ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Υπολογιστική άλγεβρα

Ενότητα 13: Βάσεις Groebner και Ρομποτική

Ράπτης Ευάγγελος

Σχολή Θετικών επιστημών

Τμήμα Μαθηματικών

Κεφάλαιο 13

Βάσεις Groebner και Ρομποτική

Τετάρτη 11 Ιουνίου 2014

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε επίπεδα ρομπότ για να κατανοήσουμε τις μαθηματικές ιδέες που απαιτούνται για τη λειτουργία τους.

Για ευρύτερη μελέτη μπορεί κανείς να δεί εδώ
και επίσης στο βιβλίο εδώ σελίδα 261. Στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν επίπεδα ρομπότ και έτσι θεωρούμε ουσιαστικά την προβολή ενός τρισδιάστατου ρομπότ επί ενός επιπέδου.

Ένα ρομπότ, λοιπόν, θα είναι ένα σύνολο βραχιόνων, οι οποίοι συνδέονται με αρθρώσεις. Θα θεωρούμε ότι οι βραχίονες έχουν σταθερό μήκος και οι αρθρώσεις αφήνουν τους βραχίονες να περιστραφούν πλήρως.

Για να φανεί η μέθοδος μελέτης θα περιγράψουμε ένα παράδειγμα

Παράδειγμα 13.0.1. *Να μελετηθεί ένα επίπεδο ρομπότ με ένα σταθερό βραχίονα και δύο μετακινούμενους.*

Το μήκος του σταθερού βραχίονα είναι α_0. Το μήκος του πρώτου κινητού βραχίονα είναι α_1 και του δεύτερου α_2. Σε κάθε άρθρωση θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων. Έτσι έχουμε ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων στον αρχικό βραχίονα (στην σταθερή άρθρωση) και ένα σύστημα συντεταγμένων σε κάθε άλλη άρθρωση. Σύστημα συντεταγμένων σημαίνει δύο άξονες. Σε κάθε άρθρωση ο ένας άξονας είναι ο άξονας που προσδιορίζει ο προηγούμενος βραχίονας και ο άλλος ο κάθετος. Σε αθε άρθρωση έχουμε και μία γωνία, η οποία είναι η γωνία που πρέπει να περιστραφεί ο προηγούμενος βραχίονας με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού για να συμπέσει στον επόμενο βραχίονα. Δες και τα σχήματα παρακάτω.

Μπορείτε επίσης να δείτε τα σχήματα:
εδώ

και
εδώ
Δείτε *επίσης στην σελίδα του μαθήματος τις συνδέσεις* $robot1$ *και* $robot2$

Εδώ[1] *μας ενδιαφέρει η θέση του τελευταίου σημείου (χεριού). Είναι γεγονός επίσης ότι η διαφορετική κατασκευή του άκρου απαιτεί από ένα μαθηματικό να λύσει ενδεχομένως διαφορετικές εξισώσεις. Για να προσδιορίσουμε τη θέση του ακραίου σημείου, αρκεί να βρούμε τις συντεταγμένες ως προς το σταθερό σύστημα συντεταγμένων. Αν λοιπόν έχουμε δύο κινητούς βραχίονες έχουμε ότι η προβολή στον οριζόντιο άξονα είναι*

$$x_0 = \alpha_1 \cdot \sigma\upsilon\nu(\theta_1) + \alpha_2 \cdot \sigma\upsilon\nu(\theta_1 + \theta_2)$$

Ομοίως στον κάθετο άξονα του σταθερού συστήματος συντεταγμένων έχουμε:

$$y_0 = \alpha_1 \cdot \eta\mu(\theta_1) + \alpha_2 \cdot \eta\mu(\theta_1 + \theta_2)$$

Δύο είναι τα προβλήματα που φυσιολογικά εμφανίζονται

1. **Το ευθύ κινηματικό πρόβλημα**
   Το πρόβλημα αυτό διατυπώνεται ως εξής: Δεδομένου του ρομπότ (δηλαδή των βραχιόνων, αρθρώσεων κλπ) και επίσης δεδομένων των συντεταγμένων (x_0, y_0) *να βρεθεί αν το χέρι, φτάνει στο σημείο αυτό και με πόσους τρόπους. Αυτό είναι ισοδύναμο αν το σύστημα*

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha_1 \cdot \sigma\upsilon\nu(\theta_1) + \alpha_2 \cdot \sigma\upsilon\nu(\theta_1 + \theta_2) \\ y_0 &= \alpha_1 \cdot \eta\mu(\theta_1) + \alpha_2 \cdot \eta\mu(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

   έχει λύσεις και πόσες. Το πρόβλημα είναι όμως ότι στο σύστημα εμπλέκονται τριγωνομετρικές συναρτήσεις (οι οποίες **δεν** *είναι πολυωνυμικές)*[2]. *Μία πρόσθετη δυσκολία είναι ότι εμφανίζονται τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος. Για να αντιμετωπίσουμε τα παραπάνω εμπόδια εργαζόμαστε ως εξής:*

   Κατ΄ αρχήν είναι γνωστές οι τριγωνομετρικές σχέσεις:
   $\sigma\upsilon\nu(\theta_1 + \theta_2) = \sigma\upsilon\nu(\theta_1) \cdot \sigma\upsilon\nu(\theta_2) - \eta\mu(\theta_1) \cdot \eta\mu(\theta_2)$
   $\eta\mu(\theta_1 + \theta_2) = \eta\mu(\theta_1) \cdot \sigma\upsilon\nu(\theta_2) + \eta\mu(\theta_2) \cdot \sigma\upsilon\nu(\theta_1)$

   Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu(\theta_1) = x_1, \eta\mu(\theta_1) = y_1, \sigma\upsilon\nu(\theta_2) = x_2, \eta\mu(\theta_1) = y_2$

[1] Ευχαριστώ θερμά τον Στέλιο Βιτωράκη για την σχεδίαση

[2] Ένας εύκολος τρόπος για να δεί κανείς ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(x)$ δεν είναι πολυωνυμική είναι η παραγώγιση. Παραγωγίζοντας πολλές φορές ένα πολυώνυμο μιας μεταβλητής με πραγματικούς συντελεστές γίνεται η μηδενική συνάρτηση, ενώ η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(x)$ δεν γίνεται ποτέ

και έχουμε το παρακάτω σύστημα πολυωνυμικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} &x_0 = \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot (x_1 x_2 - y_1 y_2) \\ &y_0 = \alpha_1 \cdot y_1 + \alpha_2 (x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ &x_1^2 + y_1^2 = 1 \\ &x_2^2 + y_2^2 = 1 \end{aligned}$$

Αν τα x_0, y_0 είναι δεδομένα, τότε αναγόμαστε σε ένα σύστημα πολυωνυμικών εξισώσεων, το οποίο το λύνουμε χρησιμοποιώντας κάποιο υπολογιστικό πακέτο (π.χ το Axiom). Μπορούμε επίσης να βρούμε και τη βάση Groebner του συστήματος και να κάνουμε διερεύνηση για το σύνολο λύσεων. Μη κενό σύνολο λύσεων του συστήματος, σημαίνει ότι το άκρο του Ρομπότ φθάνει στο συγκεκριμένο σημείο. Κάθε λύση δίνει και έναν διαφορετικό τρόπο προσέγγισης.

Είναι ενδεχόμενο επίσης να έχουμε τρείς κινούμενους βραχίονες, οπότε θα εμφανισθούν τριγωνομετρικοί αριθμοί της μορφής $\sigma\upsilon\nu(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), \eta\mu(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$. Στην περίπτωση αυτή αναπυσσουμε τον τριγωνομετρικό αριθμό του αθροίσματος και εργαζόμαστε όπως πρίν.

2. **Το αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα**

   Το αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής: Δεδομένου ενός Ροπμότ όπως παραπάνω, να βρεθεί το σύνολο των σημείων, στα οποία προσεγγίζει το άκρο του Ρομπότ. Ποια είναι τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά αυτού του συνόλου; Εδώ στην πραγματικότητα έχουμε να βρούμε το πεδίο τιμών μιάς συνάρτησης

13.1 Ασκήσεις

1. *Δίνεται ένα επίπεδο ρομπότ με δύο βραχίονες. Οι βραχίονες έχουν μήκη $l_1 = \alpha + 3$ και $l_2 = \beta + \gamma + 5$. Να εξετασθεί εάν το χέρι του ρομπότ μπορεί να προσεγγίσει το σημείο $(\gamma + 10, \alpha + 10)$.*

2. *Δίνεται ένα επίπεδο ρομπότ με τρεις ίσους βραχίονες, ο καθένας έχει μήκος $l = \alpha + \beta + \gamma + 1$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων που μπορεί να προσεγγίσει*

Τέλος του εβδόμου μαθήματος

Σημειώματα

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.