ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Υπολογιστική άλγεβρα

Ενότητα 12: Ο αλγόριθμος του Buchberger

Ράπτης Ευάγγελος

Σχολή Θετικών επιστημών

Τμήμα Μαθηματικών

Κεφάλαιο 12

Ο Αλγόριθμος του Buchberger

Τετάρτη 4 Ιουνίου 2014

12.1 Ο Αλγόριθμος του Buchberger

Ως τώρα έχουμε συζητήσει και αποδείξει την ύπαρξη βάσης Groebner ενός ιδεώδους I. Παρακάτω θα διατυπώσουμε έναν αλγόριθμο εύρεσης βάσης Groebner, που οφείλεται στον Buchberger μαθητή του Groebner. Υπενθυμίζουμε ότι βάση Groebner ενός ιδεώδους I του δακτυλίου πολυωνύμων $\mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_\nu]$ *είναι ένα πεπερασμένο σύνολο πολυωνύμων του I.*

Μία βάση Groebner του ιδεώδους I έχει πολλές χρήσιμες ιδιότητες, μεταξύ άλλων και την ιδιότητα να παράγουν το I. Οι βάσεις Groebner ορίσθηκαν αρχικά το 1965 από τον μαθητή του W. Groebner (1899-1980) τον B.Buchberger. Επίσης ο H.Hironaka το 1965 μελετώντας δακτυλίους δυναμοσειρών ανακάλυψε ανεξάρτητα από τον B.Buchberger την ίδια έννοια της βάσης Groebner. Χρειάσθηκαν μερικά χρόνια για να αναπτυχθούν και οι υπολογιστές, ώστε η θεωρία και οι εφαρμογές των βάσεων να λάβουν τη σημερινή μορφή

1. *Έστω* $f_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ *και* $f_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ *δύο πολυώνυμα του δακτυλίου* $\mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_\nu]$ *Υποθέτουμε ότι οι μεγιστοβάθμιοι όροι των παραπάνω πολυωνύμων (μαζί με τους συντελεστές τους) είναι:*
   $\alpha \cdot x_1^{\kappa_1} x_2^{\kappa_2} \cdots x_\nu^{\kappa_\nu}$ *του* $f_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ *και*
   $\beta \cdot x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_\nu^{\lambda_\nu}$ *του* $f_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$
   Υπενθυμίζουμε ότι πρέπει $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \kappa_i \geq 0, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, \nu$

   Ορισμός 12.1.1. Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο *των μονονύμων* $x_1^{\kappa_1} x_2^{\kappa_2} \cdots x_\nu^{\kappa_\nu}$ *και* $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_\nu^{\lambda_\nu}$ *είναι το*
   $x_1^{\xi_1} x_2^{\xi_2} \cdots x_\nu^{\xi_\nu}$ *όπου* $\xi_i = max(\kappa_i, \lambda_i), i = 1, 2, 3, \cdots \nu$

2. *Συνεχίζουμε με ακόμη ένα ορισμό:*

Ορισμός 12.1.2. *Έστω $f_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ και $f_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ δύο πολυώνυμα, όπως παραπάνω* S-**πολυώνυμο** *των f_1, f_2 είναι το πολυώνυμο*

$$S(f_1, f_2) = \frac{x_1^{\xi_1} x_2^{\xi_2} \cdots x_\nu^{\xi_\nu}}{\alpha \cdot x_1^{\kappa_1} x_2^{\kappa_2} \cdots x_\nu^{\kappa_\nu}} \cdot f_1 - \frac{x_1^{\xi_1} x_2^{\xi_2} \cdots x_\nu^{\xi_\nu}}{\beta \cdot x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_\nu^{\lambda_\nu}} \cdot f_2$$

3. *Ένα σημαντικό θεώρημα εδώ είναι το παρακάτω*

Θεώρημα 12.1.3. *Έστω $\mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_\nu]$ ο δακτύλιος των πολυωνύμων και $I =< f_1, f_2, \cdots, f_\mu >$ ένα ιδεώδες αυτού. Το σύνολο $G = \{f_1, f_2, \cdots, f_\mu\}$ είναι βάση Groebner του ιδεώδους I, εάν και μόνο εάν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $S(f_i, f_j)$ διά του G είναι μηδέν για κάθε ζεύγος $i, j, i \neq j, 1, j = 1, 2, \cdots, \nu$*

Απόδειξη *Για την απόδειξη του βασικού αυτού θεωρήματος, το οποίο θα γίνει προσεχώς, χρειαζόμαστε μερικές προτάσεις και λήμματα:*

Το παραπάνω θεώρημα οδηγεί στον αλγόριθμο του Buchberger.

