



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικό και Καποδιστριακό  
Πανεπιστήμιο Αθηνών

---

**Υπολογιστική άλγεβρα**

Ενότητα 3: Πολυώνυμα τρίτου βαθμού

Ράπτης Ευάγγελος

Σχολή Θετικών επιστημών

Τμήμα Μαθηματικών

---



## Μέρος ΙΙ

### Πολυώνυμα μίας μεταβλητής



# Κεφάλαιο 3

## Πολυώνυμα τρίτου βαθμού

### 3.1 Μάθημα 2, συνέχεια

#### 3.1.1 Έρευνα στο διαδίκτυο

Πριν αρχίσετε την μελέτη ρίξτε μία ματιά εδώ

#### 3.1.2 Εξίσωση τρίτου βαθμού-μέθοδος *Cardano*

Ας θεωρήσουμε την εξίσωση τρίτου βαθμού:

$$(3.1) \quad f(x) = \alpha \cdot x^3 + \beta \cdot x^2 + \gamma \cdot x + \delta = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0$$

Σκοπός μας είναι να βρούμε τις τιμές (τις ρίζες δηλαδή) που μηδενίζουν το παραπάνω πολυώνυμο και επίσης να βρούμε ιδιότητες αυτών.

1. Αφού το  $\alpha$  είναι διαφορετικό από το μηδέν μπορούμε να διαιρέσουμε το  $f(x)$  με το  $\alpha$ , να βρούμε το  $f^*(x) = \frac{f(x)}{\alpha}$  και να έχουμε την εξίσωση

$$(3.2) \quad f^*(x) = \frac{f(x)}{\alpha} = x^3 + \frac{\beta}{\alpha} \cdot x^2 + \frac{\gamma}{\alpha} \cdot x + \frac{\delta}{\alpha} = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0$$

2. Προφανώς οι ρίζες του  $f(x)$  είναι ίδιες με τις ρίζες του  $f^*(x)$
3. Επειδή το πολυώνυμο  $f^*(x)$  είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές, θα υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα πραγματική<sup>1</sup>. Επίσης ή θα έχουμε ακόμη δύο ρίζες πραγματικές ή δύο ρίζες συζυγείς μιγαδικές
4. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι έχουμε να λύσουμε την παρακάτω εξίσωση:

$$(3.3) \quad x^3 + Ax^2 + Bx + \Gamma = 0$$

---

<sup>1</sup>Να βρείτε μία πειστική εξήγηση για αυτό

5. Κάνουμε τον μετασχηματισμό

$$(3.4) \quad x = t - \frac{A}{3}$$

6. Καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$(3.5) \quad t^3 + tp + q = 0$$

με

$$(3.6) \quad p = B - \frac{A^2}{3}, \quad q = \Gamma + \frac{2A^3 - 9AB}{27}$$

7. Θέλοντας να λύσουμε την εξίσωση 3.5 εργαζόμαστε ως εξής:  
Θεωρούμε  $\xi, \omega$  με

$$(3.7) \quad \xi^3 - \omega^3 = q, \quad \xi \cdot \omega = \frac{p}{3}$$

8. Έχουμε τώρα τα εξής:

$$(3.8) \quad \xi^3 - \omega^3 = q, \quad (\xi \cdot \omega)^3 = \xi^3 \cdot \omega^3 = \frac{p^3}{27}$$

9. Οι παραπάνω εξισώσεις μας λένε ότι γνωρίζουμε τη διαφορά  $\xi^3 - \omega^3 = q$  και το γινόμενο  $\xi^3 \cdot \omega^3 = \frac{p^3}{27}$  δύο ποσοτήτων. Εύκολο είναι να τις βρούμε οδηγούμενοι σε ένα δευτεροβάθμιο τριώνυμο. Βρίσκουμε, λοιπόν, τα παρακάτω:

$$(3.9) \quad \xi^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad \omega^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

10. Ας θεωρήσουμε την ταυτότητα:

$$(3.10) \quad (\omega - \xi)^3 = \omega^3 - 3\omega^2 \cdot \xi + 3\omega \cdot \xi^2 - \xi^3 \Rightarrow (\omega - \xi)^3 = \omega^3 - 3\omega\xi(\omega - \xi) - \xi^3$$

11. Η τελευταία σχέση γράφεται

$$(3.11) \quad (\omega - \xi)^3 + (\xi^3 - \omega^3) + 3\omega\xi(\omega - \xi) = 0$$

Και αντικαθιστώντας τις σχέσεις από 2.7 έχουμε

12.

$$(3.12) \quad (\omega - \xi)^3 + q + p(\omega - \xi) = 0$$

13. Παρατηρούμε από την τελευταία σχέση ότι οι ρίζες που ψάχνουμε είναι της μορφής  $\omega - \xi$ , αλλά τις τιμές των  $\omega, \xi$  τις έχουμε ήδη υπολογίσει. Παρατηρούμε επίσης, ότι από τις σχέσεις 3.9, οδηγούμαστε σε τρεις τιμές για το  $\xi$  και τρεις τιμές για το  $\omega$ . Όμως το πολυώνυμο έχει ακριβώς τρεις ρίζες<sup>2</sup> στο σύνολο  $\mathbb{C}$

<sup>2</sup>όχι κατ'ανάγκη διακεκριμένες

των μιγαδικών αριθμών. Συνεχίζουμε ως εξής:

(α') Οι τρεις ρίζες της μονάδας, δηλαδή του πολυωνύμου  $x^3 - 1$  στο σύνολο  $\mathbb{C}$  των μιγαδικών αριθμών είναι οι

$$\{z_0 = 1, z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\}$$

(β') Από τις σχέσεις 3.9 έχουμε για το  $\xi$  τρεις τιμές τις:

$$\xi_0 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad \xi_1 = z_1 \cdot \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$\xi_2 = z_2 \cdot \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

(γ') Επίσης για το  $\omega$  έχουμε άλλες τρεις τιμές τις:

$$\omega_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad \omega_1 = z_1 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$\omega_2 = z_2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

(δ') Οι εξισώσεις 3.7 μας λένε τελικά ότι οι τρεις ρίζες του πολυωνύμου, που ψάχνουμε είναι:

$$\omega_0 - \xi_0, \quad \omega_2 - \xi_1, \quad \omega_1 - \xi_2$$

## 3.2 Ασκήσεις και προβληματισμοί

1. Να θεωρήσετε το πολυώνυμο  $f(x) = (\alpha+7)x^3 + (\beta+5)x^2 + (\gamma+2)x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$  και να βρείτε τις τρεις ρίζες του με ριζικά
2. Να μελετήσετε την έννοια της **Διακρίνουσας** πολυωνύμων τρίτου βαθμού από τη διεύθυνση Διακρίνουσα και μετά να κάνετε εφαρμογή στο παραπάνω πολυώνυμο  $f(x)$
3. Μελετήστε σε βάθος την έννοια του Δακτύλιου-πηλίκο. Μετά να μελετήσετε τον δακτύλιο-πηλίκο  $\mathbb{Q}[x]/I$  και  $\mathbb{R}[x]/I$ , όπου  $I$  είναι το ιδεώδες που παράγεται από το πολυώνυμο  $f(x)$
4. Να μελετήσετε τον δακτύλιο-πηλίκο  $\mathbb{Z}[x]/I$  όπου  $I$  είναι το ιδεώδες που παράγεται από το πολυώνυμο  $f(x)$
5. Να λυθεί το σύστημα
 
$$(\alpha + 7)x^3 + 5x^2 + (6 + \beta)x + (\gamma + 13) = 0$$

$$(\alpha + 9)x^3 + 12x^2 + (16 + \beta)x + (2\gamma + 13) = 0$$
6. **Ελεύθερο θέμα** Πείτε τρόπους διδασκαλίας των παραπάνω «δύσκολων» εννοιών για τον δακτύλιο-πηλίκο

### 3.3 Σκέψεις για επίλυση ενός συστήματος με δύο εξισώσεις τρίτου βαθμού

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το παρακάτω πρόβλημα:

#### Πρόβλημα

Να λυθεί το σύστημα

$$(\alpha + 7)x^3 + 5x^2 + (6 + \beta)x + (\gamma + 13) = 0$$

$$(\alpha + 9)x^3 + 12x^2 + (16 + \beta)x + (2\gamma + 13) = 0$$

1. Η πρώτη σκέψη μας είναι να βρούμε τις ρίζες και του πρώτου πολυωνύμου και του δεύτερου, σύμφωνα με αυτά που περιγράψαμε παραπάνω και να βρούμε τις κοινές ρίζες. Να κάνετε αυτή τη διαδικασία και σκεφθείτε τις δυσκολίες, οι οποίες είναι μεγάλες (δείτε γιατί).
2. Μία άλλη προσέγγιση πιο καλή είναι αυτή που προκύπτει από την εξής ιδέα: Αν έχουμε γενικά να λύσουμε το σύστημα  $\{f(x) = 0, g(x) = 0\}$ , όπου τα  $f(x), g(x)$  είναι πολυώνυμα μίας μεταβλητής, εκτελούμε τον αλγόριθμο της διαίρεσης του  $f(x)$  διά του  $g(x)$  (ή αντίστροφα ανάλογα με τον βαθμό των πολυωνύμων). Αν, λοιπόν,  $f(x) = g(x)\pi(x) + \upsilon(x)$ , είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι το σύνολο λύσεων του συστήματος  $\{f(x) = 0, g(x) = 0\}$  είναι ίσο με το σύνολο λύσεων του συστήματος  $\{\upsilon(x) = 0, g(x) = 0\}$ . Εδώ σκεφθείτε μία πιθανή γενίκευση και κατασκευή αλγορίθμου
3. Παρακολούθηστε επίσης το βίντεο<sup>3</sup> εδώ και σκεφθείτε νέες μεθόδους.

**Τέλος του δεύτερου μαθήματος**

---

<sup>3</sup>Όποιος βρεί την μουσική υπόκρουση θα τον παραδεχθώ



# Σημειώματα

## Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Ράπτης Ευάγγελος, 2014. Ράπτης Ευάγγελος. «Υπολογιστική άλγεβρα. Ενότητα 3: Πολυώνυμα τρίτου βαθμού». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/MATH14/>.

## Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

## Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

