



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Υπολογιστική άλγεβρα

Ενότητα 1: Πολυωνυμικές σχέσεις και ταυτότητες, μέρος I

Ράπτης Ευάγγελος

Σχολή Θετικών επιστημών

Τμήμα Μαθηματικών

Μέρος Ι
Έναρξη μαθήματος

Υπολογιστική Άλγεβρα (439)) Ευάγγελος Ράπτης ¹

1. Τα παρακάτω κείμενα γράφονται και ενημερώνονται καθημερινά σε όλη την διάρκεια του Εαρινού εξαμήνου 2013-14 για τις ανάγκες του μαθήματος **Υπολογιστική Άλγεβρα**, που διδάσκεται στο Προπτυχιακό πρόγραμμα (τέταρτο εξάμηνο) του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών.
2. Καλούνται οι φοιτητές να επισημαίνουν λάθη και παραλείψεις.
3. Παρακάτω θα βρείτε συνδέσμους με βιβλία άλγεβρας χρήσιμα στην μελέτη
 - (α') Πρώτο βιβλίο εδώ
 - (β') Τέταρτο βιβλίο εδώ
 - (γ') Πέμπτο βιβλίο εδώ

Παράπλευρες σελίδες συζήτησης

Μπορείτε να διατυπώνετε τις απορίες σας και τις σκέψεις σας:

Στην **Τηλεσυνεργασία**, είναι ο σύνδεσμος αριστερά στη σελίδα του μαθήματος. Στη σελίδα αυτή έχετε τη δυνατότητα να γράφετε και λίγα μαθηματικά σύμβολα.

Τηλεδιασκέψεις

Κατά τη διάρκεια του μαθήματος θα γίνουν πολλές **Τηλεδιασκέψεις**. Θα σας ενημερώσουμε σύντομα για αυτές. Πρέπει να διαθέτετε εκτός από υπολογιστή και σύνδεση στο internet, μία web camera και ένα μικρόφωνο.

¹ Ηλεκτρονική διεύθυνση: eraptis@math.uoa.gr
 Γραφείο: 211, τηλ. 2107276347 Ηλεκτρονική διεύθυνση Ηλεκτρονικής τάξης του μαθήματος:
<http://eclass.uoa.gr/courses/MATH117/index.php>

Κεφάλαιο 1

Πολυωνυμικές σχέσεις και ταυτότητες, μέρος I

Τετάρτη 16 Απριλίου 2014¹

1.1 Εισαγωγή

Σκοπός² του πρώτου μέρους του μαθήματος αυτού είναι να διερευνήσει διαδικασίες που θα μπορούσαμε να τις ονομάσουμε « πολυωνυμικές σχέσεις ». Συνήθως τα ερωτήματα-προβλήματα εμφανίζονται ως εξής:

Πρόβλημα 1.

Από ένα **Σύνολο Υποθέσεων** που διατυπώνονται με πολυώνυμα θέλουμε να καταλήξουμε σε ένα **Σύνολο συμπερασμάτων**, τα οποία επίσης διατυπώνονται με πολυώνυμα .

Πρίν προχωρήσουμε ας δούμε μερικά παραδείγματα:

Παράδειγμα 1.1.1. Υποθέτουμε ότι τρεις αριθμοί x, y, z ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned}x + y + z &= 3 \\x^2 + y^2 + z^2 &= 5 \\x^3 + y^3 + z^3 &= 7\end{aligned}$$

Δείξτε ότι:

$$\begin{aligned}x^4 + y^4 + z^4 &= 9 \\x^5 + y^5 + z^5 &\neq 11\end{aligned}$$

¹Ευάγγελος Ράπτης

² Το κείμενο αυτό γράφεται και συμπληρώνεται καθημερινά κατά τη διάρκεια του Εαρινού εξαμήνου 2013-14 για τις ανάγκες του μαθήματος **Υπολογιστική Άλγεβρα(439)**

10 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ, ΜΕΡΟΣ Ι

Να υπολογίσετε επίσης τα παρακάτω αθροίσματα:

$$\begin{aligned}x^5 + y^5 + z^5 \\ x^6 + y^6 + z^6\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.1.2. Να εξετάσετε εάν υπάρχει πεπερασμένο σύνολο τριάδων x, y, z με

$$\begin{aligned}x^7 + y^9 + z^8 &= 1 \\ x^{12} + y^{25} + z^2 &= 1 \\ x^{13} + y^{23} + z^{33} &= 1\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.1.3. Δίνονται οι πολυωνυμικές σχέσεις $f(x) = 3x^6 + 2x^5 + 2x^4 - x^3 - 8x^2 + 11x - 9$, $g(x) = x^2 - 4x + 3$

Προκύπτει η πολυωνυμική σχέση $h(x) = x^4 - 7x^2 + 6$ από τις προηγούμενες;

Παράδειγμα 1.1.4. Δίνονται οι παρακάτω πολυωνυμικές «γραμμικές» σχέσεις:

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 0 \\ 4x + 5y + 6z &= 0 \\ 7x + 8y + 9z &= 0\end{aligned}$$

Προκύπτει από τις σχέσεις αυτές η σχέση $12x + 13y + 18z = 0$;

1.2 Στον δρόμο για έναν ορισμό

Τα παραπάνω παραδείγματα μας βάζουν το ερώτημα για έναν ορισμο-οδηγό για την αντιμετώπισή τους.

1. **Πρώτη προσέγγιση** Θα λέμε ότι το συμπέρασμα

$$f(x_1, x_2, \dots, x_\nu) = 0$$

(το οποίο είναι ένα πολυώνυμο με ν μεταβλητές) προκύπτει από τις υποθέσεις

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_\nu) = 0, f_2(x_1, x_2, \dots, x_\nu) = 0, \dots, f_\mu(x_1, x_2, \dots, x_\nu) = 0$$

(τα οποία είναι πολυώνυμα με ν μεταβλητές), εάν οποιαδήποτε ν -άδα $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\nu)$ που «ικανοποιεί» τα πολυώνυμα

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_\nu) = 0, f_2(x_1, x_2, \dots, x_\nu) = 0, \dots, f_\mu(x_1, x_2, \dots, x_\nu) = 0,$$

«ικανοποιεί» και το

$$f(x_1, x_2, \dots, x_\nu) = 0$$

2. Δεύτερη προσέγγιση Θα λέμε ότι το συμπέρασμα

$$f(x_1, x_2, \dots, x_\nu) = 0$$

(το οποίο είναι ένα πολυώνυμο με ν μεταβλητές) προκύπτει από τις υποθέσεις

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_\nu) = 0, f_2(x_1, x_2, \dots, x_\nu) = 0, \dots, f_\mu(x_1, x_2, \dots, x_\nu) = 0$$

(τα οποία είναι πολυώνυμα με ν μεταβλητές), εάν

$$f(x_1, x_2, \dots, x_\nu) = h_1(x_1, x_2, \dots, x_\nu) \cdot f_1(x_1, x_2, \dots, x_\nu) + h_2(x_1, x_2, \dots, x_\nu) \cdot f_2(x_1, x_2, \dots, x_\nu) + \dots + h_\mu(x_1, x_2, \dots, x_\nu) \cdot f_\mu(x_1, x_2, \dots, x_\nu),$$

δηλαδή το «συμπέρασμα» είναι ένας πολυωνυμικός συνδυασμός των «υποθέσεων»

1.3 Ασκήσεις και προβληματισμοί

1. «Πειραματισθείτε» με πολυώνυμο μιας ή δύο μεταβλητών για να καταλήξετε σε έναν σωστό ορισμό
2. Σκεφθείτε έναν τρόπο διδασκαλίας των παραπάνω εννοιών στους μαθητές Γυμνασίων-Λυκείων
3. Να μελετήσετε και να βρείτε πληροφορίες για το σύνολο λύσεων στο \mathbb{R} του παρακάτω συστήματος
 $x^{\alpha+7} + y^{\beta+5} = 1$
 $x^{\gamma+6} + y^{\alpha+10} = 1$, όπου α, β, γ τα τελευταία ψηφία του Αριθμού Μητρώου σας αρχίζοντας από το τέλος
Εξετάστε εάν το παραπάνω σύστημα έχει πεπερασμένο σύνολο λύσεων
4. Να λυθεί το παρακάτω σύστημα στο \mathbb{R}
 $(\alpha + 7)x^3 + 5x^2 + (6 + \beta)x + (\gamma + 13) = 0$
 $(\alpha + 9)x^7 + 12x^3 + (16 + \beta)x + (2\gamma + 13) = 0$
 όπου α, β, γ τα τελευταία ψηφία του Αριθμού Μητρώου σας αρχίζοντας από το τέλος.
 Να γράψετε επίσης έναν τρόπο που προτείνετε να διδαχθεί η λύση της άσκησης αυτής στο Λύκειο

Τέλος του πρώτου μαθήματος

12ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ, ΜΕΡΟΣ Ι

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Ράπτης Ευάγγελος, 2014. Ράπτης Ευάγγελος. «Υπολογιστική άλγεβρα. Ενότητα 1: Πολυωνυμικές σχέσεις και ταυτότητες, μέρος Ι». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/MATH14/>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