Για τη ζωή και το έργο του Buchberger δείτε εδώ

4. **Αλγόριθμος του Buchberger**

Βήμα 1 *Τοποθετούμε σε μία σειρά τα πολυώνυμα $f_1, f_2, \cdots, f_\mu$*

Βήμα 2 *Υπολογίζουμε το πολυώνυμο $S(f_1, f_2)$*

Βήμα 3 *Υπολογίζουμε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $S(f_1, f_2)$ διά του συνόλου $\{f_1, f_2, \cdots, f_\mu\}$.*

Βήμα 4 *Εάν το προηγούμενο υπόλοιπο είναι μηδέν, τότε συνεχίζουμε με το $S(f_1, f_3)$ διαιρώντας το με το σύνολο $\{f_1, f_2, \cdots, f_\mu\}$.*
Εάν όμως δεν είναι μηδέν θεωρούμε το νέο σύνολο $\{f_1, f_2, \cdots, f_\mu, \upsilon(S(f_1, f_2))\}$[1] *στη θέση του παλαιού.*

Βήμα 5 *Συνεχίζουμε τον αλγόριθμο ελέγχοντας όλα τα $S(f_i, f_j)$ (Τα υπόλοιπά τους) και προσθέτοντας στο αρχικό σύνολο και τα πολυώνυμα $\upsilon(S(f_i, f_j))$ αν χρειάζεται.*

Βήμα 6 *Ο αλγόριθμος τερματίζει αν σε όλους τους ελέγχους που περιγράψαμε ΟΛΑ τα υπόλοιπα είναι μηδέν*

Δείτε στο internet τα παρακάτω για ευρύτερη μελέτη:

1. *Στη διεύθυνση εδώ για ένα αρκετά κατατοπιστικό άρθρο*

2. *Στη διεύθυνση εδώ το άρθρο από την εγκυκλοπαίδεια Wikipedia*

[1] Με $\upsilon(S(f_1, f_2))\}$ θα συμβολίζουμε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $S(f_1, f_2)$ με τα υπόλοιπα πολυώνυμα

12.2 Ασκήσεις

Τα α,β,γ είναι τα τρία τελευταία ψηφία του Αριθμού Μητρώου σας, αρχίζοντας από το τέλος.

1. *Να εφαρμόσετε τον αλγόριθμο του Buchberger για το ιδεώδες* $< f(x) = (\alpha+2)x^3 + 5x + 3, (\beta+2)x^2 + x + 1 > \lhd \mathbb{R}[x]$
2. *Να εφαρμόσετε τον αλγόριθμο του Buchberger για το ιδεώδες* $< h(x,y) = (\gamma+2)x + (\alpha+1)y - \alpha - \gamma - 3, \kappa(x,y) = x + y - 2 > \lhd \mathbb{R}[x,y]$

Μέρος IV

Εφαρμογές

12.3 Τεχνητή Νοημοσύνη

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τη γενική μαθηματική ιδέα της τεχνητής νοημοσύνης .

12.4 Το Θεώρημα βάσης του Hilbert

Θεώρημα 12.4.1. *Έστω I ένα ιδεώδες του δακτυλίου πολυωνύμων $\mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_\nu]$. Υπάρχει πεπερασμένο πλήθος πολυωνύμων του $\mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_\nu]$, το οποίο παράγει το I.*

Απόδειξη: *Αν το I είναι το μηδενικό ιδεώδες, δηλαδή $I = \{\mathbf{0}\}$, τότε μπορούμε να πούμε ότι το μηδενικό πολυώνυμο του $\mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_\nu]$ παράγει το I και έτσι το θεώρημα ισχύει.*

Έστω τώρα ότι $I \neq \{\mathbf{0}\}$. Όπως έχουμε αποδείξει το I έχει (τουλάχιστον) μία βάση Groebner, έστω
$B = \{g_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), g_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), g_3(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), \cdots, g_\kappa(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)\}$.

