ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Άλγεβρα

Ενότητα: Πολυώνυμα πολλών μεταβλητών - ο αλγόριθμος της διαίρεσης

Ευάγγελος Ράπτης

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα ενότητας

2 Πολυώνυμα πολλών μεταβλητών

2.1 Ταυτότητες στο Γυμνάσιο-Λύκειο

Συνήθως στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο μας δίνουν να λύσουμε κάποιες ασκήσεις που έχουν κάποιες υποθέσεις και μας ζητούν να καταλήξουμε σε κάποιο συμπέρασμα. Τις περισσότερες φορές οι υποθέσεις είναι σχέσεις πολυωνυμικού τύπου, έστω $f_1(x_1, \cdots, x_\nu) = 0, f_2(x_1, \cdots, x_\nu) = 0, \cdots, f_\mu(x_1, \cdots, x_\nu) = 0$ και μας ζητούν να αποδείξουμε αν ισχύει η σχέση $g(x_1, \cdots, x_\nu) = 0$ πολυωνυμικού τύπου και αυτή.

Μπορούμε να διατυπώσουμε το ερώτημά μας ως εξής:

Πρόταση 2.1.1. *Η σχέση $g(x_1, \cdots, x_\nu) = 0$ προκύπτει από τις σχέσεις $f_1(x_1, \cdots, x_\nu) = 0, f_2(x_1, \cdots, x_\nu) = 0, \cdots, f_\mu(x_1, \cdots, x_\nu) = 0$ εάν το πολυώνυμο $g(x_1, \cdots, x_\nu)$ ανήκει στο ιδεώδες:*

$$< f_1(x_1, \cdots, x_\nu), f_2(x_1, \cdots, x_\nu), \cdots, f_\mu(x_1, \cdots, x_\nu) >$$

Αν το πολυώνυμο $g(x_1, \cdots, x_\nu)$ ανήκει στο ιδεώδες

$$< f_1(x_1, \cdots, x_\nu), f_2(x_1, \cdots, x_\nu), \cdots, f_\mu(x_1, \cdots, x_\nu) >$$

τότε το $g(x_1, \cdots, x_\nu)$ θα γράφεται ως πολυωνυμικός συνδυασμός των πολυωνύμων που παράγουν το ιδεώδες. Έχουμε δηλαδή ότι:

$$\begin{aligned} g(x_1, \cdots, x_\nu) &= h_1(x_1, \cdots, x_\nu) \cdot f_1(x_1, \cdots, x_\nu) + \\ &+ h_2(x_1, \cdots, x_\nu) \cdot f_2(x_1, \cdots, x_\nu) + \\ &+ \cdots + \\ &+ h_\mu(x_1, \cdots, x_\nu) \cdot f_\mu(x_1, \cdots, x_\nu) \end{aligned}$$

Αν τώρα οι δεδομένες σχέσεις ισχύουν, αν δηλαδή

$$f_1(x_1, \cdots, x_\nu) = 0, f_2(x_1, \cdots, x_\nu) = 0, \cdots, f_\mu(x_1, \cdots, x_\nu) = 0$$

τότε μηδενίζεται και το $g(x_1, \cdots, x_\nu)$ δηλαδή ισχύει και η σχέση $g(x_1, \cdots, x_\nu) = 0$.

Προχωράμε τώρα σε ένα παράδειγμα:

Παράδειγμα 2.1.2. *Έστω ότι οι αριθμοί α, β, γ ικανοποιούν τις σχέσεις:*

$$\begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 3 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 5 \\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 7 \end{array}$$

Να αποδείξετε ότι $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = 9$

Για να αποδείξουμε αυτό που μας ζητάνε στο παράδειγμα κάνουμε τα παρακάτω:

1. Παρατηρούμε ότι οι δεδομένες σχέσεις είναι πολυωνυμικού τύπου μεταξύ των α, β, γ

2. Θεωρούμε τα πολυώνυμα:

$$\begin{aligned} f_1(\alpha, \beta, \gamma) &= \alpha + \beta + \gamma - 3 \\ f_2(\alpha, \beta, \gamma) &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 5 \\ f_3(\alpha, \beta, \gamma) &= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 7 \end{aligned}$$

3. Θεωρούμε το ιδεώδες $I =< f_1(\alpha,\beta,\gamma), f_2(\alpha,\beta,\gamma), f_3(\alpha,\beta,\gamma)$.
4. Βρίσκουμε μία βάση Groebner G του ιδεώδους I.
5. Διαιρούμε το πολυώνυμο $h(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 9$ με τα πολυώνυμα της βάσης Groebner G. Το αποτέλεσμα, που βρίσκουμε είναι μηδέν[1].
6. Στηριζόμενοι στα επιχειρήματα της πρότασης παραπάνω καταλήγουμε στην απόδειξη αυτού που θέλουμε να αποδείξουμε.

Σχόλιο: Στην περίπτωση που δεν ξέραμε πόσο κάνει το άθροισμα $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$ αν διαιρέσουμε το πολυώνυμο $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$ με την βάση Groebner G θα βρούμε υπόλοιπο 9, οπότε στηριζόμενοι στα επιχειρήματα της πρότασης παραπάνω καταλήγουμε στην απόδειξη[2] ότι $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = 9$.

2.2 Γενικά για τον δακτύλιο των πολυωνύμων

1. Αν $\mathbb{F}$[3] το σώμα των συντελεστών, το σύνολο των πολυωνύμων μιας μεταβλητής με συντελεστές από το $\mathbb{F}$, θα το συμβολίζουμε με $\mathbb{F}[x]$.
2. Δες πληροφορίες για τα σώματα στα μαθηματικά εδώ.
3. Το σύνολο των πολυωνύμων $\mathbb{F}[x]$ είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο.
4. Δες πληροφορίες για τους δακτυλίους στα μαθηματικά εδώ.
5.

Θεώρημα 2.2.1. *Έστω $\Delta(x) \in \mathbb{F}[x]$ και $\delta(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $\delta(x) \neq \mathbf{0(x)}$. Υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ με τις παρακάτω ιδιότητες*

(i) $\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$

(ii) Είτε $\upsilon(x) = \mathbf{0(x)}$, δηλαδή είναι το μηδενικό πολυώνυμο,
είτε $\upsilon(x) \neq \mathbf{0(x)}$ και βαθμός ($\upsilon(x)$)< βαθμός ($\delta(x)$)

Απόδειξη

(i) Ας θεωρήσουμε ότι:

1. $\Delta(x) = \alpha_\nu \cdot x^\nu + \alpha_{\nu-1} \cdot x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot x + \alpha_0$ με $\alpha_\nu \neq 0$, δηλαδή το $\Delta(x)$ έχει βαθμό ν.
2. $\delta(x) = \beta_\mu \cdot x^\mu + \beta_{\mu-1} \cdot x^{\mu-1} + \cdots + \beta_1 \cdot x + \beta_0$ με $\beta_\nu \neq 0$, δηλαδή το $\Delta(x)$ έχει βαθμό μ.
3. Εάν $\nu < \mu$, δηλαδή ο βαθμός του $\Delta(x)$ είναι γνήσια μικρότερος του $\delta(x)$, τότε θέτουμε $\pi(x) = \mathbf{0(x)}$ και $\upsilon(x) = \Delta(x)$ και οι απαιτήσεις του θεωρήματος ικανοποιούνται πλήρως.
4. Έστω[4] ότι $\nu \geq \mu$. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε το μονώνυμο $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \cdot x^{\nu-\mu}$.
5. Παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο:

(2.2.1.1) $$\upsilon_1(x) = \Delta(x) - \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \cdot x^{\nu-\mu} \cdot \delta(x)$$

έχει βαθμό γνήσια μικρότερο του βαθμού του $\Delta(x)$, δηλαδή έχει βαθμό γνήσια μικροτέρου του ν, διότι ο μεγιστοβάθμιος όρος του $\Delta(x)$ διαγράφηκε.

[1] Να το επιβεβαιώσετε και εσείς με όποιον τρόπο μπορείτε.
[2] Αποδείξτε το λεπτομερώς.
[3] Στο μάθημα αυτό ως σώμα συντελεστών θα έχουμε το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, εκτός εάν αναφέρουμε κάτι διαφορετικό. Πάντως οι περισσότερες προτάσεις και θεωρήματα ισχύουν για όλα τα σώματα.
[4] Στη θεωρία πολυωνύμων **δεν επιτρέπονται** αρνητικοί εκθέτες

6. Ας υποθέσουμε ότι το $\upsilon_1(x)$ είναι ένα πολυώνυμο της μορφής:

(2.2.1.2) $$\upsilon_1(x) = \lambda_\xi \cdot x^\xi + \lambda_{\xi-1} \cdot x^{\xi-1} + \cdots + \lambda_1 \cdot x + \lambda_0$$

με $\lambda_\xi \neq 0$ και $\xi < \nu$

7. α) Αν ο βαθμός του $\upsilon_1(x)$ είναι γνήσια μικρότερος του βαθμού του $\delta(x)$, δηλαδή του μ, τότε θεωρούμε ως $\pi(x)$ το $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \cdot x^{\nu-\mu}$ και ως $\upsilon(x)$ το $\upsilon_1(x)$. Με έλεγχο διαπιστώνουμε ότι ικανοποιούνται πλήρως οι απαιτήσεις του πρώτου μέρους του θεωρήματος.

   β) Αν ξ =βαθμός του $\delta(x) > \mu$, θεωρούμε το μονώνυμο $\frac{\lambda_\xi}{\beta_\mu} \cdot x^{\xi-\mu}$.

8. Στην περίπτωση β) θεωρούμε το πολυώνυμο:

(2.2.1.3) $$\upsilon_2(x) = \upsilon_1(x) - \frac{\lambda_\xi}{\beta_\mu} \cdot x^{\xi-\mu} \cdot \delta(x) = \Delta(x) - \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \cdot x^{\nu-\mu} \cdot \delta(x) - \frac{\lambda_\xi}{\beta_\mu} \cdot x^{\xi-\mu} \cdot \delta(x)$$

9. Για το $\upsilon_2(x)$ εξετάζουμε πάλι εάν ο βαθμός του (ο οποίος είναι γνήσια μικρότερος από τον βαθμό του $\upsilon_1(x)$) είναι μικρότερος από τον βαθμό μ του $\delta(x)$ ή όχι και συνεχίζουμε ανάλογα όπως προηγουμένως.

10. Επειδή η ακολουθία ($\upsilon_1(x), \upsilon_2(x), \upsilon_3(x), \cdots$) είναι γνησίως φθίνουσα στους βαθμούς, θα υπάρχει η **πρώτη** φορά, που ο βαθμός του $\upsilon_i(x)$ γίνεται γνήσια μικρότερος του μ. Στην περίπτωση αυτή σταματάμε και θέτουμε:
    $\upsilon(x) = \upsilon_i(x)$ και $\pi(x) = \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \cdot x^{\nu-\mu} + \frac{\lambda_\xi}{\beta_\mu} \cdot x^{\xi-\mu} + \cdots$

11. Παρατηρούμε ότι το πρώτο (το υπαρξιακό) μέρος του θεωρήματος αποδείχθηκε

(ii) Έστω τώρα ότι έχουμε:
$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$ και
$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi'(x) + \upsilon'(x)$
Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε $\delta(x)\,(\pi(x) - \pi'(x)) = \upsilon'(x) - \upsilon(x)$
Αν $\pi(x) - \pi'(x) \neq \mathbf{0(x)}$ τότε και $\upsilon'(x) - \upsilon(x) \neq \mathbf{0(x)}$ και εξετάζοντας τους βαθμούς και των δύο μελών καταλήγουμε σε άτοπο.
Τελικά καταλήγουμε ότι $\pi(x) - \pi'(x) = \mathbf{0(x)}$ και $\upsilon'(x) - \upsilon(x) = \mathbf{0(x)}$ και έτσι έχουμε αποδείξει και το δεύτερο μέρος του θεωρήματος

6.

Ορισμός 2.2.2. *Έστω $\Delta(x), \delta(x), \pi(x), \upsilon(x)$ τα πολυώνυμα του προηγουμένου θεωρήματος.*

(i) *Το πολυώνυμο $\Delta(x)$ θα λέγεται* **διαιρετέος**.

(ii) *Το πολυώνυμο $\delta(x)$ θα λέγεται* **διαιρέτης**.

(iii) *Το πολυώνυμο $\pi(x)$ θα λέγεται* **πηλίκο** *της διαίρεσης.*

(iv) *Το πολυώνυμο $\upsilon(x)$ θα λέγεται* **υπόλοιπο** *της διαίρεσης.*

(v) *Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\Delta(x)$ δια του $\delta(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο $\mathbf{0(x)}$, θα λέμε ότι το $\delta(x)$* **διαιρεί** *το $\Delta(x)$ και θα γράφουμε $\delta(x) \mid \Delta(x)$.*

2.3 Προαιρετική άσκηση για εξάσκηση

1. Δίνεται το σύστημα:

(Σ) $$\begin{cases} f(x) = (\alpha + 7)x^3 + 5x^2 + (6 + \beta)x + (\gamma + 13) = 0 \\ g(x) = (\alpha + 2\beta)x^4 + (\alpha + 7)x^3 + 5x^2 + (6 + \beta)x + (\gamma + 13) = 0 \end{cases}$$

όπου α,β,γ τα τρία τελευταία ψηφία του Αρ. Μητρώου σας αρχίζοντας από το τέλος.

1. 1. Να εκτελέσετε τη διαίρεση του $g(x)$ δια του $f(x)$ και να βρείτε το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)$.

1. 2. Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων του συστήματος **(Σ)** είναι ίσο με το σύνολο λύσεων του συστήματος:

$$(\Sigma^\star)\quad \begin{cases} f(x) = (\alpha + 7)x^3 + 5x^2 + (6 + \beta)x + (\gamma + 13) = 0 \\ \upsilon(x) = 0 \end{cases}$$

1. 3. Με βάση τα προηγούμενα να βρείτε το σύνολο λύσεων του συστήματος **(Σ)**.

2. Δείτε το βίντεο[5] στη διεύθυνση εδώ. Σκεφθείτε πάνω στο βασικό στόχο του μαθήματος με αφορμή το βίντεο και προσαρμόστε τον στόχο αυτό σε συστήματα πολυωνύμων μιας μεταβλητής.

3. Να θεωρήσετε το σύστημα:

$$(\Sigma^*)\quad \begin{cases} f(x) = (\alpha + 7)x^3 + 5x^2 + (6 + \beta)x + (\gamma + 13) = 0 \\ g(x) = (\alpha + 2\beta)x^4 + (\alpha + 7)x^3 + 5x^2 + (6 + \beta)x + (\gamma + 13) = 0 \\ h(x) = x^5 - 9x + 3 = 0 \end{cases}$$

όπου α,β,γ τα τρία τελευταία ψηφία του Αρ. Μητρώου σας αρχίζοντας από το τέλος.

3. 1. Χρησιμοποιώντας τον Ευκλείδειο αλγόριθμο να βρείτε τρία πολυώνυμα $\kappa(x), \lambda(x), \xi(x) \in \mathbb{R}[x]$ έτσι ώστε:

$$MK\Delta(f(x), g(x), h(x)) = \kappa(x) \cdot f(x) + \lambda(x) \cdot g(x) + \xi(x) \cdot h(x)$$

Στοιχεία για τον Ευκλείδειο αλγόριθμο μπορείτε να βρείτε είτε εδώ είτε στο βιβλίο Βασικής Άλγεβρας εδώ.

3. 2. Να λύσετε το σύστημα (Σ^*) με τη βοήθεια του ΜΚΔ παραπάνω.

3. 3. Διατυπώστε και αποδείξτε ένα θεώρημα επίλυσης συστημάτων πολυωνύμων μιας μεταβλητής με τη βοήθεια του ΜΚΔ.

[5] Ο σκηνοθέτης ζητάει συγγνώμη για την ποιότητα του βίντεο.

3 Ο αλγόριθμος της διαίρεσης

3.1 Γενικά

Η πράξη της διαίρεσης στον δακτύλιο $\mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_\nu]$,[1] όπου $\mathbb{F}$ είναι ένα σώμα, είναι καθοριστικής σημασίας για τη συνέχεια. Υπενθυμίζουμε ότι στον δακτύλιο των πολυωνύμων μιας μεταβλητής για να γίνει η διαίρεση χρειαζόμαστε:

1) Να έχουμε ένα διαιρετέο $\Delta(x) \in \mathbb{F}[x]$ και ένα διαιρέτη $\delta(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $\delta(x) \neq 0$.
2) Να διατάξουμε τα μονώνυμα του διαιρετέου και τα μονώνυμα του διαιρέτη χρησιμοποιώντας την φυσική διάταξη των δυνάμεων των μονωνύμων.

Μετά την εκτέλεση της διαίρεσης έχουμε

$$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x) \text{ με } \left\{ \begin{array}{c} \upsilon(x) = 0 \\ \text{ή} \\ \upsilon(x) \neq 0 \text{ και } deg(\upsilon(x)) < deg(\delta(x)) \end{array} \right\}$$

Κάτι που πρέπει να τονισθεί ιδιαίτερα εδώ είναι ότι το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ είναι μοναδικά. Δες σχετικά στο 2. Σε όλες τις περιπτώσεις[2] αν $I =< f(x), g(x) >$ είναι το ιδεώδες του δακτυλίου $\mathbb{F}[x]$ που παράγεται από τα δύο πολυώνυμα $f(x), g(x)$ θα έχουμε ότι $\upsilon(x) \in I$. Με τα ιδεώδη θα ασχοληθούμε αναλυτικά στα επόμενα μαθήματα. Δείτε όμως τον ορισμό του ιδεώδους ενός δακτυλίου για καλύτερη κατανόηση του μαθήματος.

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι κατά την εύρεση του υπολοίπου, η προσπάθειά μας επικεντρώνεται στην εύρεση ενός πολυωνύμου μέσα στο ιδεώδες $I =< f(x), g(x) >$, το οποίο να έχει τον ελάχιστο βαθμό.

Υπενθυμίζουμε επίσης ότι κάθε στοιχείο $h(x)$ του I είναι της μορφής $h(x) = \kappa(x)f(x) + \lambda(x)g(x)$, όπου $\kappa(x), \lambda(x) \in \mathbb{F}[x]$.

Δες επίσης και ένα σχετικό βίντεο εδώ.

3.2 Βήματα διαίρεσης

Θα ορίσουμε τώρα μία διαδικασία διαίρεσης (αλγόριθμο διαίρεσης) στον δακτύλιο $\mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_\nu]$ έτσι ώστε δοθέντων των πολυωνύμων

1. $\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$
2. $f_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), f_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), f_3(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), \cdots, f_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$

[1] Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο $\mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_\nu]$, συμβολίζει το σύνολο των πολυωνύμων με μεταβλητές $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$ και συντελεστές στοιχεία από το σώμα $\mathbb{F}$. Στο σύνολο αυτό, έχουν ορισθεί δύο πράξεις, η πράξη της πρόσθεσης πολυωνύμων και η πράξη του πολλαπλασιασμού πολυωνύμων. Η τριάδα $(\mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_\nu], +, \cdot)$ αναφέρεται ως *δακτύλιος των πολυωνύμων με ν μεταβλητές και συντελεστές από το σώμα* $\mathbb{F}$.

[2] Υπενθυμίζουμε εδώ από την Βασική Άλγεβρα, ότι στο μηδενικό πολυώνυμο δεν επισυνάπτουμε βαθμό και τα σταθερά μη-μηδενικά πολυώνυμα έχουν βαθμό μηδέν.

ο αλγόριθμος να δίνει:

1. Μία έκφραση του πολυωνύμου $\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ ως εξής:

   $\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) = \pi_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \cdot f_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) +$
   $\pi_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \cdot f_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) + \cdots + \pi_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \cdot f_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) + \upsilon_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$

2. Το πολυώνυμο $\upsilon_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$, το οποίο θα το λέμε **υπόλοιπο** της διαίρεσης και τη διατεταγμένη μ-άδα πολυωνύμων $(\pi_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), \pi_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), \cdots, \pi_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_\nu))$, την οποία θα λέμε **πηλίκο** της διαίρεσης.

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να δούμε ένα παράδειγμα διαίρεσης ενός πολυωνύμου $\Delta(x, y)$ διά ενός ζεύγους πολυωνύμων $(f_1(x, y), f_2(x, y))$. Για ευκολία θεωρούμε και τα τρία πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές.

Όπως είπαμε παραπάνω θέλουμε να οδηγηθούμε σε μια σχέση της μορφής:

$$\Delta(x, y) = \pi_1(x, y) \cdot f_1(x, y) + \pi_2(x, y) \cdot f_2(x, y) + \upsilon(x, y)$$

όπου:
Δ = $\Delta(x, y)$: Διαιρετέος
δ = $(f_1(x, y), f_2(x, y))$: διαιρέτης
π = $(\pi_1(x, y), \pi_2(x, y))$: πηλίκο
$\upsilon(x, y)$: υπόλοιπο

3.3 Παράδειγμα διαίρεσης στον δακτύλιο $\mathbb{F}[x, y]$

Παράδειγμα 3.3.1. *Να υπολογιστεί το αποτέλεσμα της διαίρεσης του πολυωνύμου* $\Delta(x, y) = g(x, y) = xy^2 + 1$ *με τα πολυώνυμα* $(f_1(x, y) = xy + 1, f_2(x, y) = y + 1)$.

Διαδικασία διαίρεσης

Βήμα 1 Δες εδώ το βίντεο για βοήθεια πριν τη μελέτη. Θεωρούμε τώρα μία διάταξη στις μεταβλητές (π.χ. $x > y$). Η διάταξη αυτή επάγει μία διάταξη, την **λεξικογραφική**, στα μονώνυμα ως εξής: Παρατηρούμε ότι κάθε μονώνυμο είναι της μορφής $x^\kappa y^\lambda$, όπου κ και λ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι[3]. Έτσι κάθε μονώνυμο καθορίζεται πλήρως από ένα ζεύγος $(\kappa, \lambda) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Ορίζουμε τώρα

$$(\kappa_1, \lambda_1) > (\kappa_2, \lambda_2) \overset{o\rho\sigma}{\Longleftrightarrow} \kappa_1 > \kappa_2 \;\; \eta' \;\; \kappa_1 = \kappa_2 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \lambda_1 > \lambda_2$$

και

$$x^{\kappa_1} y^{\lambda_1} > x^{\kappa_2} y^{\lambda_2} \overset{o\rho\sigma}{\Longleftrightarrow} (\kappa_1, \lambda_1) > (\kappa_2, \lambda_2)$$

Βήμα 2 Κατασκευάζουμε το παρακάτω διάγραμμα προκειμένου να αρχίσουμε την διαίρεση, γράφοντας τα πολυώνυμα που λαμβάνουν μέρος στη διαίρεση ως γραμμικό συνδυασμό μονωνύμων με φθίνουσα σειρά.

[3] Όπως έχουμε ξαναπεί στα πολυώνυμα δεν επιτρέπονται αρνητικοί εκθέτες

$$
\begin{array}{l|l}
f_1(x,y) = xy+1 & g(x,y) = xy^2+1 \\ \cline{2-2}
f_2(x,y) = y+1 & \\
 & \\ \cline{2-2}
 & \\ \cline{2-2}
\pi_1(x,y) = & \\ \cline{2-2}
\pi_2(x,y) = & \\
\upsilon(x,y) = &
\end{array}
$$

Βήμα 3 Θεωρούμε το μεγιστοβάθμιο όρο του Διαιρετέου (μαζί με τον συντελεστή του), ο οποίος στην περίπτωσή μας είναι ο xy^2 και τον μεγιστοβάθμιο όρο του πρώτου κατά σειρά πολυωνύμου του διαιρέτη (μαζί με τον συντελεστή του), που είναι ο xy. Εκτελούμε τη διαίρεση $xy^2 : xy$ και βρίσκουμε y. Εδώ σημειώνουμε ότι αν υπήρχαν και αριθμητικοί συντελεστές θα είχαμε και το πηλίκο αυτών, δηλαδή αν είχαμε $7xy^2$ δια $5xy$, τότε το αποτέλεσμα είναι $(7/5)y$. Θέτουμε στον πρώτο όρο του πηλίκου $\pi_1(x,y)$ μετά το = το y. Έχουμε την παρακάτω εικόνα:

$$
\begin{array}{l|l}
f_1(x,y) = xy+1 & g(x,y) = xy^2+1 \\ \cline{2-2}
f_2(x,y) = y+1 & \\
 & \\ \cline{2-2}
 & \\ \cline{2-2}
\pi_1(x,y) = y & \\ \cline{2-2}
\pi_2(x,y) = & \\
\upsilon(x,y) = &
\end{array}
$$

Βήμα 4 Πολλαπλασιάζουμε το πολυώνυμο $f_1(x,y) = xy+1$ επί y και το αφαιρούμε από το $g(x) = xy^2+1$. Έχουμε την παρακάτω εικόνα:

$$
\begin{array}{l|l}
f_1(x,y) = xy+1 & g(x,y) = xy^2+1 \\
\cline{2-2}
f_2(x,y) = y+1 & \\
 & y(xy+1) = xy^2+y, \quad g(x) - (xy^2+y) = -y+1 \\
\cline{2-2}
 & \\
\cline{2-2}
\pi_1(x,y) = y & \\
\cline{2-2}
\pi_2(x,y) = & \\
\upsilon(x,y) = & \\
\end{array}
$$

Βήμα 5 Προέκυψε το πολυώνυμο $-y+1$, το οποίο είναι ένα **ενδιάμεσο υπόλοιπο**. Ο μεγιστοβάθμιος όρος του(μαζί με τον συντελεστή του) είναι ο $-y$. Ο μεγιστοβάθμιος όρος του πρώτου όρου του διαιρέτη $f_1(x,y) = xy+1$ είναι ο xy. Παρατηρούμε ότι ο μεγιστοβάθμιος όρος xy του $f_1(x,y)$ δεν διαιρεί τον y.

Θεωρούμε τώρα τον μεγιστοβάθμιο όρο του $f_2(x,y) = y+1$, ο οποίος είναι ο y. Ο όρος αυτός διαιρεί τον $-y$, που είναι ο μεγιστοβάθμιος όρος του ενδιάμεσου υπολοίπου $-y+1$ και το πηλίκο είναι -1.

Κατόπιν πολλαπλασιάζουμε το -1 με το $f_2(x,y) = y+1$ και το αφαιρούμε από το ενδιάμεσο υπόλοιπο $-y+1$. Βρίσκουμε έτσι τον πρώτο όρο του πηλίκου $\pi_2(x,y)$, ο οποίος είναι ο -1 και το υπόλοιπο, που είναι ο αριθμός 2.

Τελικά έχουμε την παρακάτω εικόνα:

$$
\begin{array}{l|l}
f_1(x,y) = xy+1 & g(x,y) = xy^2+1 \\
\cline{2-2}
f_2(x,y) = y+1 & \\
 & y(xy+1) = xy^2+y, \quad g(x) - (xy^2+y) = -y+1 \\
 & -1\cdot(y+1) = -y-1, \quad -y+1-(-y-1) = 2 \\
\cline{2-2}
 & \\
\cline{2-2}
\pi_1(x,y) = y & \\
\cline{2-2}
\pi_2(x,y) = -1 & \\
\upsilon(x,y) = 2 & \\
\end{array}
$$

Βήμα 6 Εδώ αναγκαστικά σταματάει η διαδικασία αυτή, διότι ο μεγιστοβάθμιος όρος του υπολοίπου $\upsilon(x,y) = 2$ είναι ο 2$\equiv 2\cdot x^0y^0$, ο οποίος δεν διαιρείται ούτε από τον μεγιστοβάθμιο όρο του $f_1(x,y)$ ούτε από τον μεγιστοβάθμιο όρο του $f_2(x,y)$.

Διατυπώνουμε το τελικό συμπέρασμά μας λέγοντας ότι το πηλίκο της διαίρεσης του πολυωνύμου $g(x,y) = xy^2+1$ δια του διατεταγμένου ζεύγους πολυωνύμων $(f_1(x,y) = xy+1, f_2(x,y) = y+1)$

είναι το διατεταγμένο ζεύγος πολυωνύμων $(\pi_1(x,y) = y, \pi_2(x,y) = -1)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x,y) = 2$. Δηλαδή ισχύει

$$g(x) = xy^2 + 1 = f_1(x,y) \cdot \pi_1(x,y) + f_2(x,y) \cdot \pi_2(x,y) + \upsilon(x,y)$$

Μετά τη μελέτη του παραδείγματος αυτού δείτε το βίντεο εδώ.

3.4 Παράδειγμα διαίρεσης στον δακτύλιο $\mathbb{F}[x,y,z]$

Δίνουμε ακόμη ένα παράδειγμα διαίρεσης με τρείς μεταβλητές

Παράδειγμα 3.4.1. *Να υπολογιστεί το αποτέλεσμα της διαίρεσης του πολυωνύμου* $g(x,y,z) = 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18$ *με το ζεύγος πολυωνύμων* $(f_1(x,y,z) = x^3yz^5 + 1, f_2(x,y,z) = yz + 1)$.

Διαδικασία διαίρεσης

Βήμα 1 Θεωρούμε μία διάταξη στις μεταβλητές (π.χ. $x > y > z$). Η διάταξη αυτή επάγει μία διάταξη, την **λεξικογραφική**, στα μονώνυμα και αυτή με τη σειρά της μία διάταξη κατά φθίνουσα σειρά των μονωνύμων στα πολυώνυμα. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18 \\ f_1(x,y,z) &= x^3yz^5 + 1 \\ f_2(x,y,z) &= yz + 1 \end{aligned}$$

Βήμα 2 Κατασκευάζουμε το παρακάτω διάγραμμα προκειμένου να αρχίσουμε την διαίρεση.

$$\begin{array}{l|l} f_1(x,y,z) = x^3yz^5 + 1 & g(x,y,z) = 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18 \\ \cline{2-2} f_2(x,y) = yz + 1 & \\ & \\ \cline{2-2} & \\ \cline{2-2} \pi_1(x,y) = & \\ \cline{2-2} & \\ \pi_2(x,y) = & \\ \upsilon(x,y) = & \end{array}$$

Βήμα 3 Θεωρούμε το μεγιστοβάθμιο όρο του Διαιρετέου (μαζί με τον συντελεστή του), ο οποίος στην περίπτωσή μας είναι ο $3x^5y^2z$ και τον μεγιστοβάθμιο όρο του πρώτου κατά σειρά πολυωνύμου του διαιρέτη (μαζί με τον συντελεστή του), που είναι ο x^3yz^5. Προσπαθούμε να εκτελέσουμε τη διαίρεση $3x^5y^2z : x^3yz^5$.

Η διαίρεση δεν γίνεται, διότι ο εκθέτης της μεταβλητής z είναι μεγαλύτερος στον δεύτερο όρο και για το λόγο αυτό επιχειρούμε να διαιρέσουμε το μεγιστοβάθμιο όρο του Διαιρετέου (μαζί με τον συντελεστή του) με τον μεγιστοβάθμιο όρο του δευτέρου κατά σειρά πολυωνύμου του διαιρέτη (μαζί με τον συντελεστή του), που είναι ο yz.

Η διαίρεση τώρα γίνεται και έχουμε ως αποτέλεσμα $3x^5y$.
Το $3x^5y$ το τοποθετούμε στο πηλίκο, που αντιστοιχεί στο δεύτερο πολυώνυμο διαίρεσης.
Πολλαπλασιάζουμε το $3x^5y$ επί το $f_2(x,y) = yz + 1$ και το αφαιρούμε από το $g(x) = 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18$. Έχουμε έτσι την παρακάτω εικόνα:

$$
\begin{array}{l|l}
f_1(x,y,z) = x^3yz^5 + 1 & g(x,y,z) = 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18 \\ \cline{2-2}
f_2(x,y,z) = yz + 1 & \\
 & g(x,y,z) - 3x^5yf_2(x,y,z) \\ \cline{2-2}
 & = 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18 - 3x^5y(yz + 1) \\ \cline{2-2}
\pi_1(x,y,z) & \\
 & = -xy^3z + 7yz + 18 - 3x^5y \\ \cline{2-2}
\pi_2(x,y,z) = 3x^5y & \\
\upsilon(x,y,z) = &
\end{array}
$$

Βήμα 4 Προέκυψε το πολυώνυμο $-xy^3z + 7yz + 18 - 3x^5y$, το οποίο είναι ένα **ενδιάμεσο υπόλοιπο**. Γράφουμε το πολυώνυμο αυτό ως γραμμικό συνδυασμό μονωνύμων με φθίνουσα σειρά χρησιμοποιώντας τη λεξικογραφική διάταξη, δηλαδή $-3x^5y - xy^3z + 7yz + 18$. Ο μεγιστοβάθμιος όρος του (μαζί με τον συντελεστή του) είναι ο $-3x^5y$. Ο μεγιστοβάθμιος όρος του πρώτου όρου του διαιρέτη $f_1(x,y,z) = x^3yz^5 + 1$ είναι ο x^3yz^5. Παρατηρούμε ότι ο μεγιστοβάθμιος όρος x^3yz^5 του $f_1(x,y,z)$ δεν διαιρεί τον $-3x^5y$[4].

Θεωρούμε τώρα τον μεγιστοβάθμιο όρο του $f_2(x,y,z) = yz + 1$, ο οποίος είναι ο yz. Ο όρος αυτός δεν διαιρεί τον $-3x^5y$, που είναι ο μεγιστοβάθμιος όρος του ενδιάμεσου υπολοίπου $-3x^5y - xy^3z + 7yz + 18$.

Στο σημείο αυτό τοποθετούμε τον όρο $-3x^5y$ στο υπόλοιπο και μένει ως ενδιάμεσο υπόλοιπο το $-xy^3z + 7yz + 18$.

Έτσι έχουμε την εικόνα:

$$
\begin{array}{l|l}
f_1(x,y,z) = x^3yz^5 + 1 & g(x,y,z) = 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18 \\ \cline{2-2}
f_2(x,y,z) = yz + 1 & \\
 & g(x,y,z) - 3x^5yf_2(x,y,z) \\ \cline{2-2}
 & = 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18 - 3x^5y(yz + 1) \\ \cline{2-2}
\pi_1(x,y,z) & \\
 & = -3x^5y - xy^3z + 7yz + 18 \\ \cline{2-2}
\pi_2(x,y,z) = 3x^5y & \\
 & -xy^3z + 7yz + 18 \\
\upsilon(x,y,z) = \mathbf{-3x^5y} &
\end{array}
$$

[4] Υπενθυμίζουμε ότι στα πολυώνυμα δεν επιτρέπονται αρνητικοί εκθέτες στις μεταβλητές

Βήμα 5 Προέκυψε το πολυώνυμο $-xy^3z+7yz+18$, το οποίο είναι ένα ακόμη **ενδιάμεσο υπόλοιπο**. Γράφουμε το πολυώνυμο αυτό ως γραμμικό συνδυασμό μονωνύμων με φθίνουσα σειρά χρησιμοποιώντας τη λεξικογραφική διάταξη, δηλαδή $-xy^3z+7yz+18$. Ο μεγιστοβάθμιος όρος του (μαζί με τον συντελεστή του) είναι ο $-xy^3z$. Ο μεγιστοβάθμιος όρος του πρώτου όρου του διαιρέτη $f_1(x,y,z) = x^3yz^5+1$ είναι ο x^3yz^5. Παρατηρούμε ότι ο μεγιστοβάθμιος όρος x^3yz^5 του $f_1(x,y,z)$ δεν διαιρεί τον $-xy^3z$.

Θεωρούμε τώρα τον μεγιστοβάθμιο όρο του $f_2(x,y,z) = yz+1$, ο οποίος είναι ο yz. Ο όρος αυτός διαιρεί τον $-xy^3z$, που είναι ο μεγιστοβάθμιος όρος του ενδιάμεσου υπολοίπου $-xy^3z+7yz+18$. Βρίσκουμε ως πηλίκο $-xy^2$ και το τοποθετούμε στο $\pi_2(x,y,z)$.

Έχουμε την εικόνα:

$f_1(x,y,z) = x^3yz^5+1$	$g(x,y,z) = 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18$
$f_2(x,y,z) = yz+1$	
	$g(x,y,z) - 3x^5yf_2(x,y,z)$
	$= 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18 - 3x^5y(yz+1)$
$\pi_1(x,y,z)$	
	$= -3x^5y - xy^3z + 7yz + 18$
$\pi_2(x,y,z) = 3x^5y - xy^2$	
$\upsilon(x,y,z) = \mathbf{-3x^5y}$	$-xy^3z + 7yz + 18$
	$-xy^3z + 7yz + 18$

Βήμα 6 Πολλαπλασιάζουμε το πηλίκο $-xy^2$ επί το $f_2(x,y,z) = yz+1$ και το αφαιρούμε από το $-xy^3z + 7yz + 18$. Βρίσκουμε το $xy^2 + 7yz + 18$, το οποίο είναι το νέο μας ενδιάμεσο υπόλοιπο.

Η εικόνα μας γίνεται τώρα ως εξής:

$f_1(x,y,z) = x^3yz^5+1$	$g(x,y,z) = 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18$
$f_2(x,y,z) = yz+1$	
	$g(x,y,z) - 3x^5yf_2(x,y,z)$
	$= 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18 - 3x^5y(yz+1)$
$\pi_1(x,y,z)$	
	$= -3x^5y - xy^3z + 7yz + 18$
$\pi_2(x,y,z) = 3x^5y - xy^2$	
	$-xy^3z + 7yz + 18$
	$-xy^3z + 7yz + 18 - (-xy^2(yz+1)) = xy^2 + 7yz + 18$
$\upsilon(x,y,z) = \mathbf{-3x^5y}$	

Βήμα 7 Συνεχίζουμε ξανά τη διαδικασία. Ο μεγιστοβάθμιος όρος του ενδιάμεσου υπολοίπου είναι ο xy^2, ο οποίος δεν διαιρείται με τον μεγιστοβάθμιο όρο του πρώτου πολυωνύμου του διαιρέτη. Για το λόγο

αυτό εξακολουθούμε να έχουμε το μηδενικό πολυώνυμο $\mathbf{0}(\mathbf{x})$, στο πρώτο πηλίκο. Η διαίρεση δεν συνεχίζεται ούτε με το δεύτερο πολυώνυμο-διαιρέτη. Για το λόγο αυτό βάζουμε το xy^2 στο υπόλοιπο και έχουμε την εικόνα

$f_1(x,y,z) = x^3yz^5 + 1$	$g(x,y,z) = 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18$
$f_2(x,y,z) = yz + 1$	
	$g(x,y,z) - 3x^5yf_2(x,y,z)$
	$= 3x^5y^2z - xy^3z + 7yz + 18 - 3x^5y(yz+1)$
$\pi_1(x,y,z)$	$= -3x^5y - xy^3z + 7yz + 18$
$\pi_2(x,y,z) = 3x^5y - xy^2$	$-xy^3z + 7yz + 18$
$\upsilon(x,y,z) = \mathbf{-3x^5y + xy^2}$	$-xy^3z + 7yz + 18 - (-xy^2(yz+1)) = xy^2 + 7yz + 18$
	$7yz + 18$

Βήμα 8 Τώρα φαίνεται πως θα συνεχίσουμε. Βρίσκουμε λοιπόν:

(i) πηλίκο $\pi_1(x,y,z) = \mathbf{0}(\mathbf{x})$, το μηδενικό πολυώνυμο

(ii) πηλίκο $\pi_2(x,y,z) = 3x^5y - xy^2 + 7$

(iii) υπόλοιπο $\upsilon(x,y,z) = -3x^5y + xy^2 + 11$

Βήμα 9 Επιβεβαιώνουμε το αποτέλεσμα:

$$\Delta(x,y,z) = g(x,y,z) = \pi_1(x,y,z)\cdot f_1(x,y,z) + \pi_2(x,y,z)\cdot f_2(x,y,z) + \upsilon(x,y,z)$$

3.5 Σχόλια πάνω στον αλγόριθμο της δαίρεσης πολυωνύμων πολλών μεταβλητών

3.5.1 Η λεξικογραφική διάταξη

Η λεξικογραφική[5] διάταξη ορίζεται στο σύνολο:

$$E = \{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_\nu) \mid \alpha_i \in \{0,1,2,3,\cdots,\} = \mathbb{N}\}$$

ως εξής:

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_\nu) > (\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_\nu) \Longleftrightarrow$

[5]Σκεφθείτε πως βάζουμε τις λέξεις σε ένα λεξικό και θα δικαιολογήσετε το όνομα.

$\alpha_1 > \beta_1 \;\; \eta' \;\; (\alpha_1 = \beta_1 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \alpha_2 > \beta_2) \;\; \eta' \;\; (\alpha_1 = \beta_1 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \alpha_2 = \beta_2 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \alpha_3 > \beta_3)$
$\eta' \;\; \cdots \;\; (\alpha_1 = \beta_1 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \alpha_2 = \beta_2 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \alpha_3 = \beta_3, \cdots \kappa\alpha\iota \;\; \alpha_{\nu-1} = \beta_{\nu-1} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \alpha_\nu > \beta_\nu)$

1. Από τον ορισμό έχουμε ότι $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu) > (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_\nu) \Longleftrightarrow$ στη διαφορά $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu) - (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_\nu)$ η πρώτη μη-μηδενική συντεταγμένη είναι θετικός ακέραιος.

2. Η λεξικογραφική διάταξη που ορίσαμε είναι ολική διάταξη, δηλαδή αν έχουμε δύο στοιχεία του Ε τα $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu)$ και $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_\nu)$, τότε ακριβώς μία σχέση από τις παρακάτω ισχύει:

   (i) $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu) > (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_\nu)$

   (ii) $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu) < (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_\nu)$

   (iii) $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_\nu)$

3. Η λεξικογραφική διάταξη είναι συμβατή με την πρόσθεση διανυσμάτων δηλαδή εάν $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu), (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_\nu) \;\; \kappa\alpha\iota \;\; (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\nu)$ τρία στοιχεία του Ε και $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu) > (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_\nu)$, τότε

   $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu) + (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\nu) > (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_\nu) + (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\nu)$

4. Κάθε πολυώνυμο $f(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_\nu]$, δηλαδή κάθε πολυώνυμο ν-μεταβλητών με συντελεστές από το σώμα $\mathbb{F}$, είναι άθροισμα μονωνύμων της μορφής

   $$\lambda \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_\nu^{\alpha_{nu}}$$

   όπου $\lambda \in \mathbb{F}$ και $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu) \in E$
   Το λ λέγεται συντελεστής του μονωνύμου και το διάνυσμα $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu) \in E$ λέγεται βαθμός του μονωνύμου.

5. Κάθε πολυώνυμο $f(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_\nu]$, με τη βοήθεια της λεξικογραφικής διάταξης στο Ε, μπορεί να τεθεί στη μορφή αθροίσματος μονωνύμων με φθίνουσα διάταξη. Η μορφή αυτή είναι μοναδική.

6.

   Θεώρημα 3.5.1. *Κάθε μή κενό υποσύνολο του Ε έχει ελάχιστο.*

   ΑπόδειξηΈστω A_1 το σύνολο των ακεραίων που εμφανίζονται στην πρώτη συντεταγμένη στοιχείων του Ε. Το σύνολο αυτό είναι μη-κενό σύνολο φυσικών αριθμών, άρα θα έχει ελάχιστο έστω κ_1. Έστω A_2 το σύνολο των ακεραίων που εμφανίζονται στην δεύτερη συντεταγμένη στοιχείων του Ε. Το σύνολο αυτό είναι μη-κενό σύνολο φυσικών αριθμών, άρα θα έχει ελάχιστο έστω κ_2. Συνεχίζοντας βρίσκουμε μία ν-άδα φυσικών $(\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_\nu)$. Η ν-άδα αυτή είναι στοιχείο του Ε και είναι το ελάχιστο στοιχείο του Ε (γιατί;).

7.

   Θεώρημα 3.5.2. *Ο αλγόριθμος τερματίζει σε πεπερασμένα βήματα*

   Απόδειξη Άμεση από τα προηγούμενα

3.6 *Πηλίκο και υπόλοιπο*

Όταν ο αλγόριθμος της διαίρεσης του $\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ δια του διανύσματος πολυωνύμων $(f_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), f_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), f_3(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), \cdots, f_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_\nu))$ τερματίσει έχουμε τη σχέση:

$$\begin{aligned}\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) &= \pi_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \cdot f_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) + \\ &+\pi_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \cdot f_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) + \\ &+\pi_3(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \cdot f_3(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) + \\ &+ \cdots + \\ &+\pi_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \cdot f_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)) + \\ &+\upsilon(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)\end{aligned}$$

- Το πολυώνυμο $\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ το λέμε **διαιρετέο**
- τη μ-άδα $(f_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), f_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), f_3(x_1, x_2, \cdots, x_\nu), \cdots,$ $f_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_\nu))$ τη λέμε **πηλίκο**
- το πολυώνυμο $\upsilon(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ το λέμε **υπόλοιπο** της διαίρεσης.

3.7 Ασκήσεις

1. Παρακάτω τα α, β, γ είναι τα τρία τελευταία ψηφία του Αρ. Μητρώου σας αρχίζοντας από το τέλος. Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο $\upsilon(x, y)$ της διαίρεσης του πολυωνύμου $f(x, y) = x^3y^2+3y^3x-5$ διά του ζεύγους πολυωνύμων $(g(x, y) = x^{5+\alpha}y^{\beta+1} + 2, \ h(x, y) = xy + 2)$.
2. Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο $\upsilon(x, y)$ της διαίρεσης του πολυωνύμου $f(x, y) = x^3y^2+3y^3x-5$ διά του ζεύγους πολυωνύμων $(h(x, y) = xy + 2, \ g(x, y) = x^{5+\alpha}y^{\beta+1} + 2)$.
3. Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων του συστήματος $f(x, y) = 0, g(x, y) = 0, h(x, y) = 0$ είναι ίσο με το σύνολο λύσεων του συστήματος $\upsilon(x, y) = 0, g(x, y) = 0, h(x, y) = 0$.
4. Χρησιμοποιώντας ένα υπολογιστικό πακέτο βρείτε το παραπάνω σύνολο λύσεων.