



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικό και Καποδιστριακό  
Πανεπιστήμιο Αθηνών

---

## Υπολογιστική άλγεβρα

Ενότητα 2: Πολυωνυμικές σχέσεις και ταυτότητες, μέρος II

Ράπτης Ευάγγελος

Σχολή Θετικών επιστημών

Τμήμα Μαθηματικών

---



# Κεφάλαιο 2

## Πολυωνυμικές σχέσεις και ταυτότητες, μέρος II

Μάθημα 2, Τετάρτη 30 Απριλίου 2014

### 2.1 Τα συστήματα

Οι παραπάνω προβληματισμοί μας οδηγούν να ασχοληθούμε με τις μεθόδους λύσεων συστημάτων

μ εξισώσεων με  $\nu$  αγνώστους (μεταβλητές) της μορφής

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_\nu) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_\nu) = 0 \\ \vdots \\ f_\mu(x_1, x_2, \dots, x_\nu) = 0 \end{array} \right\} (\Sigma),$$

όπου  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_\nu)$  είναι πολυώνυμα με  $\nu$  αγνώστους (μεταβλητές) και συντελεστές από το  $\mathbb{F}$  ( όπου το  $\mathbb{F}$  είναι ένα σώμα)<sup>1</sup>.

1. Δείτε στο σημείο αυτό της μελέτης σας ένα σχετικό βίντεο. Το βίντεο θα το δείτε κάνοντας κλικ εδώ
2. Αν το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό, δηλαδή αποτελείται από γραμμικά πολυώνυμα<sup>2</sup>, τότε η Γραμμική Άλγεβρα είναι η κατάλληλη μαθηματική θεωρία

---

<sup>1</sup>Συνήθως στα παραδείγματα και στις ασκήσεις θα χρησιμοποιούμε το σώμα των πραγματικών αριθμών  $\mathbb{R}$ , το σώμα των μιγαδικών  $\mathbb{C}$ , το σώμα των ρητών  $\mathbb{Q}$  και σπανιότερα το σώμα των ακεραίων mod  $p$  όπου  $p$  ακέραιος πρώτος)

<sup>2</sup>Ένα γραμμικό πολυώνυμο με  $\nu$  μεταβλητές είναι της μορφής  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_\nu x_\nu + \beta$ , όπου  $\alpha_i, \beta \in \mathbb{F}$

## 14ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ, ΜΕΡΟΣ II

για την εύρεση των λύσεων αυτού<sup>3</sup>.

3. Αν το παραπάνω σύστημα έχει μόνο μία μεταβλητή και μία μόνο εξίσωση, δηλαδή  $n=1$  και  $m=1$ , τότε ουσιαστικά έχουμε να βρούμε τις ρίζες ενός πολυωνύμου. Σημειώνεται εδώ ότι μεταξύ άλλων κατάλληλη θεωρία για την μελέτη των ριζών του είναι η θεωρία Galois.

Έτσι σχηματικά και για λόγους αναφοράς παρακάτω αυτό που θα μας απασχολήσει είναι το

**Πρόβλημα 2.1.1.** Να λυθεί ένα σύστημα  $\mu$  πολυωνυμικών εξισώσεων με  $\nu$  μεταβλητές και συντελεστές από το σώμα  $\mathbb{F}$

Δύο είναι κυρίως οι μέθοδοι επίλυσης του παραπάνω προβλήματος :

1. Αλγεβρικές, μελέτη δηλαδή της δομής του δακτυλίου πολυωνύμων  $\mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_\nu]$ . Εδώ θα συναντήσουμε και θα ασχοληθούμε με τα θεωρήματα **Hilbert**
2. Γεωμετρικές, μελέτη δηλαδή της δομής του συνόλου λύσεων πολυωνυμικών συστημάτων π.χ μελέτη επιφανειών, γραμμών, σημείων τομής. Υπενθυμίζουμε εδώ ότι το σύνολο λύσεων ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος είναι ένας υπόχωρος. Το τελευταίο είναι ένα αρκετά σημαντικό αποτέλεσμα, διότι μπορούμε έτσι, βρίσκοντας μία βάση να κατανοήσουμε πλήρως τη δομή του συνόλου των λύσεων.

Σκοπός μας επίσης είναι η μελέτη και η κατασκευή αλγορίθμων οι οποίοι θα μας δίνουν τις λύσεις των συστημάτων. Η χρήση των μαθηματικών υπολογιστικών πακέτων γίνεται έτσι αναγκαία.

Θα χρησιμοποιούμε το υπολογιστικό πακέτο *wolframalpha*. Δείτε στην διεύθυνση εδώ

### 2.1.1 Υποδείξεις για ερύτερη μελέτη

1. Να μελετήσετε τα αναγραφόμενα για τα πολυώνυμα στην σελίδα εδώ
2. Να μελετήσετε τα αναγραφόμενα για τις πολυωνυμικές εξισώσεις και τα συστήματα εξισώσεων στη σελίδα εδώ

### 2.1.2 Άσκηση

Προαιρετική άσκηση για σκέψη και μελέτη

---

<sup>3</sup> Για καλή κατανόηση των θεμάτων που διαπραγματεύεται το βιβλίο αυτό είναι αναγκαίο ο αναγνώστης να έχει αρκετές γνώσεις από την Γραμμική άλγεβρα

1. Να μελετήσετε και να βρείτε πληροφορίες για το σύνολο λύσεων στο  $\mathbb{R}$  του παρακάτω συστήματος

$$x^{\alpha+7} + y^{\beta+5} = 1$$

$x^{\gamma+6} + y^{\alpha+10} = 1$ , όπου  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι τα τρία τελευταία ψηφία του Αρ. Μητρώου σας, αρχίζοντας από το τέλος.

*Εξετάστε εάν το παραπάνω σύστημα έχει πεπερασμένο ή άπειρο σύνολο λύσεων*

2. Να λυθεί το σύστημα

$$(\alpha + 7)x^3 + 5x^2 + (6 + \beta)x + (\gamma + 13) = 0$$

$$(\alpha + 9)x^7 + 12x^3 + (16 + \beta)x + (2\gamma + 13) = 0$$

όπου  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι τα τρία τελευταία ψηφία του Αρ. Μητρώου σας, αρχίζοντας από το τέλος.

### 2.1.3 Υποδείξεις για την παραπάνω άσκηση

1. Εδώ έχουμε ένα σύστημα δύο πολυωνυμικών εξισώσεων με πραγματικούς συντελεστές. Το σύστημα αυτό έχει λύσεις, για παράδειγμα  $x = 1, y = 0$  είναι μία λύση Αυτό είναι προφανές και έτσι με την παρατήρηση αυτή δεν χρειάζεται να χάσουμε χρόνο να εξετάσουμε αν το σύνολο λύσεων  $\Lambda$  είναι μη-κενό. Παραμένει όμως το σημαντικό ερώτημα:

**Πότε ένα σύστημα πολυωνυμικών εξισώσεων έχει μή-κενό σύνολο λύσεων;**

Δείτε στην αρχή το σύστημα ποιοτικά. Αν ήταν γραμμικό, τότε θα ήταν γνωστής μορφής και το σύνολο λύσεων θα ήταν εύκολο να περιγραφεί. Σκεφθείτε γιατί.

Αν ήταν επίσης της μορφής:

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

θα θέσουμε  $x^2 = X, y^2 = Y$  και θα το λύσουμε ως γραμμικό. Η δυσκολία επίλυσης βρίσκεται στους εκθέτες λοιπόν. Προσπαθήστε να ανακαλύψετε δικές σας μεθόδους ή χρησιμοποιείστε και το AXIOM αλλά να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα

2. Γιατί το σύστημα του ερωτήματος 1 έχει πεπερασμένο σύνολο λύσεων

*Σκεφθείτε πάνω στο ερώτημα αυτό*

16ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ, ΜΕΡΟΣ ΙΙ

# Σημειώματα

## Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Ράπτης Ευάγγελος, 2014. Ράπτης Ευάγγελος. «Υπολογιστική άλγεβρα. Ενότητα 2: Πολυωνυμικές σχέσεις και ταυτότητες, μέρος II». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/MATH14/>.

## Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

## Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

