ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Υπολογιστική άλγεβρα

Ενότητα 6: Ο αλγόριθμος της διαίρεσης

Ράπτης Ευάγγελος

Σχολή Θετικών επιστημών

Τμήμα Μαθηματικών

Μέρος III

Πολυώνυμα πολλών μεταβλητών

Κεφάλαιο 6

Ο αλγόριθμος της διαίρεσης

Τετάρτη 4 Μαΐου 2014

6.1 Γενικά

Η πράξη της διαίρεσης στον δακτύλιο $\mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_\nu]$,[1] όπου $\mathbb{F}$ είναι ένα σώμα, είναι καθοριστικής σημασίας για τη συνέχεια. Υπενθυμίζουμε ότι στον δακτύλιο των πολυωνύμων μιας μεταβλητής για να γίνει η διαίρεση χρειαζόμαστε:

1) Να έχουμε ένα διαιρετέο $\Delta(x) \in \mathbb{F}[x]$ και ένα διαιρέτη $\delta(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $\delta(x) \neq 0$

2) Να διατάξουμε τα μονώνυμα του διαιρετέου και τα μονώνυμα του διαιρέτη χρησιμοποιώντας την φυσική διάταξη των δυνάμεων των μονονύμων.

Μετά την εκτέλεση της διαίρεσης έχουμε

$$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x) \text{ με } \left\{ \begin{array}{c} \upsilon(x) = 0 \\ \text{ή} \\ \upsilon(x) \neq 0 \text{ και } deg(\upsilon(x)) < deg(\delta(x)) \end{array} \right\}$$

Κάτι που πρέπει να τονισθεί ιδιαίτερα εδώ είναι ότι το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ είναι μοναδικά. Δες σχετικά στο 5 Σε όλες τις περιπτώσεις[2] αν $I =< f(x), g(x) >$ είναι το ιδεώδες του δακτυλίου $\mathbb{F}[x]$ που παράγεται από τα

[1] Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο $\mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_\nu]$, συμβολίζει το σύνολο των πολυωνύμων με μεταβλητές $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$ και συντελεστές στοιχεία από το σώμα $\mathbb{F}$. Στο σύνολο αυτό, έχουν ορισθεί δύο πράξεις, η πράξη της πρόσθεσης πολυωνύμων και η πράξη του πολλαπλασιασμού πολυωνύμων. Η τριάδα $(\mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_\nu], +, \cdot)$ αναφέρεται ως *δακτύλιος των πολυωνύμων με ν μεταβλητές και συντελεστές από το σώμα* $\mathbb{F}$

[2] Υπενθυμίζουμε εδώ από την Βασική Άλγεβρα, ότι στο μηδενικό πολυώνυμο δεν επισυνάπτουμε βαθμό και τα σταθερά μη-μηδενικά πολυώνυμα έχουν βαθμό μηδέν

δύο πολυώνυμα $f(x), g(x)$ θα έχουμε ότι $\upsilon(x) \in I$. Με τα ιδεώδη θα ασχοληθούμε αναλυτικά στα επόμενα μαθήματα. Δείτε όμως τον ορισμό του ιδεώδους ενός δακτυλίου για καλύτερη κατανόηση του μαθήματος.

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι κατά την εύρεση του υπολοίπου, η προσπάθειά μας επικεντρώνεται στην εύρεση ενός πολυωνύμου μέσα στο ιδεώδες $I =< f(x), g(x) >$, το οποίο να έχει τον ελάχιστο βαθμό.

Υπενθυμίζουμε επίσης ότι κάθε στοιχείο $h(x)$ του Ι είναι της μορφής $h(x) = \kappa(x)f(x) + \lambda(x)g(x)$, όπου $\kappa(x), \lambda(x) \in \mathbb{F}[x]$.

Δες επίσης και ένα σχετικό βίντεο εδώ

6.2 Βήματα διαίρεσης

Θα ορίσουμε τώρα μία διαδικασία διαίρεσης (αλγόριθμο διαίρεσης) στον δακτύλιο $\mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_\nu]$ έτσι ώστε δοθέντων των πολυωνύμων

1. $\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$
2. $f_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), f_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), f_3(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), \cdots, f_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$

ο αλγόριθμος να δίνει:

1. Μία έκφραση του πολυωνύμου $\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ ως εξής:

   $\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) = \pi_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \cdot f_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) + \pi_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \cdot f_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) + \cdots + \pi_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \cdot f_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) + \upsilon_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$
2. Το πολυώνυμο $\upsilon_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$, το οποίο θα το λέμε **υπόλοιπο** της διαίρεσης και τη διατεταγμένη μ-άδα πολυωνύμων $(\pi_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), \pi_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), \cdots, \pi_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_\nu))$, τήν οποία θα λέμε **πηλίκο** της διαίρεσης.

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να δούμε ένα παράδειγμα διαίρεσης ενός πολυωνύμου $\Delta(x, y)$ διά ενός ζεύγους πολυωνύμων $(f_1(x, y), f_2(x, y))$. Για ευκολία θεωρούμε και τα τρία πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές.

Όπως είπαμε παραπάνω θέλουμε να οδηγηθούμε σε μια σχέση της μορφής:

$$\Delta(x, y) = \pi_1(x, y) \cdot f_1(x, y) + \pi_2(x, y) \cdot f_2(x, y) + \upsilon(x, y)$$

όπου:
$\Delta = \Delta(x, y)$: Διαιρετέος
$\delta = (f_1(x, y), f_2(x, y))$: διαιρέτης
$\pi = (\pi_1(x, y), \pi_2(x, y))$:πηλίκο
$\upsilon(x, y)$: υπόλοιπο

6.3 Παράδειγμα διαίρεσης στον δακτύλιο $\mathbb{F}[x,y]$

Παράδειγμα 6.3.1. *Να υπολογιστεί το αποτέλεσμα της διαίρεσης του πολυωνύμου* $\Delta(x,y) = g(x,y) = xy^2 + 1$ *με τα πολυώνυμα* $(f_1(x,y) = xy + 1, f_2(x,y) = y + 1)$.

Διαδικασία διαίρεσης

Βήμα 1 Δες εδώ το βίντεο μάθημα 4 βίντεο 1 για βοήθεια πριν τη μελέτη Θεωρούμε τώρα μία διάταξη στις μεταβλητές (π.χ. $x > y$). Η διάταξη αυτή επάγει μία διάταξη, την **λεξικογραφική**, στα μονώνυμα ως εξής: Παρατηρούμε ότι κάθε μονώνυμο είναι της μορφής $x^\kappa y^\lambda$, όπου κ και λ είναι μή αρνητικοί ακέραιοι[3]. Έτσι κάθε μονώνυμο καθορίζεται πλήρως από ένα ζεύγος $(\kappa, \lambda) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Ορίζουμε τώρα

$$(\kappa_1, \lambda_1) > (\kappa_2, \lambda_2) \Longleftrightarrow_{o\rho\sigma} \kappa_1 > \kappa_2 \;\; \eta' \;\; \kappa_1 = \kappa_2 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \lambda_1 > \lambda_2$$

και

$$x^{\kappa_1} y^{\lambda_1} > x^{\kappa_2} y^{\lambda_2} \Longleftrightarrow_{o\rho\sigma} (\kappa_1, \lambda_1) > (\kappa_2, \lambda_2)$$

Βήμα 2 Κατασκευάζουμε το παρακάτω διάγραμμα προκειμένου να αρχίσουμε την διαίρεση, γράφοντας τα πολυώνυμα που λαμβάνουν μέρος στη διαίρεση ως γραμμικό συνδυασμό μονονύμων με φθίνουσα σειρά.

$$\begin{array}{l|l}
f_1(x,y) = xy + 1 & g(x,y) = xy^2 + 1 \\ \cline{2-2}
f_2(x,y) = y + 1 & \\
 & \\ \cline{2-2}
 & \\ \cline{2-2}
\pi_1(x,y) = & \\ \cline{2-2}
 & \\
\pi_2(x,y) = & \\
\upsilon(x,y) = &
\end{array}$$

[3]Όπως έχουμε ξαναπεί στα πολυώνυμα δεν επιτρέπονται αρνητικοί εκθέτες

Βήμα 3 Θεωρούμε το μεγιστοβάθμιο όρο του Διαιρετέου (μαζί με τον συντελεστή του), ο οποίος στην περίπτωσή μας είναι ο xy^2 και τον μεγιστοβάθμιο όρο του πρώτου κατά σειρά πολυωνύμου του διαιρέτη (μαζί με τον συντελεστή του), που είναι ο xy. Εκτελούμε τη διαίρεση $xy^2 : xy$ και βρίσκουμε y. Εδώ σημειώνουμε ότι αν υπήρχαν και αριθμητικοί συντελεστές θα είχαμε και το πηλίκο αυτών, δηλαδή αν είχαμε $7xy^2$ δια $5xy$, τότε το αποτέλεσμα είναι $(7/5)y$. Θέτουμε στον πρώτο όρο του πηλίκου $\pi_1(x,y)$ μετά το $=$ το y. Έχουμε την παρακάτω εικόνα:

$$
\begin{array}{l|l}
f_1(x,y) = xy+1 & g(x,y) = xy^2+1 \\ \hline
f_2(x,y) = y+1 & \\
 & \\ \hline
 & \\ \hline
\pi_1(x,y) = y & \\ \hline
\pi_2(x,y) = & \\
\upsilon(x,y) = &
\end{array}
$$

Βήμα 4 Πολλαπλασιάζουμε το πολυώνυμο $f_1(x,y) = xy+1$ επί y και το αφαιρούμε από το $g(x) = xy^2+1$. Έχουμε την παρακάτω εικόνα:

$$
\begin{array}{l|l}
f_1(x,y) = xy+1 & g(x,y) = xy^2+1 \\ \hline
f_2(x,y) = y+1 & \\
 & y(xy+1) = xy^2+y, \quad g(x) - (xy^2+y) = -y+1 \\ \hline
 & \\ \hline
\pi_1(x,y) = y & \\ \hline
\pi_2(x,y) = & \\
\upsilon(x,y) = &
\end{array}
$$

Βήμα 5 Προέκυψε το πολυώνυμο $-y+1$, το οποίο είναι ένα **ενδιάμεσο υπόλοιπο**. Ο μεγιστοβάθμιος όρος του(μαζί με τον συντελεστή του) είναι ο $-y$. Ο μεγιστοβάθμιος όρος του πρώτου όρου του διαιρέτη $f_1(x,y) = xy + 1$ είναι ο xy. Παρατηρούμε ότι ο μεγιστοβάθμιος όρος xy του $f_1(x,y)$ δεν διαιρεί τον y.

Θεωρούμε τώρα τον μεγιστοβάθμιο όρο του $f_2(x,y) = y + 1$, ο οποίος είναι ο y. Ο όρος αυτός διαιρεί τον $-y$, που είναι ο μεγιστοβάθμιος όρος του ενδιάμεσου υπολοίπου $-y + 1$ και το πηλίκο είναι -1.

Κατόπιν πολλαπλασιάζουμε το -1 με το $f_2(x,y) = y+1$ και το αφαιρούμε από το ενδιάμεσο υπόλοιπο $-y + 1$. Βρίσκουμε έτσι τον πρώτο όρο του πηλίκου $\pi_2(x,y)$, ο οποίος είναι ο -1 και το υπόλοιπο, που είναι ο αριθμός 2.

Τελικά έχουμε την παρακάτω εικόνα:

$$\begin{array}{l|l}
f_1(x,y) = xy + 1 & g(x,y) = xy^2 + 1 \\ \cline{2-2}
f_2(x,y) = y + 1 & \\
 & y(xy+1) = xy^2 + y, \quad g(x) - (xy^2 + y) = -y + 1 \\
 & -1 \cdot (y+1) = -y - 1, \quad -y + 1 - (-y - 1) = 2 \\ \cline{2-2}
 & \\ \cline{2-2}
\pi_1(x,y) = y & \\ \cline{2-2}
\pi_2(x,y) = -1 & \\
\upsilon(x,y) = 2 &
\end{array}$$

Βήμα 6 Εδώ αναγκαστικά σταματάει η διαδικασία αυτή, διότι ο μεγιστοβάθμιος όρος του υπολοίπου $\upsilon(x,y) = 2$ είναι ο $2 \equiv 2 \cdot x^0 y^0$, ο οποίος δεν διαιρείται ούτε από τον μεγιστοβάθμιο όρο του $f_1(x,y)$ ούτε από τον μεγιστοβάθμιο όρο του $f_2(x,y)$.

Διατυπώνουμε το τελικό συμπέρασμά μας λέγοντας ότι το πηλίκο της διαίρεσης του πολυωνύμου $g(x,y) = xy^2 + 1$ δια του διατεταγμένου ζεύγους πολυωνύμων $(f_1(x,y) = xy + 1, f_2(x,y) = y + 1)$ είναι το διατεταγμένο ζεύγος πολυωνύμων $(\pi_1(x,y) = y, \pi_2(x,y) = -1)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x,y) = 2$. Δηλαδή ισχύει

$$g(x) = xy^2 + 1 = f_1(x,y) \cdot \pi_1(x,y) + f_2(x,y) \cdot \pi_2(x,y) + \upsilon(x,y)$$

Μετά τη μελέτη του παραδείγματος αυτού δείτε το βίντεο εδώ

6.4 Παράδειγμα διαίρεσης στον δακτύλιο $\mathbb{F}[x, y, z]$

Δίνουμε ακόμη ένα παράδειγμα διαίρεσης με τρείς μεταβλητές

Παράδειγμα 6.4.1. *Να υπολογιστεί το αποτέλεσμα της διαίρεσης του πολυωνύμου* $g(x, y, z) = 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18$ *με το ζεύγος πολυωνύμων* $(f_1(x, y, z) = x^3yz^5 + 1, f_2(x, y, z) = yz + 1)$.

Διαδικασία διαίρεσης

Βήμα 1 Θεωρούμε μία διάταξη στις μεταβλητές (π.χ. $x > y > z$). Η διάταξη αυτή επάγει μία διάταξη, την **λεξικογραφική**, στα μονώνυμα και αυτή με τη σειρά της μία διάταξη κατά φθίνουσα σειρά των μονονύμων στα πολυώνυμα. Έτσι έχουμε

$g(x, y, z) = 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18$
$f_1(x, y, z) = x^3yz^5 + 1$
$f_2(x, y, z) = yz + 1$

Βήμα 2 Κατασκευάζουμε το παρακάτω διάγραμμα προκειμένου να αρχίσουμε την διαίρεση.

$f_1(x, y, z) = x^3yz^5 + 1$	$g(x, y, z) = 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18$
$f_2(x, y) = yz + 1$	
$\pi_1(x, y) =$	
$\pi_2(x, y) =$	
$\upsilon(x, y) =$	

Βήμα 3 Θεωρούμε το μεγιστοβάθμιο όρο του Διαιρετέου (μαζί με τον συντελεστή του), ο οποίος στην περίπτωσή μας είναι ο $3x^5y^2z$ και τον μεγιστοβάθμιο όρο του πρώτου κατά σειρά πολυωνύμου του διαιρέτη (μαζί με τον συντελεστή του), που είναι ο x^3yz^5. Προσπαθούμε να εκτελέσουμε τη διαίρεση $3x^5y^2z : x^3yz^5$.

Η διαίρεση δεν γίνεται, διότι ο εκθέτης της μεταβλητής z είναι μεγαλύτερος στον δεύτερο όρο και για το λόγο αυτό επιχειρούμε να διαιρέσουμε το μεγιστοβάθμιο όρο του Διαιρετέου (μαζί με τον συντελεστή του) με τον μεγιστοβάθμιο όρο του δευτέρου κατά σειρά πολυωνύμου του διαιρέτη (μαζί με τον συντελεστή του), που είναι ο yz.

Η διαίρεση τώρα γίνεται και έχουμε ως αποτέλεσμα $3x^5y$.
Το $3x^5y$ το τοποθετούμε στο πηλίκο, που αντιστοιχεί στο δεύτερο πολυώνυμο διαίρεσης.
Πολλαπλασιάζουμε το $3x^5y$ επί το $f_2(x, y) = yz + 1$ και το αφαιρούμε από το $g(x) = 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18$. Έχουμε έτσι την παρακάτω εικόνα:

$f_1(x, y, z) = x^3yz^5 + 1$	$g(x, y, z) = 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18$
$f_2(x, y, z) = yz + 1$	
	$g(x, y, z) - 3x^5yf_2(x, y, z)$
	$= 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18 - 3x^5y(yz + 1)$
$\pi_1(x, y, z)$	$= -xy^3z + 7yz + 18 - 3x^5y$
$\pi_2(x, y, z) = 3x^5y$	
$\upsilon(x, y, z) =$	

Βήμα 4 Προέκυψε το πολυώνυμο $-xy^3z + 7yz + 18 - 3x^5y$, το οποίο είναι ένα **ενδιάμεσο υπόλοιπο**. Γράφουμε το πολυώνυμο αυτό ως γραμμικό συνδυασμό μονονύμων με φθίνουσα σειρά χρησιμοποιώντας τη λεξικογραφική διάταξη, δηλαδή $-3x^5y - xy^3z + 7yz + 18$. Ο μεγιστοβάθμιος όρος του(μαζί με τον συντελεστή του) είναι ο $-3x^5y$. Ο μεγιστοβάθμιος όρος του πρώτου όρου του διαιρέτη $f_1(x, y, z) = x^3yz^5 + 1$ είναι ο x^3yz^5. Παρατηρούμε ότι ο μεγιστοβάθμιος όρος x^3yz^5 του $f_1(x, y, z)$ δεν διαιρεί τον $-3x^5y$[4].

Θεωρούμε τώρα τον μεγιστοβάθμιο όρο του $f_2(x, y, z) = yz + 1$, ο οποίος είναι ο yz. Ο όρος αυτός δεν διαιρεί τον $-3x^5y$, που είναι ο μεγιστοβάθμιος όρος του ενδιάμεσου υπολοίπου $-3x^5y - xy^3z + 7yz + 18$.

Στο σημείο αυτό **τοποθετούμε τον όρο $-3x^5y$ στο υπόλοιπο** και μένει ως ενδιάμεσο υπόλοιπο το $-xy^3z + 7yz + 18$.

Έτσι έχουμε την εικόνα:

[4]Υπενθυμίζουμε ότι στα πολυώνυμα δεν επιτρέπονται αρνητικοί εκθέτες στις μεταβλητές

$f_1(x,y,z) = x^3yz^5 + 1$	$g(x,y,z) = 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18$
$f_2(x,y,z) = yz + 1$	
	$g(x,y,z) - 3x^5yf_2(x,y,z)$
	$= 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18 - 3x^5y(yz+1)$
$\pi_1(x,y,z)$	
	$= -3x^5y - xy^3z + 7yz + 18$
$\pi_2(x,y,z) = 3x^5y$	
	$-xy^3z + 7yz + 18$
$\upsilon(x,y,z) = \mathbf{-3x^5y}$	

Βήμα 5 Προέκυψε το πολυώνυμο $-xy^3z + 7yz + 18$, το οποίο είναι ένα ακόμη **ενδιάμεσο υπόλοιπο**. Γράφουμε το πολυώνυμο αυτό ως γραμμικό συνδυασμό μονονύμων με φθίνουσα σειρά χρησιμοποιώντας τη λεξικογραφική διάταξη, δηλαδή $-xy^3z + 7yz + 18$. Ο μεγιστοβάθμιος όρος του(μαζί με τον συντελεστή του) είναι ο $-xy^3z$. Ο μεγιστοβάθμιος όρος του πρώτου όρου του διαιρέτη $f_1(x,y,z) = x^3yz^5 + 1$ είναι ο x^3yz^5. Παρατηρούμε ότι ο μεγιστοβάθμιος όρος x^3yz^5 του $f_1(x,y,z)$ δεν διαιρεί τον $-xy^3z$.

Θεωρούμε τώρα τον μεγιστοβάθμιο όρο του $f_2(x,y,z) = yz + 1$, ο οποίος είναι ο yz. Ο όρος αυτός διαιρεί τον $-xy^3z$, που είναι ο μεγιστοβάθμιος όρος του ενδιάμεσου υπολοίπου $-xy^3z + 7yz + 18$. Βρίσκουμε ως πηλίκο $-xy^2$ και το τοποθετούμε στο $\pi_2(x,y,z)$.

Έχουμε την εικόνα:

$f_1(x,y,z) = x^3yz^5 + 1$	$g(x,y,z) = 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18$
$f_2(x,y,z) = yz + 1$	$g(x,y,z) - 3x^5yf_2(x,y,z)$
	$= 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18 - 3x^5y(yz+1)$
$\pi_1(x,y,z)$	$= -3x^5y - xy^3z + 7yz + 18$
$\pi_2(x,y,z) = 3x^5y - xy^2$	$-xy^3z + 7yz + 18$
$\upsilon(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \mathbf{-3x^5y}$	$-xy^3z + 7yz + 18$

Βήμα 6 Πολλαπλασιάζουμε το πηλίκο $-xy^2$ επί το $f_2(x,y,z) = yz + 1$ και το αφαιρούμε από το $-xy^3z + 7yz + 18$. Βρίσκουμε το $xy^2 + 7yz + 18$, το οποίο είναι το νέο μας ενδιάμεσο υπόλοιπο.

Η εικόνα μας γίνεται τώρα η εξής:

$f_1(x,y,z) = x^3yz^5 + 1$	$g(x,y,z) = 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18$
$f_2(x,y,z) = yz + 1$	$g(x,y,z) - 3x^5yf_2(x,y,z)$
	$= 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18 - 3x^5y(yz+1)$
$\pi_1(x,y,z)$	$= -3x^5y - xy^3z + 7yz + 18$
$\pi_2(x,y,z) = 3x^5y - xy^2$	$-xy^3z + 7yz + 18$
	$-xy^3z + 7yz + 18 - (-xy^2(yz+1)) = xy^2 + 7yz + 18$
$\upsilon(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \mathbf{-3x^5y}$	

Βήμα 7 Συνεχίζουμε ξανά τη διαδικασία. Ο μεγιστοβάθμιος όρος του ενδιάμεσου υπολοίπου είναι ο xy^2, ο οποίος δεν διαιρείται με τον μεγιστοβάθμιο όρο του

πρώτου πολυωνύμου του διαιρέτη. Για το λόγο αυτό εξακολουθούμε να έχουμε το μηδενικό πολυώνυμο $\mathbf{0}(\mathbf{x})$, στο πρώτο πηλίκο. Η διαίρεση δεν συνεχίζεται ούτε με το δεύτερο πολυώνυμο-διαιρέτη. Για το λόγο αυτό βάζουμε το xy^2 στο υπόλοιπο και έχουμε την εικόνα ξανά

$f_1(x,y,z) = x^3yz^5 + 1$	$g(x,y,z) = 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18$
$f_2(x,y,z) = yz + 1$	$g(x,y,z) - 3x^5yf_2(x,y,z)$
	$= 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18 - 3x^5y(yz+1)$
$\pi_1(x,y,z)$	$= -3x^5y - xy^3z + 7yz + 18$
$\pi_2(x,y,z) = 3x^5y - xy^2$	$-xy^3z + 7yz + 18$
$\boldsymbol{\upsilon}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \mathbf{-3x^5y + xy^2}$	$-xy^3z + 7yz + 18 - (-xy^2(yz+1)) = xy^2 + 7yz + 18$
	$7yz + 18$

Βήμα 8 Τώρα φαίνεται πως θα συνεχίσουμε. Βρίσκουμε λοιπόν:

(α΄) πηλίκο $\pi_1(x,y,z) = \mathbf{0}(\mathbf{x})$, το μηδενικό πολυώνυμο

(β΄) πηλίκο $\pi_2(x,y,z) = 3x^5y - xy^2 + 7$

(γ΄) υπόλοιπο $\upsilon(x,y,z) = -3x^5y + xy^2 + 11$

Βήμα 9 Επιβεβαιώνουμε το αποτέλεσμα:

$$\Delta(x,y,z) = g(x,y,z) = \pi_1(x,y,z)\cdot f_1(x,y,z) + \pi_2(x,y,z)\cdot f_2(x,y,z) + \upsilon(x,y,z)$$

6.5 Σχόλια πάνω στον αλγόριθμο της διαίρεσης πολυωνύμων πολλών μεταβλητών

6.5.1 Η λεξικογραφική διάταξη

Η λεξικογραφική[5] διάταξη ορίζεται στο σύνολο:

$$E = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu) \mid \alpha_i \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, \} = \mathbb{N}\}$$

ως εξής:

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu) > (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_\nu) \iff$

$\alpha_1 > \beta_1 \;\; \eta' \;\; (\alpha_1 = \beta_1 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \alpha_2 > \beta_2) \;\; \eta' \;\; (\alpha_1 = \beta_1 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \alpha_2 = \beta_2 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \alpha_3 > \beta_3)$
$\eta' \;\; \cdots \;\; (\alpha_1 = \beta_1 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \alpha_2 = \beta_2 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \alpha_3 = \beta_3, \cdots \kappa\alpha\iota \;\; \alpha_{\nu-1} = \beta_{\nu-1} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \alpha_\nu > \beta_\nu)$

1. Από τον ορισμό έχουμε ότι $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu) > (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_\nu) \iff$ στη διαφορά $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu) - (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_\nu)$ η πρώτη μη-μηδενική συντεταγμένη είναι θετικός ακέραιος

2. Η λεξικογραφική διάταξη που ορίσαμε είναι ολική διάταξη, δηλαδή αν έχουμε δύο στοιχεία του Ε τα $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu)$ και $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_\nu)$, τότε ακριβώς μία σχέση από τις παρακάτω ισχύει:

   (α′) $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu) > (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_\nu)$

   (β′) $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu) < (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_\nu)$

   (γ′) $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_\nu)$

3. Η λεξικογραφική διάταξη είναι συμβατή με την πρόσθεση διανυσμάτων δηλαδή εάν $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu), (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_\nu) \;\; \kappa\alpha\iota \;\; (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\nu)$ τρία στοιχεία του Ε και $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu) > (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_\nu)$, τότε

   $$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu) + (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\nu) > (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_\nu) + (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\nu)$$

4. Κάθε πολυώνυμο $f(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_\nu]$, δηλαδή κάθε πολυώνυμο ν-μεταβλητών με συντελεστές από το σώμα $\mathbb{F}$, είναι άθροισμα μονονύμων της μορφής

   $$\lambda \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_\nu^{\alpha_{nu}}$$

   όπου $\lambda \in \mathbb{F}$ και $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu) \in E$
   Το λ λέγεται συντελεστής του μονονύμου
   και το διάνυσμα $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu) \in E$ λέγεται βαθμός του μονονύμου.

[5]Σκεφθείτε πως βάζουμε τις λέξεις σε ένα λεξικό και θα δικαιολογήσετε το όνομα

5. Κάθε πολυώνυμο $f(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_\nu]$, με τη βοήθεια της λεξικογραφικής διάταξης στο E, μπορεί να τεθεί στη μορφή αθροίσματος μονονύμων με φθίνουσα διάταξη. Η μορφή αυτή είναι μοναδική.

6.

Θεώρημα 6.5.1. *Κάθε μή κενό υποσύνολο του E έχει ελάχστο*

ΑπόδειξηΈστω A_1 το σύνολο των ακεραίων που εμφανίζονται στην πρώτη συντεταγμένη στοιχείων του E. Το σύνολο αυτό είναι μη-κενό σύνολο φυσικών αριθμών, άρα θα έχει ελάχιστο έστω κ_1. Έστω A_2 το σύνολο των ακεραίων που εμφανίζονται στην δεύτερη συντεταγμένη στοιχείων του E. Το σύνολο αυτό είναι μη-κενό σύνολο φυσικών αριθμών, άρα θα έχει ελάχιστο έστω κ_2. Συνεχίζοντας βρίσκουμε μία ν-άδα φυσικών $(\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_\nu)$. Η ν-άδα αυτή είναι στοιχείο του E και είναι το ελάχιστο στοιχείο του E (γιατί;;)

7.

Θεώρημα 6.5.2. *Ο αλγόριθμος τερματίζει σε πεπερασμένα βήματα*

Απόδειξη Άμεση από τα προηγούμενα

6.6 *Πηλίκο και υπόλοιπο*

Όταν ο αλγόριθμος της διαίρεσης του $\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ δια του διανύσματος πολυωνύμων
$(f_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), f_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), f_3(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), \cdots, f_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_\nu))$
τερματίσει έχουμε τη σχέση:

$$\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) =$$
$$\pi_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \cdot f_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$$
$$+ \pi_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \cdot f_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$$
$$+ \pi_3(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \cdot f_3(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$$
$$+ \cdots + \pi_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \cdot f_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_\nu))$$
$$+ \upsilon(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$$

1. Το πολυώνυμο $\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$
   το λέμε **Διαιρετέο**,
   Τη μ-άδα
   $(f_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), f_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), f_3(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), \cdots,$
   $f_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_\nu))$ τη λέμε **πηλίκο**
   και το πολυώνυμο
   $\upsilon(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ το λέμε **υπόλοιπο** της διαίρεσης.

6.7 Ασκήσεις

Παρακάτω τα α,β,γ είναι τα ψηφία του Αρ Μητρώου σου αρχίζοντας από το τέλος

1. Να γίνει η διαίρεση του πολυωνύμου $f(x,y) = (\alpha+2)x^3y^5+(\beta+2)x^3y^2+xy+2$ δια του ζεύγους $g_1(x,y) = xy+1, g_2(x,y) = x+y^2-1$
2. Να γίνει η διαίρεση του πολυωνύμου $f(x,y) = (\alpha+2)x^3y^5+(\beta+2)x^3y^2+xy+2$ δια του ζεύγους $g_2(x,y) = x+y^2-1, g_1(x,y) = xy+1$
3. **Προαιρετικό** Τι θα λέγατε σε μία τάξη για να πείσετε ότι έχει ενδιαφέρον να μάθουν διαίρεση;;

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης