ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Υπολογιστική άλγεβρα

Ενότητα 4: Πολυώνυμα τετάρτου και μεγαλύτερου βαθμού

Ράπτης Ευάγγελος

Σχολή Θετικών επιστημών

Τμήμα Μαθηματικών

Κεφάλαιο 4

Πολυώνυμα τετάρτου και μεγαλυτέρου βαθμού

4.1 Εξίσωση τετάρτου βαθμού

Τετάρτη 14 Μαΐου 2014 [1]

4.1.1 Έρευνα στο *internet*

1. Δείτε και μελετήστε τις πληροφορίες εδώ
2. Δείτε επίσης στην διεύθυνση εδώ

4.1.2 Επίλυση με ριζικά

Θεωρούμε τώρα το πολυώνυμο τετάρτου βαθμού:

$$f(x) = \alpha \cdot x^4 + \beta \cdot x^3 + \gamma \cdot x^2 + \delta \cdot x + \epsilon, \ \ \alpha \neq 0$$

με συντελεστές από το σώμα $\mathbb{F}$[2]

1. Διαιρούμε το $f(x)$ με τον μη-μηδενικό αριθμό α και έχουμε το πολυώνυμο $\frac{1}{\alpha} \cdot f(x)$. Οι τιμές, που μηδενίζουν (οι ρίζες) το $f(x)$ είναι ίδιες που μηδενίζουν το $\frac{1}{\alpha} \cdot f(x)$.
2. Το $\frac{1}{\alpha} \cdot f(x)$ έχει τη μορφή:

$$x^4 + A \cdot x^3 + B \cdot x^2 + \Gamma \cdot x + \Delta$$

[1] Το βιβλίο αυτό γράφεται και *σκίζεται* ηλετρονικά καθημερινά για τις ανάγκες του μαθήματος Υπολογιστική άλγεβρα
Ε.Ράπτης

[2] Θεωρείστε ότι το σώμα των συντελεστών είναι το σώμα των πραγματικών αριθμών

3. Κάνουμε το μετασχηματισμό $x = t - \frac{A}{4}$, οπότε το πολυώνυμο παίρνει τη μορφή[3]:

$$t^4 + pt^2 + qt + r$$

4. Γράφουμε τώρα

$$t^4 + pt^2 + qt + r = (t^2 + \kappa t + \lambda) \cdot (t^2 + \mu t + \xi)$$

   και προσπαθούμε να υπολογίσουμε τα κ,λ,μ,ξ

5. Έχουμε
   $\mu + \kappa = 0$
   $\lambda + \kappa \cdot \mu + \xi = p$
   $\lambda \cdot \mu + \kappa \cdot \xi = q$
   $\lambda \cdot \xi = r$

6. Έχουμε επίσης:
   $\lambda + \xi = p + \kappa^2$
   $\kappa \cdot (\xi - \lambda) = q$
   $\lambda \cdot \xi = r$

7. Θεωρούμε την ταυτότητα:

$$(\lambda + \xi)^2 - (\xi - \lambda)^2 = 4\lambda\xi \tag{4.1}$$

   και αντικαθιστώντας στην ταυτότητα αυτή
   $\lambda + \xi = p + \kappa^2$, $\xi - \lambda = \frac{q}{\kappa}$, $\lambda\xi = r$ έχουμε μία εξίσωση τρίτου βαθμού ως προς κ^2.

8. Όταν λύσουμε την εξίσωση τρίτου βαθμού, με τη βοήθεια του προηγουμένου μαθήματος, ως προς κ^2 βρίσκουμε το κ και μετά τα λ και ξ και μετά τις ρίζες που ψάχνουμε[4]

9. Δείτε και τη διεύθυνση Ρίζες εξίσωσης τετάρτου βαθμού εδώ και συγκρίνετε τα ευρήματα τα δικά σας με αυτά που παρουσιάζονται

4.1.3 Η δυστυχία του να μήν υπάρχει αλγόριθμος!

Όπως είδαμε παραπάνω αν μας δοθεί ένα πολυώνυμο δευτέρου, τρίτου, ή τετάρτου βαθμού, μπορούμε να βρούμε τις ρίζες του. Πιο αυστηρά μπορούμε να πούμε το παρακάτω:

[3] Διαπιστώστε ότι για κάθε πολυώνυμο $f(x) = x^\nu + \alpha_{\nu-1} \cdot x^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} \cdot x^{\nu-2} + \cdots + \alpha_1 \cdot x + \alpha_0$ ο μετασχηματισμός $x = t - \frac{\alpha_{\nu-1}}{\nu}$ οδηγεί σε ένα πολυώνυμο χωρίς όρο βαθμού $\nu - 1$

[4] Πρέπει εδώ να κάνουμε την κατάλληλη διερεύνηση, όπως στην εξίσωση τρίτου βαθμού και να απορρίψουμε μερικές ρίζες που εμφανίζονται

Θεώρημα 4.1.1. *Έστω $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ βαθμού έως 4. Τότε υπάρχει αλγόριθμος, ο οποίος έχει ως είσοδο το πολυώνυμο (στην πραγματικότητα τους συντελεστές του) και ως έξοδο τις τιμές που το μηδενίζουν (ρίζες του). Οι ρίζες αυτές περιγράφονται χρησιμοποιώντας τις 4 πράξεις του σώματος (πρόσθεση,αφαίρεση,πολλαπλασιασμό, διαίρεση) και εξαγωγή ρίζας*

1. Υπενθυμίζουμε ότι η έννοια του αλγορίθμου συναντιέται σχεδόν σε όλους τους επιστημονικούς κλάδους και είναι μία μάθηματική έννοια. Να διαβάσετε οπωσδήποτε το άρθρο εδώ

2. Ο Galois απέδειξε ότι **δεν υπάρχει αλγόριθμος,** ο οποίος να έχει ως είσοδο ένα οποιοδήποτε[5] πολυώνυμο βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου με 5 και ως έξοδο περιγραφή των ριζών με τη βοήθεια των 4 πράξεων του σώματος των συντελεστών και εξαγωγή ρίζας.

3. Η απόδειξη[6] του Galois στηρίζεται στην πρωτοποριακή (για την εποχή της) μαθηματική σύλληψη ότι κάθε πολυώνυμο (όπως και κάθε μαθηματικό αντικείμενο) χαρακτηρίζεται από τις « συμμετρίες του», τις «αρμονίες του». Αυτές οι « συμμετρίες» αποτελούν μία ομάδα. Η ομάδα που επισυνάπτεται κατά φυσιολογικό τρόπο στο πολυώνυμο $f(x)$ και το χαρακτηρίζει λέγεται **ομάδα Galois** του πολυωνύμου και συμβολίζεται $G(f)$

4. Μία ομάδα Γ λέγεται **επιλύσιμη** εάν υπάρχει πεπερασμένη ακολουθία υποομάδων $\Gamma_0 = \{e\}, \Gamma_1, \Gamma_2, \cdots \Gamma_\nu = \Gamma$ έτσι ώστε $\Gamma_i \lhd \Gamma_{i+1}$, και κάθε ομάδαπηλίκο Γ_{i+1}/Γ_i είναι αβελιανή ομάδα. Με λόγια μία ομάδα είναι επιλύσιμη εάν υπάρχει «σκάλα» που φθάνουμε από την τετριμμένη υποομάδα στην αρχική ομάδα, τα « σκαλοπάτια» είναι υποομάδες, κάθε υποομάδα είναι κανονική υποομάδα της επόμενης και η ομάδα-πηλίκο είναι αβελιανή ομάδα. Δείτε περισσότερα για τις επιλύσιμες ομάδες εδώ

5. Κατά κάποιον τρόπο μία ομάδα Γ είναι επιλύσιμη εάν «χτίζεται » από τα «θεμέλια », δηλαδή την τετριμμένη υποομάδα έως την «οροφή », δηλαδή την ίδια την ομάδα Γ και τα « υλικά » είναι αβελιανές ομάδες. Για να « σταθεί » καλά το « οικοδόμημα » πρέπει κάθε υποομάδα από τις $\Gamma_0 = \{e\}, \Gamma_1, \Gamma_2, \cdots \Gamma_\nu = \Gamma$ να είναι κανονική στην επόμενη και η ομάδα-πηλίκο να είναι αβελιανή

6. Ο Galois, λοιπόν απέδειξε ότι ένα πολυώνυμο $f(x)$ λύνεται με ριζικά (όπως παραπάνω) **εάν και μόνο εάν** η ομάδα Galois $G(f)$ είναι επιλύσιμη.

7. Θα αναρωτηθεί βέβαια κανείς σε τι βοηθάει αυτή η μετάφραση του προβλήματος. Αυτό που αποδεικνύει κανείς είναι ότι η ομάδα Galois του πολυωνύμου

[5] **Προσοχή:** Το θεώρημα αυτό αναφέρεται σε όλα τα πολυώνυμα. Υπάρχουν όμως και πολυώνυμα βαθμού 5 ή παραπάνω που οι ρίζες τους εκφράζονται με ριζικά π.χ. $f(x) = x^5 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$

[6] Συστήνω ανεπιφύλακτα και με θέρμη να εγγραφείτε στο μάθημα **Θεωρία Galois** που διδάσκεται στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών

$G(f)$ είναι πεπερασμένη και μάλιστα ισόμορφη με μία υποομάδα της ομάδας μεταθέσεων S_ν , όπου ν είναι ο βαθμός του πολυωνύμου. Αφού κάθε ομάδα Galois είναι πεπερασμένη, μπορούμε να εξετάσουμε σχετικά εύκολα αν είναι επιλύσιμη. Επίσης μπορούμε να αποδείξουμε ότι κάθε υποομάδα της S_3 και της S_4 είναι επιλύσιμη. Όμως η S_5 δεν είναι επιλύσιμη. Επισημαίνουμε ότι ο δείκτης στην ομάδα S_ν σχετίζεται με τον βαθμό του πολυωνύμου.

8. Σύμφωνα με τα παραπάνω δεν υπάρχει αλγόριθμος που να δίνει τις ρίζες ενός πολυωνύμου χρησιμοποιώντας ριζικά. Δείτε το 2 για πιο αυστηρή διατύπωση. Δείτε επίσης το άρθρο εδώ σχετικά με τη θεωρία Galois .

4.1.4 Πάντα υπάρχει ελπίδα!

1. Ας θεωρήσουμε το πολυώνυμο $f(x) = x^5 - 9x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ Με τη βοήθεια παραγώγων μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η παραπάνω συνάρτηση έχει τρεις ρίζες πραγματικές. Οι άλλες δύο θα είναι συζυγείς μιγαδικές

2. Δείτε πληροφορίες για την γραφική παράσταση του πολυωνύμου δίνοντας την εντολή $plot \;\; x^5 - 9x + 3$ στο υπολογιστικό πακέτο που βρίσκεται στο internet στη διεύθυνση εδώ

3. Δείτε επίσης πληροφορίες για τις ρίζες του πολυωνύμου στο παραπάνω υπολογιστικό πακέτο, δίνοντας την εντολή $x^5 - 9x + 3 = 0$.

4. Από τις παραπάνω πληροφορίες μπορούμε να βρούμε ότι η ομάδα Galois του $f(x)$ είναι η S_5. Η ομάδα αυτή **δεν** είναι επιλύσιμη διότι περιέχει ως υποομάδα την A_5. Δες πληροφορίες εδώ Το συμπέρασμα είναι ότι δεν υπάρχει ελπίδα να βρούμε τύπο για τις ρίζες του $f(x)$ όπως έχουμε βρει για τα πολυώνυμα τρίτου και τετάρτου βαθμού.

5. Όμως υπάρχει ο κλάδος των Μαθηματικών Αριθμητική ανάλυση[7] ο οποίος δίνει αλγορίθμους για εύρεση προσεγγίσεων των ριζών. Δες εδώ για περισσότερες πληροφορίες.

6. Βρείτε επίσης από το AXIOM τις ρίζες του πολυωνύμου $f(x)$. Τι παρατηρείτε;

7. Προσπάθειες επίσης για εύρεση αλγορίθμων έχουν γίνει πρόσφατα και από τον συνάδελφο Ηλία Τσιγαρίδα εδώ

8. Το συμπέρασμα είναι ότι παρακάμπτοντας την δυσκολία της μη-ύπαρξης αλγορίθμων για εύρεση ριζών πολυωνύμων βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 5 (ως αποτέλεσμα της θεωρίας Galois) κατασκευάζουμε άλλους αλγορίθμους που βρίσκουν με προσεγγίσεις τις ρίζες

[7] Συστήνω ανεπιφύλακτα και με θέρμη να εγγραφείτε στο μάθημα Αριθμητική ανάλυση που διδάσκεται στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών

4.2 Σχετικά με τους κοινούς παράγοντες

Στο σημείο αυτό θα ασχοληθούμε με το παρακάτω ερώτημα **Ερώτημα** Δίνονται τα πολυώνυμα μία ς μεταβλητής :

$$g(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0, \nu > 0$$
$$h(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \cdots + \beta_0, \mu > 0$$

Έχουν τα πολυώνυμα $g(x), h(x)$ κοινό παράγοντα;

4.2.1 Η μέθοδος με τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη

Μία πρώτη απάντηση είναι η εύρεση του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη $d(x) = MK\Delta(g(x), h(x))$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

1. Υπολογίζουμε τον Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη $d(x) = MK\Delta(g(x), h(x))$ με την μέθοδο του Ευκλείδη ή με όποια άλλη μέθοδο.

2. Έχουμε $g(x) = d(x) \cdot \kappa(x)$ και $h(x) = d(x) \cdot \lambda(x)$,με $MK\Delta(\kappa(x), \lambda(x)) = 1$

3. Αν $\gamma(x)$ κάποιος κοινός παράγοντας των $g(x), h(x)$,τότε το πολυώνυμο $\gamma(x)$, θα διαιρεί τον ΜΚΔ $d(x)$.

4. Από τα παραπάνω φαίνεται καθαρά το πρόβλημα της εύρεσης κοινού παράγοντα, ανάγεται στην εύρεση των παραγόντων του $d(x) = MK\Delta(g(x), h(x))$

4.2.2 Η ορίζουσα του *Sylvester*

Λήμμα 4.2.1. *Τα πολυώνυμα $g(x), h(x)$ έχουν κοινό παράγοντα, εάν και μόνον εάν υπάρχουν $A(x)$ και $B(x)$ έτσι ώστε:*

1. *Τα $A(x)$ και $B(x)$ δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν.*

2. *Το $A(x)$ είναι βαθμού το πολύ $\mu - 1$ και το $B(x)$ είναι βαθμού το πολύ $\nu - 1$*

3. *$A(x)g(x) - B(x)h(x) = 0$*

Ορισμός 4.2.2. *Ο πίνακας Sylvester δύο πολυωνύμων $g(x), h(x)$ ορίζεται όπως φαίνεται στη διεύθυνση εδώ και συμβολίζεται $Syl(g, h, x)$. Η ορίζουσα του πίνακα αυτού ονομάζεται* **απαλοίφουσα** *των δύο πολυωνύμων και συμβολίζεται με $Res(g, h, x)$.*

Θεώρημα 4.2.3. *Τα πολυώνυμα $g(x), h(x)$, έχουν κοινό παράγοντα εάν και μόνο εάν $Res(g, h, x) = 0$*

4.3 Άσκηση

Παρακάτω τα α,β,γ είναι τα ψηφία του Αρ Μητρώου σου αρχίζοντας από το τέλος

1. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^4+(\alpha+1)x^3+(\beta+8)x^2+(\gamma+1)x+2 \in \mathbb{R}[x]$. Να περιγράψετε τις 4 ρίζες του με ριζικά. Να συγκρίνετε με την απάντηση που θα σας δώσει κάποιο υπολογιστικό πακέτο.

2. Δίνεται το πολυώνυμο $g(x) = (\alpha+7)x^3+(\beta+3)x^2+(\gamma+4)x+2 \in \mathbb{R}[x]$. Να περιγράψετε τις 3 ρίζες του με ριζικά. Να συγκρίνετε με την απάντηση που θα σας δώσει κάποιο υπολογιστικό πακέτο.

3. Να αποδείξετε λεπτομερώς το Λήμμα 4.2.1

4. Να αποδείξετε λεπτομερώς το Θεώρημα 4.2.3

5. Να εφαρμόσετε την μέθοδο του ΜΚΔ και την μέθοδο του Sylvester για να εξετάσετε εάν τα πολυώνυμα $f(x), g(x)$ έχουν κοινό παράγοντα

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.