ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Υπολογιστική άλγεβρα

Ενότητα 5: Ο αλγόριθμος της διαίρεσης και ο δακτύλιος πολυωνύμων

Ράπτης Ευάγγελος

Σχολή Θετικών επιστημών

Τμήμα Μαθηματικών

Κεφάλαιο 5

Ο αλγόριθμος της διαίρεσης

5.1 Γενικά για τον δακτύλιο των πολυωνύμων

1. Αν $\mathbb{F}$[1] το σώμα των συντελεστών, το σύνολο των πολυωνύμων μιας μεταβλητής με συντελεστές από το $\mathbb{F}$, θα το συμβολίζουμε με $\mathbb{F}[x]$.

2. Δες πληροφορίες για τα σώματα στα μαθηματικά εδώ

3. Το σύνολο των πολυωνύμων $\mathbb{F}[x]$ είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο.

4. Δες πληροφορίες για τους δακτυλίους στα μαθηματικά εδώ

5.

   Θεώρημα 5.1.1. *Έστω $\Delta(x) \in \mathbb{F}[x]$ και $\delta(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $\delta(x) \neq \mathbf{0}(\mathbf{x})$. Υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ με τις παρακάτω ιδιότητες*

   (α΄) $\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$

   (β΄) Είτε $\upsilon(x) = \mathbf{0}(\mathbf{x})$, δηλαδή είναι το μηδενικό πολυώνυμο,
   είτε $\upsilon(x) \neq \mathbf{0}(\mathbf{x})$ και βαθμός ($\upsilon(x)$)< βαθμός ($\delta(x)$)

   Απόδειξη

   (α΄) Ας θεωρήσουμε ότι:

   i. $\Delta(x) = \alpha_\nu \cdot x^\nu + \alpha_{\nu-1} \cdot x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot x + \alpha_0$ με $\alpha_\nu \neq 0$, δηλαδή το $\Delta(x)$ έχει βαθμό ν.

   ii. $\delta(x) = \beta_\mu \cdot x^\mu + \beta_{\mu-1} \cdot x^{\mu-1} + \cdots + \beta_1 \cdot x + \beta_0$ με $\beta_\nu \neq 0$, δηλαδή το $\Delta(x)$ έχει βαθμό μ.

[1] Στο μάθημα αυτό ως σώμα συντελεστών θα έχουμε το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, εκτός εάν αναφέρουμε κάτι διαφορετικό. Πάντως οι περισσότερες προτάσεις και θεωρήματα ισχύουν για όλα τα σώματα.

iii. Εάν $\nu < \mu$, δηλαδή ο βαθμός του $\Delta(x)$ είναι γνήσια μικρότερος του $\delta(x)$, τότε θέτουμε
$\pi(x) = \mathbf{0(x)}$ και $\upsilon(x) = \Delta(x)$ και οι απαιτήσεις του θεωρήματος ικανοποιούνται πλήρως.

iv. Έστω[2] ότι $\nu \geq \mu$. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε το μονώνυμο $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \cdot x^{\nu-\mu}$

v. Παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο:

$$\upsilon_1(x) = \Delta(x) - \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \cdot x^{\nu-\mu} \cdot \delta(x) \tag{5.1}$$

έχει βαθμό γνήσια μικρότερο του βαθμού του $\Delta(x)$, δηλαδή έχει βαθμό γνήσια μικροτέρου του ν, διότι ο μεγιστοβάθμιος όρος του $\Delta(x)$ διαγράφθηκε.

vi. Ας υποθέσουμε ότι το $\upsilon_1(x)$ είναι ένα πολυώνυμο της μορφής:

$$\upsilon_1(x) = \lambda_\xi \cdot x^\xi + \lambda_{\xi-1} \cdot x^{\xi-1} + \cdots + \lambda_1 \cdot x + \lambda_0 \tag{5.2}$$

με $\lambda_\xi \neq 0$ και $\xi < \nu$

vii. α) Αν ο βαθμός του $\upsilon_1(x)$ είναι γνήσια μικρότερος του βαθμού του $\delta(x)$, δηλαδή του μ, τότε θεωρούμε ως $\pi(x)$ το $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \cdot x^{\nu-\mu}$ και ως $\upsilon(x)$ το $\upsilon_1(x)$. Με έλεγχο διαπιστώνουμε ότι ικανοποιούνται πλήρως οι απαιτήσεις του πρώτου μέρους του θεωρήματος

β) Αν $\xi =$βαθμός του $\delta(x) > \mu$, θεωρούμε το μονώνυμο $\frac{\lambda_\xi}{\beta_\mu} \cdot x^{\xi-\mu}$

viii. Στην περίπτωση β) θεωρούμε το πολυώνυμο:

(5.3)
$$\upsilon_2(x) = \upsilon_1(x) - \frac{\lambda_\xi}{\beta_\mu} \cdot x^{\xi-\mu} \cdot \delta(x) = \Delta(x) - \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \cdot x^{\nu-\mu} \cdot \delta(x) - \frac{\lambda_\xi}{\beta_\mu} \cdot x^{\xi-\mu} \cdot \delta(x)$$

ix. Για το $\upsilon_2(x)$ εξετάζουμε πάλι εάν ο βαθμός του (ο οποίος είναι γνήσια μικρότερος από τον βαθμό του $\upsilon_1(x)$) είναι μικρότερος από τον βαθμό μ του $\delta(x)$ ή όχι και συνεχίζουμε ανάλογα όπως προηγουμένως

x. Επειδή η ακολουθία ($\upsilon_1(x), \upsilon_2(x), \upsilon_3(x), \cdots ,$) είναι γνησίως φθίνουσα στους βαθμούς, θα υπάρχει η **πρώτη** φορά, που ο βαθμός του $\upsilon_i(x)$ γίνεται γνήσια μικρότερος του μ. Στην περίπτωση αυτή σταματάμε και θέτουμε:
$\upsilon(x) = \upsilon_i(x)$ και $\pi(x) = \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \cdot x^{\nu-\mu} + \frac{\lambda_\xi}{\beta_\mu} \cdot x^{\xi-\mu} + \cdots$

xi. Παρατηρούμε ότι το πρώτο (το υπαρξιακό) μέρος του θεωρήματος αποδείχθηκε

[2] Στη θεωρία πολυωνύμων **δεν επιτρέπονται** αρνητικοί εκθέτες

(β′) Έστω τώρα ότι έχουμε:
$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$ και
$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi'(x) + \upsilon'(x)$
Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε $\delta(x)\,(\pi(x) - \pi'(x)) = \upsilon'(x) - \upsilon(x)$
Αν $\pi(x) - \pi'(x) \neq \mathbf{0(x)}$ τότε και $\upsilon'(x) - \upsilon(x) \neq \mathbf{0(x)}$ και εξετάζοντας τους βαθμούς και των δύο μελών καταλήγουμε σε άτοπο.
Τελικά καταλήγουμε ότι $\pi(x) - \pi'(x) = \mathbf{0(x)}$ και $\upsilon'(x) - \upsilon(x) = \mathbf{0(x)}$ και έτσι έχουμε αποδείξει και το δεύτερο μέρος του θεωρήματος

6.

Ορισμός 5.1.2. *Έστω $\Delta(x), \delta(x), \pi(x), \upsilon(x)$ τα πολυώνυμα του προηγουμένου θεωρήματος.*

(α′) Το πολυώνυμο $\Delta(x)$ θα λέγεται **Διαιρετέος**

(β′) Το πολυώνυμο $\delta(x)$ θα λέγεται **διαιρέτης**

(γ′) Το πολυώνυμο $\pi(x)$ θα λέγεται **πηλίκο** *της διαίρεσης*

(δ′) Το πολυώνυμο $\upsilon(x)$ θα λέγεται **υπόλοιπο** *της διαίρεσης*

(ε′) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\Delta(x)$ δια του $\delta(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο $\mathbf{0(x)}$, θα λέμε ότι το $\delta(x)$ **διαιρεί** *το $\Delta(x)$ και θα γράφουμε $\delta(x) \mid \Delta(x)$*

5.2 Προαιρετική άσκηση για εξάσκηση

1. Δίνεται το σύστημα:

$$(\,\boldsymbol{\Sigma}) \quad \begin{array}{l} f(x) = (\alpha+7)x^3 + 5x^2 + (6+\beta)x + (\gamma+13) = 0 \\ g(x) = (\alpha+2\beta)x^4 + (\alpha+7)x^3 + 5x^2 + (6+\beta)x + (\gamma+13) = 0 \end{array}$$

όπου α,β,γ τα τρία τελευταία ψηφία του Αρ. Μητρώου σας αρχίζοντας από το τέλος

(α′) Να εκτελέσετε τη διαίρεση του $g(x)$ δια του $f(x)$ και να βρείτε το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)$

(β′) Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων του συστήματος $(\,\boldsymbol{\Sigma})$ είναι ίσο με το σύνολο λύσεων του συστήματος:

$$(\ \Sigma^\star\ ) \quad \begin{array}{l} f(x) = (\alpha+7)x^3 + 5x^2 + (6+\beta)x + (\gamma+13) = 0 \\ \upsilon(x) = 0 \end{array}$$

(γ′) Με βάση τα προηγούμενα να βρείτε το σύνολο λύσεων του συστήματος $(\boldsymbol{\Sigma})$

2. (α′) Δείτε το βίντεο[3] στη διεύθυνση εδώ Σκεφθείτε πάνω στο βασικό στόχο του μαθήματος με αφορμή το βίντεο και προσαρμόστε τον στόχο αυτό σε συστήματα πολυωνύμων μιας μεταβλητής.

   (β′) Να θεωρήσετε το σύστημα:

$$(\ \Sigma^*\ )\quad \begin{array}{l} f(x) = (\alpha+7)x^3 + 5x^2 + (6+\beta)x + (\gamma+13) = 0 \\ g(x) = (\alpha+2\beta)x^4 + (\alpha+7)x^3 + 5x^2 + (6+\beta)x + (\gamma+13) = 0 \\ h(x) = x^5 - 9x + 3 = 0 \end{array}$$

   όπου α,β,γ τα τρία τελευταία ψηφία του Αρ. Μητρώου σας αρχίζοντας από το τέλος.

   i. Χρησιμοποιώντας τον Ευκλείδειο αλγόριθμο να βρείτε τρία πολυώνυμα $\kappa(x), \lambda(x), \xi(x) \in \mathbb{R}[x]$ έτσι ώστε:

$$MK\Delta(f(x), g(x), h(x)) = \kappa(x)\cdot f(x) + \lambda(x)\cdot g(x) + \xi(x)\cdot h(x)$$

   Στοιχεία για τον Ευκλείδειο αλγόριθμο μπορείτε να βρείτε είτε εδώ είτε στο βιβλίο Βασικής άλγεβρας εδώ

   ii. Να λύσετε το σύστημα (Σ^*) με τη βοήθεια του ΜΚΔ παραπάνω

   iii. Διατυπώστε και αποδείξτε ένα θεώρημα επίλυσης συστημάτων πολυωνύμων μιας μεταβλητής με τη βοήθεια του ΜΚΔ.

Τέλος του τρίτου μαθήματος

[3] Ο σκηνοθέτης ζητάει συγγνώμη για την ποιότητα του βίντεο.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών, Ράπτης Ευάγγελος, 2014. Ράπτης Ευάγγελος. «Υπολογιστική άλγεβρα. Ενότητα 5: Ο αλγόριθμος της διαίρεσης και ο δακτύλιος πολυωνύμων». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/MATH14/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης