδα του μαθήματος τις συνδέσεις *robot1* και *robot2*

Εδώ¹ μας ενδιαφέρει η θέση του τελευταίου σημείου (χεριού). Είναι γεγονός επίσης ότι η διαφορετική κατασκευή του άκρου απαιτεί από ένα μαθηματικό να λύσει ενδεχομένως διαφορετικές εξισώσεις. Για να προσδιορίσουμε τη θέση του ακραίου σημείου, αρκεί να βρούμε τις συντεταγμένες ως προς το σταθερό σύστημα συντεταγμένων. Αν λοιπόν έχουμε δύο κινητούς βραχίονες έχουμε ότι η προβολή στον οριζόντιο άξονα είναι

$$x_0 = \alpha_1 \cdot \sigma\upsilon\nu(\theta_1) + \alpha_2 \cdot \sigma\upsilon\nu(\theta_1 + \theta_2)$$

Ομοίως στον κάθετο άξονα του σταθερού συστήματος συντεταγμένων έχουμε:

$$y_0 = \alpha_1 \cdot \eta\mu(\theta_1) + \alpha_2 \cdot \eta\mu(\theta_1 + \theta_2)$$

Δύο είναι τα προβλήματα που φυσιολογικά εμφανίζονται

1. Το ευθύ κινηματικό πρόβλημα

Το πρόβλημα αυτό διατυπώνεται ως εξής: Δεδομένου του ρομπότ (δηλαδή των βραχιόνων, αρθρώσεων κλπ) και επίσης δεδομένων των συντεταγμένων (x_0, y_0) να βρεθεί αν το χέρι, φτάνει στο σημείο αυτό και με πόσους τρόπους. Αυτό είναι ισοδύναμο αν το σύστημα

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha_1 \cdot \sigma\upsilon\nu(\theta_1) + \alpha_2 \cdot \sigma\upsilon\nu(\theta_1 + \theta_2) \\ y_0 &= \alpha_1 \cdot \eta\mu(\theta_1) + \alpha_2 \cdot \eta\mu(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

έχει λύσεις και πόσες. Το πρόβλημα είναι όμως ότι στο σύστημα εμπλέκονται τριγωνομετρικές συναρτήσεις (οι οποίες **δεν** είναι πολυωνυμικές)². Μία πρόσθετη δυσκολία είναι ότι εμφανίζονται τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος. Για να αντιμετωπίσουμε τα παραπάνω εμπόδια εργαζόμαστε ως εξής:

Κατ' αρχήν είναι γνωστές οι τριγωνομετρικές σχέσεις:

$$\sigma\upsilon\nu(\theta_1 + \theta_2) = \sigma\upsilon\nu(\theta_1) \cdot \sigma\upsilon\nu(\theta_2) - \eta\mu(\theta_1) \cdot \eta\mu(\theta_2)$$

$$\eta\mu(\theta_1 + \theta_2) = \eta\mu(\theta_1) \cdot \sigma\upsilon\nu(\theta_2) + \eta\mu(\theta_2) \cdot \sigma\upsilon\nu(\theta_1)$$

$$\Theta\acute{\epsilon}\tau\omicron\upsilon\mu\epsilon \sigma\upsilon\nu(\theta_1) = x_1, \eta\mu(\theta_1) = y_1, \sigma\upsilon\nu(\theta_2) = x_2, \eta\mu(\theta_2) = y_2$$

¹Ευχαριστώ θερμά τον Στέλιο Βιτωράκη για την σχεδίαση

²Ένας εύκολος τρόπος για να δει κανείς ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(x)$ δεν είναι πολυωνυμική είναι η παραγωγή. Παραγωγίζοντας πολλές φορές ένα πολυώνυμο μιας μεταβλητής με πραγματικούς συντελεστές γίνεται η μηδενική συνάρτηση, ενώ η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(x)$ δεν γίνεται ποτέ

και έχουμε το παρακάτω σύστημα πολυωνυμικών εξισώσεων

$$\begin{aligned}x_0 &= \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot (x_1 x_2 - y_1 y_2) \\y_0 &= \alpha_1 \cdot y_1 + \alpha_2 (x_1 y_2 + x_2 y_1) \\x_1^2 + y_1^2 &= 1 \\x_2^2 + y_2^2 &= 1\end{aligned}$$

Αν τα x_0, y_0 είναι δεδομένα, τότε αναγόμενα σε ένα σύστημα πολυωνυμικών εξισώσεων, το οποίο το λύνουμε χρησιμοποιώντας κάποιο υπολογιστικό πακέτο (π.χ το *Axiom*). Μπορούμε επίσης να βρούμε και τη βάση *Groebner* του συστήματος και να κάνουμε διερεύνηση για το σύνολο λύσεων. Μη κενό σύνολο λύσεων του συστήματος, σημαίνει ότι το άκρο του Ρομπότ φθάνει στο συγκεκριμένο σημείο. Κάθε λύση δίνει και έναν διαφορετικό τρόπο προσέγγισης.

Είναι ενδεχόμενο επίσης να έχουμε τρεις κινούμενους βραχίονες, οπότε θα εμφανισθούν τριγωνομετρικοί αριθμοί της μορφής $\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$, $\eta\mu(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$. Στην περίπτωση αυτή αναπτύσσουμε τον τριγωνομετρικό αριθμό του αθροίσματος και εργαζόμαστε όπως πριν.

2. Το αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα

Το αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής: Δεδομένου ενός Ρομπότ όπως παραπάνω, να βρεθεί το σύνολο των σημείων, στα οποία προσεγγίζει το άκρο του Ρομπότ. Ποια είναι τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά αυτού του συνόλου; Εδώ στην πραγματικότητα έχουμε να βρούμε το πεδίο τιμών μιάς συνάρτησης

13.1 Ασκήσεις

1. Δίνεται ένα επίπεδο ρομπότ με δύο βραχίονες. Οι βραχίονες έχουν μήκη $l_1 = \alpha + 3$ και $l_2 = \beta + \gamma + 5$. Να εξετασθεί εάν το χέρι του ρομπότ μπορεί να προσεγγίσει το σημείο $(\gamma + 10, \alpha + 10)$.
2. Δίνεται ένα επίπεδο ρομπότ με τρεις ίσους βραχίονες, ο καθένας έχει μήκος $l = \alpha + \beta + \gamma + 1$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων που μπορεί να προσεγγίσει

Τέλος του εβδομέου μαθήματος

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Ράπτης Ευάγγελος, 2014. Ράπτης Ευάγγελος. «Υπολογιστική άλγεβρα. Ενότητα 13: Βάσεις Groebner και Ρομποτική». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/MATH14/>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