Θα αποδείξουμε ότι το B παράγει το I, δηλαδή το σύνολο των πολυωνυμικών συνδυασμών του B είναι ίσο με το I.

Έστω $f(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ ένα πολυώνυμο του ιδεώδους I. Κάνουμε τη διαίρεση του $f(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ διά του συνόλου B. Έχουμε:

$f(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) =$
$h_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \cdot g_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) + \cdots + h_\kappa(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \cdot g_\kappa(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) +$
$\Upsilon(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$, *όπου $\Upsilon(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ τουπόλοιπο της διαίρεσης.*

Την τελευταία σχέση μπορούμε να την γράψουμε:

$\Upsilon(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) = f(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) - h_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \cdot g_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) - \cdots - h_\kappa(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \cdot g_\kappa(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$

Επειδή τα πολυώνυμα $f(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), g_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), \cdots, g_\kappa(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ ανήκουν στο ιδεώδες I θα ανήκει επίσης στο ιδεώδες και το πολυώνυμο $\Upsilon(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$

Όμως το σύνολο $B = \{g_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), g_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), g_3(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), \cdots, g_\kappa(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)\}$ είναι μία βάση Groebner του I, άρα ο μεγιστοβάθμιος όρος του $\Upsilon(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ θα ανήκει στο ιδεώδες που παράγουν οι μεγιστοβάθμιοι όροι των πολυωνύμων του συνόλου B (δες τον ορισμό της βάσης Groebner .)

Υπάρχουν τώρα δύο περιπτώσεις:

1. *Το πολυώνυμο $\Upsilon(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ να είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε έχουμε ότι το $f(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ ανήκει στο ιδεώδες που παράγεται από το σύνολο B, κάτι στο οποίο θέλαμε να καταλήξουμε.*

2. *Το πολυώνυμο $\Upsilon(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ να μήν είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε έχει κάποιον μη-μηδενικό μεγιστοβάθμιο όρο. Ο τελευταίος θα διαιρείται από κάποιον μεγιστοβάθμιο όρο κάποιου πολυωνύμου του B. Για να δείτε ότι ισχύει ο τελευταίος ισχυρισμός, δείτε το βίντεο εδώ ή εδώ. Όμως αν συνέβαινε*

κάτι τέτοιο η αρχική διαίρεση θα είχε προχωρήσει και δεν θα είχαμε αυτό το υπόλοιπο. Καταλήγουμε έτσι σε άτοπο.

Πόρισμα 12.4.2. *Ένα πολυώνυμο* $f(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_\nu]$, *ανήκει στο ιδεώδες* I *εάν και μόνο εάν το υπόλοιπό του από τη διαίρεση με μία βάση Groebner του* I *είναι μηδέν.*

Απόδειξη *άμεση από τα προηγούμενα*
Η πρώτη εφαρμογή σχετίζεται με το ερώτημα:

Ερώτημα 1. *Μπορεί ο υπολογιστιστής να αποδεικνύει μαθηματικά θεωρήματα;*

12.5 Αυτόματη απόδειξη Γεωμετρικών Θεωρημάτων

Η ιδέα της αυτόματης απόδειξης είναι η παρακάτω:
Εάν οι υποθέσεις και τα συμπεράσματα ενός θεωρήματος μπορούν να διατυπωθούν με πολυώνυμα, τότε η απόδειξη του θεωρήματος συνίσταται στην εξέταση εάν κάποια πολυώνυμα βρίσκονται σε ένα ιδεώδες ή όχι
Δείτε πληροφορίες για τον επιστημονικό κλάδο Automated theorem proving εδώ
Παρακάτω δίνουμε ένα παράδειγμα για να φανεί η ιδέα:

Παράδειγμα 12.5.1. *Έστω Α,Β,Δ,Γ οι κορυφές ενός παραλληλογράμμου*[2] *(με τη σειρά που δίδονται). Να δειχθεί ότι οι διαγώνιες ΑΔ και ΒΓ διχοτομούνται*

Αυτόματη γεωμετρική απόδειξη

1. *Θεωρούμε ένα παλληλόγραμμο ΑΒΔΓ με ΑΒ παράλληλο του ΔΓ και ΒΔ παράλληλο του ΑΓ (***προσοχή στο σχήμα***)*

2. *Οι ιδιότητες των σχημάτων στην Ευκλείδεια Γεωμετρία παραμένουν οι ίδιες αν εφαρμόσουμε σε αυτά στροφές ή μεταφορές. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κορυφή Α είναι στην αρχή των αξόνων (0,0) και η ακμή ΑΒ στον οριζόντιο άξονα με* $B = (u_1, 0)$ *για κάποιο* $u_1 \neq 0$

3. *Μπορούμε να θεωρούμε το* u_1 *ως ανεξάρτητη μεταβλητή.*

4. *Η κορυφή* $\Gamma = (u_2, u_3)$ *εισάγει δύο νέες μεταβλητές* u_2 *και* u_3. *Η κορυφή Δ δεν εισάγει νέες ανεξάρτητες μεταβλητές, διότι η δήλωση ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, σημαίνει, μεταξύ άλλων, ότι η θέση του Δ προσδιορίζεται πλήρως από τη θέση των Α,Β και Γ*

[2] Ευχαριστώ θερμά τον Στέλιο Βιτωράκη για την σχεδίαση

5. Ας συμβολίσουμε με $\Delta = (x_1, x_2)$ τις συντεταγμένες του Δ

6. Έχουμε ότι ΑΒ παράλληλος της ΔΓ, άρα $x_2 - u_3 = 0$

7. Έχουμε ΑΓ παράλληλος της ΒΔ, άρα $\frac{u_3}{u_2} = \frac{x_2}{x_1 - u_1}$

8. Θεωρούμε δύο πολυώνυμα $h_1(u_1, u_2, u_3, x_1, x_2) = x_2 - u_3$ και $h_2(u_1, u_2, u_3, x_1, x_2) = (x_1 - u_1)u_3 - x_2 u_2$. Τα πολυώνυμα αυτά ανήκουν στον δακτύλιο $\mathbb{R}[u_1, u_2, u_3, x_1, x_2]$ των πολυωνύμων πέντε μεταβλητών με συντελεστές πραγματικούς αριθμούς. Από τα παραπάνω έχουμε ότι:

   Το ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο εάν και μόνο εάν
   $h_1(u_1, u_2, u_3, x_1, x_2) = 0$ και $h_1(u_1, u_2, u_3, x_1, x_2) = 0$

9. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το σημείο τομής των διαγωνίων είναι το $N = (x_3, x_4)$. Η δήλωση ότι το Ν είναι το σημείο τομής των διαγωνίων είναι ισοδύναμη με τη δήλωση ότι οι τριάδες σημείων (Α,Ν,Δ) και (Β,Ν,Γ) αποτελούνται από συγγραμμικά σημεία.

10. Έχουμε:

    (α΄) Τα Α,Ν,Δ συγγραμμικά εάν και μόνο εάν $\frac{x_4}{x_3} = \frac{u_3}{x_1}$
    (β΄) Τα Β,Ν,Γ συγγραμμικά εάν και μόνο εάν $\frac{x_4}{x_3 - u_1} = \frac{u_3}{u_2 - u_1}$

11. Θεωρούμε τα πολυώνυμα
    $h_3(u_1, u_2, u_3, x_1, x_2) = x_4 x_1 - x_3 u_3$ και
    $h_4(u_1, u_2, u_3, x_1, x_2) = x_4(u_2 - u_1) - (x_3 - u_1)u_3$

12. Μπορούμε εδώ να σκεφθούμε και να αποδείξουμε εύκολα ότι οι υποθέσεις ισχύουν εάν και μόνο εάν
    δηλαδή μετατρέψαμε τις υποθέσεις του θεωρήματος σε σχέσεις πολυωνύμων.

13. Τώρα σκεφτόμαστε σχετικά με τα ζητούμενα, δηλαδή την διερεύνηση του ερωτήματος εάν οι διαγώνιοι διχοτομούνται. Έχουμε ότι

    Οι διαγώνιοι διχοτομούνται εάν και μόνο εάν $AN = N\Delta$ και $BN = N\Gamma$.

    Το παραπάνω είναι ισοδύναμο με τα εξής:

    (α΄) $AN = N\Delta$ εάν και μόνο εάν $x_3^2 + x_4^2 = (x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2$
    (β΄) $BN = N\Gamma$ εάν και μόνο εάν $(x_3 - u_1)^2 + x_4^2 = (x_3 - u_2)^2 + (x_4 - u_3)^2$

14. Θεωρούμε τα πολυώνυμα:
    $g_1(u_1, u_2, u_3, x_1, x_2) = -x_3^2 - x_4^2 + (x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2$ και
    $g_2(u_1, u_2, u_3, x_1, x_2) = (x_3 - u_2)^2 + (x_4 - u_3)^2 - (x_3 - u_1)^2 - x_4^2$

15. *Προφανώς τα συμπεράσματα που θέλουμε να αποδείξουμε κωδικοποιούνται στα πολυώνυμα* $g_1(u_1,u_2,u_3,x_1,x_2)$ *και* $g_2(u_1,u_2,u_3,x_1,x_2)$ *με*
$g_1(u_1,u_2,u_3,x_1,x_2) = x_1^2 - 2x_1x_3 - 2x_4x_2 + x_2^2$ *και*
$g_2(u_1,u_2,u_3,x_1,x_2) = 2x_3u_1 - 2x_3u_2 - 2x_4u_3 - u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$

16. *Αναλύουμε λίγο περισσότερο τα παραπάνω: Οι υποθέσεις μας είναι ότι το σχήμα ΑΒΔΓ είναι παραλληλλόγραμμο και ότι οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο Ν. Οι υποθέσεις αυτές ισοδυναμούν με τον μηδενισμό των πολυωνύμων*
$$\begin{array}{l} h_1(u_1,u_2,u_3,x_1,x_2) \\ h_2(u_1,u_2,u_3,x_1,x_2) \\ h_3(u_1,u_2,u_3,x_1,x_2) \\ h_4(u_1,u_2,u_3,x_1,x_2) \end{array}$$
. Εμείς θέλουμε να αποδείξουμε ότι οι διαγώνιες διχοτομούνται. Αυτό είναι ισοδύναμο με τον μηδενισμό των πολυωνύμων $g_1(u_1,u_2,u_3,x_1,x_2)$ *και* $g_2(u_1,u_2,u_3,x_1,x_2)$ *Αν τα πολυώνυμα* g_1 *και* g_2 *ανήκουν στο ιδεώδες* $< h_1,h_2,h_3,h_4 >$, *τότε τα* g_1 *και* g_2 *είναι πολυωνυμικοί συνδυασμοί των* $\{h_1,h_2,h_3,h_4\}$. *Αν για παράδειγμα έχουμε*
$g_1(u_1,u_2,u_3,x_1,x_2) = \xi_1(u_1,u_2,u_3,x_1,x_2)\cdot h_1(u_1,u_2,u_3,x_1,x_2) + \cdots +$
$\xi_4(u_1,u_2,u_3,x_1,x_2)\cdot h_4(u_1,u_2,u_3,x_1,x_2)$, *τότε ο μηδενισμός των* $\{h_1,h_2,h_3,h_4\}$ *συνεπάγεται τον μηδενισμό του* g_1

17. *Ο υπολογιστής μας, λοιπόν, προκειμένου να αποδείξει το θεώρημα, θα υπολογίσει μία βάση Groebner του ιδεώδους* $I =< h_1,h_2,h_3,h_4 >$, *και μετά το υπόλοιπο της διαίρεσης των* g_1 *και* g_2 *με τη βάση αυτή. Γνωρίζουμε ότι τα υπόλοιπα της διαίρεσης με βάση Groebner είναι μοναδικά και τα πολυώνυμα ανήκουν στο ζητούμενο ιδεώδες εάν και μόνο εάν το υπόλοιπο είναι το μηδενικό πολυώνυμο. (***Να κάνετε εσείς τον έλεγχο***).*

12.6 Τεχνητή Νοημοσύνη και Γραμμική άλγεβρα

Μια γνωστή μας άσκηση από την γραμμική άλγεβρα είναι ότι αν έχουμε έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *με* $A^3 = 0$ *τότε* $A^2 = 0$. *Προσπαθήστε αρχικά να την λύσετε με τη βοήθεια των γνώσεών σας από τη Γραμμική άλγεβρα.*

Για τη λύση της παραπάνω άσκησης στη Γραμμική άλγεβρα χρησιμοποιούμε το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο. Εργαζόμαστε ως εξής: Ο πίνακας Α μηδενίζει το πολυώνυμο $f(x) = x^3$. *Αν* $m(x)$ *είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα, γνωρίζουμε ότι το* $m(x)$ *θα είναι το πολύ δευτέρου βαθμού και θα διαιρεί το* $f(x) = x^3$. *Οι μόνες περιπτώσεις είναι οι* $m(x) = x$ *και* $m(x) = x^2$. *Όμως ο πίνακας Α μηδενίζει το ελάχιστο πολυώνυμό του. Τελικά είτε Α=0 είτε* $A^2 = 0$. *Και στις* *δύο περιπτώσεις μπορούμε να αποδείξουμε ότι $A^2 = 0$. Σχόλιο: Εδώ εργασθήκαμε όπως συνήθως εργαζόμαστε στη Γραμμική άλγεβρα*[3]

Θα παρουσιάσουμε τώρα μια προσέγγιση με τη θεωρία βάσεων Grobner που έχουμε μάθει. Έστω λοιπόν ότι ο πινακάς μας είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Με την υπόθεση ότι

$$A^3 = \begin{pmatrix} a^3 + 2abc + bcd & a^2b + b^2c + abd + bd^2 \\ a^2c + acd + c^2d + gd^2 & abc + 2bcd + d^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

θα δείξουμε ότι

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & cb + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Η υπόθεση της άσκησης μπορεί να εκφραστεί με την γλώσσα των πολυωνύμων ως

$$\begin{aligned} f_1 &= a^3 + 2abc + bcd = 0 \\ f_2 &= a^2b + b^2c + abd + bd^2 = 0 \\ f_3 &= a^2c + acd + c^2d + cd^2 = 0 \\ f_4 &= abc + 2bcd + d^3 = 0 \end{aligned}$$

και το συμπέρασμα ως

$$\begin{aligned} g_1 &= a^2 + bc \\ g_2 &= ab + bd \\ g_3 &= ac + cd \\ g_4 &= bc + d^2 \end{aligned}$$

Θεωρούμε το ιδεώδες $I =< f_1, f_2, f_3, f_4 >$ και βρίσκουμε μια βάση Grobner G. Εκτελέστε τις διαιρέσεις g_1 με G, g_2 με G, g_3 με G και g_4 με G και βρείτε το υπόλοιπο τους. Τι παρατηρείτε;

1. *Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ(με ορθή γωνία την Α), σχηματίζουμε το ύψος ΑΗ. Εξετάστε εάν ένας υπολογιστής με την « γλώσσα των πολυωνύμων», μπορεί να αποδείξει, ότι τα τρία μέσα των πλευρών και το σημείο Η βρίσκονται στην περιφέρεια κάποιου κύκλου.*

[3] Ξεφυλίστε στα γρήγορα εδώ ένα βιβλίο Γραμμικής άλγεβρας για να θυμηθείτε τα σχετικά θεωρήματα

2. *Εξετάστε εάν ένας υπολογιστής με την « γλώσσα των πολυωνύμων», μπορεί να αποδείξει, ότι οι τρείς διάμεσοι οποιουδήποτε τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.*

3. *Εξετάστε εάν ένας υπολογιστής με την « γλώσσα των πολυωνύμων», μπορεί να αποδείξει, ότι οι τρείς διχοτόμοι οποιουδήποτε τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.*

4. *Εξετάστε εάν ένας υπολογιστής με την « γλώσσα των πολυωνύμων», μπορεί να αποδείξει, ότι τα τρία ύψη οποιουδήποτε τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.*

5. *Εξετάστε εάν ένας υπολογιστής με την « γλώσσα των πολυωνύμων», μπορεί να αποδείξει το παρακάτω θεώρημα του Euler: Σε κάθε τρίγωνο το ορθόκεντρο (σημείο τομής των υψών), το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου και το σημείο τομής των διαμέσων είναι συγγραμμικά σημεία*

Τέλος του έκτου μαθήματος

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών, Ράπτης Ευάγγελος, 2014. Ράπτης Ευάγγελος. «Υπολογιστική άλγεβρα. Ενότητα 12: O αλγόριθμος του Buchberger». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/MATH14/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση.   Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης