



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικό και Καποδιστριακό  
Πανεπιστήμιο Αθηνών

---

## Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών και Διδακτική Πράξη

Δέσποινα Πόταρη

Σχολή Θετικών επιστημών

Τμήμα Μαθηματικό

---

Η μέθοδος της συμπλήρωσης τετραγώνου

Ε: Ας ξεκινήσουμε. Θα μιλήσουμε για τη δευτεροβάθμια εξίσωση ξεκινώντας από τις μορφές που ήδη ξέρετε:  $x^2=4$  Πως τη λύνουμε αυτή;

M1: Βάζουμε ρίζα

Ε: Βάζουμε λοιπόν τετραγωνική ρίζα. Ωραία ας το γράψουμε αυτό... (γράφω τη λύση στον πίνακα)  
Άλλος τρόπος: Πως αλλιώς μπορεί να λυθεί;

M2: Με παραγοντοποίηση

Ε: Πολύ ωραία. Πάμε το 4 στο άλλο μέλος και... (γράφω). Μια χαρούλα. Άλλη εξίσωση που ξέρετε να λύνετε:  $x^2=2x$ . Τι θα κάνετε εδώ; Άννα

Άννα: Θα μεταφέρουμε το  $2x$  στο πρώτο μέλος και θα κάνουμε παραγοντοποίηση

Ε: Ωραία (επαναλαμβάνω). Βλέπετε: Και στην προηγούμενη κάναμε παραγοντοποίηση και σαυτή κάνουμε παραγοντοποίηση. Βέβαια στην προηγούμενη είχαμε δύο δυνατότητες. (γράφω τη λύση στον πίνακα λέγοντας φωναχτά ότι γράφω). Πάει κι αυτή. Τρίτη μορφή: (γράφω  $x^2-2x+1=0$ )

Αυτό! Κωσταντίνε.

Κωστ: Πάμε το 1 από την άλλη μεριά

Ε: Α, Πάμε το 1 από την άλλη μεριά

Κωστ: εεε (σκέφτεται)

Κωστ: εεε όχι είναι ταυτότητα  $(x-1)^2$

Ε: Έτσι μπράβο είναι ταυτότητα  $(x-1)^2$  Και μετρά;

Κωστ:  $x-1=0$  Άρα  $x=1$

Ε: Μισό λεπτό. Γιάννη;

Γιαννης:  $(x-1)(x-1)=0$

Ε: Ναι. Το ίδιο είναι. Είναι το ίδιο. Δεν το γράφουμε 2 φορές. Προχωράμε. Για δέστε αυτή:

$x^2+6x+5=0$ . Πως τη λύνουμε αυτή; Το μάθαμε αυτό;

(ακούγεται απο μερικούς να λένε <με διακρίνουσα> αλλά τους αγνοώ )

M3: Σαν τριώνυμο

Ε: Πως;

M3:  $(x+2)(x+3)$

Ε: Σαν τριώνυμο  $(x+2)(x+3)$ . Ωραία. Πολύ ωραία.

M4: Να κάνω μία ερώτηση;

Ε: Να κάνεις

M4: Αυτό δεν θάπρεπε να είναι  $x^2+5x+6=0$  για να κάνει  $(x+2)(x+3)$ ;

Ε: μμ ναι. Παιδιά έχει δίκιο. Έχει δίκιο. Μπράβο Γιάννη. Εξαιρετικά. Και να σας πω επειδή δεν θέλω να σταθώ εδώ το κάνω αυτό 5 και αυτό 6 (διορθώνω και γράφω  $x^2+5x+6=0$ ). Γιατι αυτό που ήθελα να δούμε είναι ο τρόπος. Ωραία. Λοιπόν. Τώρα επειδή μου το είπατε πριν και περίμενα ότι θα μου το πείτε, κοιτάξτε: αν πάρουμε τώρα μία εξίσωση  $x^2+6x-1=0$  θέλω να μου πείτε: αυτή λύνεται με κάποιους από τους τρόπου που είπαμε μέχρι τώρα;

Μαθητές: Όχι

Ε: Όχι. Οπότε αν σας την δίναν αυτή πως θα τη λύνετε;

Μαθητές: Με διακρίνουσα

Ε: Με διακρίνουσα. Ωραία με διακρίνουσα. Θυμάστε ότι το μάθατε πέρυσι και ξέρετε να το λύνετε. Μάλιστα. Εγώ λοιπόν προτείνω να μην τη λύσουμε με διακρίνουσα και να κάνουμε κάτι άλλο αυτή τη φορά. Όταν το δούμε αυτό, μετά θα συζητήσουμε γιατί το κάναμε έτσι και πως θα πορευτούμε στη συνέχεια. Εντάξει; Σβήνω λοιπόν ότι έχει ο πίνακας και γράφω αυτή την εξίσωση πάνω πάνω για να έχουμε χώρο. Παιδιά αυτό που θα κάνουμε τώρα, βέβαια δεν μας βοηθάει το γεγονός ότι το κάνατε πέρυσι στη τρίτη γυμνασίου, γιατί πραγματικά σαυτό το σημείο που φτάσαμε φτασανε πολύ παλιά ανθρωποι σε αδιέξοδο δηλαδή (εδώ χαμηλώνει η φωνή μου γιατί αισθάνομαι ανεπαρκής να υποστηρίξω ένα ικανοποιητικό ιστορικό πλαίσιο όπως θα ακουστεί παρακάτω. Αναρωτιέμαι γιατί το επιχείρησα αφού δεν προλάβαινα να προετοιμαστώ όσο χρειαζόταν). Ειχαν μια τέτοια εξίσωση

και δεν ξέραν τι να την κάνουνε. Δεν ξέραν πως να την λύσουν. Αυτό γίθνεται σόλα τα πράγματα . Ξέρουμε τρόπους να λύνουμε κάποια προβλήματα και κάποια στιγμή σκοντάφουμε πάνω σε κάτι που δεν ξέρουμε παρακάτω. Και εκεί ψάχνουμε να βρούμε τι μπορούμε να κάνουμε. Λοιπόν σας δίνω αυτή την εξίσωση ( $x^2 + 6x - 1 = 0$ ). Χωρίζω γνωστούς από αγνώστους ( $x^2 + 6x = 1$ ) και θέλω από σας να σκεφτείτε αν στο πρώτο μέλος μπορείτε να διακρίνετε γεωμετρικά σχήματα. Θέλω να μου πείτε αν ο κάθε όρος χωριστά σημαίνει κάτι στη γεωμετρία(το λέω τρεις φορές)  
( Οι μαθητές δείχνουν έκπληκτοι .Μιλάνε όλοι μαζί. Κάποιος λέει <τι γίνεται άλγεβρα δεν κάνουμε;> ακολουθούν γέλια.

E: Άλγεβρα κάνουμε.(και επαναλαμβάνω 2 φορές το ερώτημα). Για πες Μαρία

Μαρία: Για το πρώτο τουλάχιστον είναι εμβαδόν τετραγώνου

E: Πάρα πολύ ωραία. εμβαδόν τετραγώνου. Με τι πλευρά;

Μαρία: Με  $x$

E: Με πλευρά  $x$ . Ένα εμβαδόν τετραγώνου με πλευρά  $x$ . Το άλλο; Το άλλο; Χριστιάννα;

Χριστ: Περίμετρος άλλου σχήματος.

E:Περίμετρος άλλου σχήματος. Μάλιστα. Να σας πω. Τι πράξη είναι αυτή εδώ; (δείχνω ανάμεσα στο 6 και το  $x$  και ακούγεται <πολλαπλασιασμός έξι επί  $x$ >)

E: Έξι επί  $x$ . Ναι. Θα μπορούσε να σας πάει πάλι σε εμβαδόν; ε;(επαναλαμβάνω) Τι λέτε; Μαρία.

Μαρία: Ναι.  $2x$  επί  $3x$

E: Θα μπορούσε να είναι  $2x$  επί  $3x$ ;  $2x$  επί  $3x$  κάνει  $6x^2$ . Πιο απλά. Πιο απλά.Έχουμε το 6 και το  $x$ . Ανί;

Ανί: Η μία πλευρά να είναι 6 και η άλλη  $x$ .

E: Μπράβο Ανί Η μία πλευρά να είναι 6 και η άλλη  $x$ . Οπότε τι σχήμα είναι αυτό με μία πλευρά 6 και την άλλη  $x$ ;

(ακούγεται <ορθογώνιο>)

E: Ορθογώνιο. Έτσι; Ορθογώνιο. Δηλαδή μπορεί να είναι ένα ορθογώνιο με πλευρά  $x$  και 6. Το οποίο 6 παιδιά, είναι 6 μονάδες. Έτσι; Το οποίο μπορεί να είναι έτσι (σχεδιάζω). Το οποίο μπορεί να είναι έτσι (το σχεδιάζω αλλιώς). Και αυτή εδώ να είναι 6 μονάδες. Δεν μας πειράζει. Δεν ξέρουμε πως θα είναι. 6 μονάδες. Σαυτό το σημείο παιδιά εγώ θέλω να σας τα μοιράσω αυτά τα σχήματα. Ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο.

(έχω 14 τετράγωνα και 14 ορθογώνια κομμένα και τα μοιράζω ανά 2 μαθητές με τη βοήθεια της Πόπης για να μη καθυστερούμε)

(ενθουσιασμός, γέλια...)

**(μέχρι εδώ πέρασαν συνολικά 12 λεπτά)**

E: Λοιπόν. Λοιπόν. Έχετε αυτά. Έχω και εγώ το ίδιο. Και θέλω να μου πείτε, να σκεφτείτε μάλλον απαντά , μια πληροφορία θα σας δώσω, αυτό είναι το τετράγωνο που έχει πλευρά  $x$ . Αυτό είναι το ορθογώνιο που έχει τη μεγάλη πλευρά  $x$  και 6 μονάδες είναι η μικρή του πλευρά. Λοιπόν η πληροφορία που σας δίνω είναι ότι αφήνετε το τετράγωνο όπως είναι αλλά το ορθογώνιο μπορείται να το κάνετε ότι θέλετε. Να το κόψετε, να το διπλώσετε....Μπορείτε να σκεφτείτε με τις αλλαγές που θα κάνετε στο ορθογώνιο, πως μπορεί από αυτά τα δύο σχήματα να προκύψει ένα άλλο τετράγωνο; Ένα καινούργιο τετράγωνο; Αυτό εδώ το τετράγωνο και αυτό το ορθογώνιο με την αλλαγή που θα του κάνετε να δώσει ένα άλλο τετράγωνο. Πιθανά να περισσεύει κάτι, πιθανά να λείπει κάτι. Πιθανά να μη γίνεται. Πιθανά να συμβαίνει κάτι άλλο. Μπορεί και τίποτε απόλα αυτά.Θέλω να σκεφτείτε.

M: Κυρία γίνεται αυτό;

E: Πιθανά να μη γίνεται. Δεν ξέρω. Θέλω να σκεφτείτε.

(οι μαθητές ενεργοποιήθηκαν και δοκιμάζουν)

E: Θέλω να κάνετε ερωτήσεις ώστε να βοηθήσω αν χρειαστεί. Να βρείτε κάποια άκρη.

(περιφέρομαι στη τάξη ,παρατηρώ τι κάνουν και περιμένω.) Τι λέτε έχετε κάποια πρόταση να κάνετε;

( δοκιμάζουν , μου δείχνουν μιλάνε όλοι μαζί, γίνεται πολύ φασαρία και εγώ σχολιάζω <αν μιλάτε τόσο δυνατά εγώ δεν θα ακούγομαι και εγώ πρέπει να ακούγομαι και γελάμε όλοι μαζί...>)

E: Κοιτάζετε μια πρόταση που κάνει ο Γιάννης είναι να πέσει το ένα πάνω στο άλλο. Ναι αλλά τότε

έχουμε πρόβλημα γιατί έχουμε πρόσθεση.....(σχεδιάζω στο πίνακα). Δε γίνεται. Τι άλλο μπορεί να γίνει;

(μου δείχνουν...)

E: Πάρα πολύ ωραία θα το κάνω στον πίνακα. Για να δούμε τη πρόταση εδώ που κάνουν τα κορίτσια(Μαρία και Γιωταλία). Η πρόταση είναι να το χωρίσουμε σε 4 κομμάτια. Δε μου λέτε πως μπορεί αυτό να χωριστεί σε 4 ίσα κομμάτια;

M: Να μετρήσουμε

E: Κι αν δεν έχουμε να μετρήσουμε;

(τους δίνω χρόνο)

Μαρία και Γιωταλία: Διπλώνουμε στη μέση και ξανά στη μέση. Κόβουμε τα 4 κομμάτια και τα βάζουμε γύρω από το τετράγωνο (το κάνουν)

E: Πολύ ωραία. Θα το κάνω στον πίνακα. Για σκεφτείτε στο μεταξύ τι άλλο μπορεί να γίνει. Τι άλλο μπορείτε να κάνετε;

**(αυτή είναι μία εξέλιξη που δεν είχαμε προβλέψει. Νιώθω ανήσυχια και έχω δίλημμα αν θα το προχωρήσω να δούμε που θα οδηγήσει ή αν θα το παρακάμψω καταρχήν. Δύο ζητήματα υπάρχουν στη σκέψη μου. Το ένα είναι μήπως οδηγήσει σε μη συμπλήρωση τετραγώνου οπότε μου χαλάει όλη τη προσέγγιση . Το άλλο είναι ότι πιθανά να μη μου φτάσει ο χρόνος να κάνω όσα προγραμματίσα. Για να κερδίσω χρόνο κολλάω με τη βοήθεια της Πόπης το προτεινόμενο σχήμα στον πίνακα με σελοτέιπ. Μιλάμε ψιθυριστά και καταλήγουμε στο να γράψω τη μαθηματική σχέση που αντιστοιχεί στο σχήμα ,να προχωρήσω όπως είχα προγραμματίσει και να επανέλθω αργότερα εφόσον προλάβω.)**

E:Παιδιά κοιτάξτε. Τι μας λείπει εδώ για να γίνει τετράγωνο; (αναφέρομαι στο σχήμα που προτείναν η Μαρία και η Γιωταλία. Τι βλέπετε; Τι μας λείπει; Άσπα ;

Άσπα: Γωνίες

E: Κοιτάξτε. Αν ήθελα να σχηματίσω το τετράγωνο κοιτάξτε τι κάνω. Αυτό δηλαδή .Για να δούμε τι μας έχει προκύψει. Αυτή η πλευρά μας είπε η Μαρία επειδή τη διαιρούμε δια 4 έχουμε  $6 : 4 = 1,5$  . Ωραία. 1,5 είναι η μικρή πλευρά και τι μας λείπει εδώ; Νίκο;

Νίκος: Μικρά τετραγωνάκια με εμβαδόν  $1,5^2$

E:Μικρά τετραγωνάκια με εμβαδόν  $1,5^2$  . Έτσι; Δηλαδή ο μετασχηματισμός που κάνατε είναι ο εξής:  $\chi^2 + 1,5\chi = 1$ . Αλλά για να γίνει αυτό τετράγωνο τι μας λείπει;

M: 4 τετραγωνάκια

E:4 τετραγωνάκια. Δηλαδή αν κάνω αυτό  $\chi^2 + 1,5\chi + 4 \cdot 1,5^2 = 1$  καλά το έχω κάνει; Για κοιτάξτε πως ήτανε τι έκανα. Παναγιώτα;

Παναγιώτα: Πρέπει να προσθέσουμε και εκεί  $4 \cdot 1,5^2$ .

E:Πρέπει να προσθέσω και εκεί  $4 \cdot 1,5^2$ . Μάλιστα. Τώρα; Τώρα; Αυτό είναι ένα σύνθετο πράγμα που προέκυψε και είναι πάρα πάρα πολύ ωραίο. Θα επανέλθουμε κάποια στιγμή σαυτό αλλά παιδιά θέλω να κάνουμε κάτι το οποίο μοιάζει με αυτό αλλά είναι λίγο πιο απλό. Θα μπορούσατε , εδώ τι κάνατε; Κόψατε το ορθογώνιο σε πλευρές  $\chi$  και 1,5 . Αν το ορθογώνιο το κόβατε με άλλο τρόπο, με άλλο τρόπο, έτσι ώστε , ναι; (κάτι λέει ο μαθητής Γιάννης που δεν ακούγεται καλά)Γιάννη αστο λίγο, αστο λίγο. Άλλη ιδέα έχετε; Καταρχήν σκέφτηκε κανείς κάτι άλλο; Παιδιά το τετράγωνο εδώ (δείχνω το σχήμα που είναι κολλημένο στον πίνακα) τι πλευρά έχει; Το αρχικό είχε  $\chi$ , το καινούργιο;

M:(δεν ακούγεται)

E: Αυτή η πλευρά είναι  $\chi$ , αυτή η διάσταση είναι 1,5 και αυτή είναι 1,5 . Παναγιώτη;

Παναγιώτης:  $\chi+3$

E: $\chi+3$ . Η πλευρά του είναι  $\chi+3$  έτσι; Αν δηλαδή παιδιά μάλλον πως θα μπορούσατε να το χρησιμοποιήσετε που είναι  $\chi$  αυτή η 6 ή άλλη για να σχηματίσετε ένα τετράγωνο με πλευρά  $\chi+3$ ; πως θα μπορούσατε να το χρησιμοποιήσετε αυτό(δείχνω) ώστε τούτο εδώ να γίνει τετράγωνο με πλευρά  $\chi+3$ ; Αλλά όχι όπως έγινε εκεί. Πως αλλιώς θα μπορούσε να γίνει; Τι λές Ευτυχία;

Ευτυχία: Να το διπλώσουμε στη μέση...

E:Να το διπλώσουμε στη μέση λέει η Ευτυχία (συνεχίζει η Ευτυχία αλλά δεν ακούγεται). Ωραία.

Ακούστε τώρα τι λέει η Ευτυχία (σχεδιάζω στο πίνακα τη Πρόταση της Ευτυχίας) Κοιτάξτε αυτό το σχήμα Νίκο είναι πιο απλό. Του λείπει μόνο ένα τετραγωνάκι. Του λείπει μόνο ένα τετραγωνάκι. Νίκο;

Νίκος: Το οποίο έχει εμβαδόν  $3^2$

E: Το οποίο έχει εμβαδόν  $3^2$  και η πλευρά του είναι;

Νίκος: 3

E: Και η πλευρά του είναι 3. Για να το δούμε λίγο. Εδώ δηλαδή έχουμε  $\chi$  εδώ είναι 3 και εδώ είναι 3. Δηλαδή για να δούμε  $\chi^2 + 3\chi + 3\chi = 1$ .  $\chi^2 + 3\chi + 3\chi + 3^2$  (και το εμβαδόν που είπε ο Νίκος)  $= 1 + 3^2$ . Καλά μέχρι εδώ; Λέω ότι το  $6\chi$  που είχαμε το μοιράσαμε. Εμείς τι είχαμε; Είχαμε αυτό κιαυτό(δείχνω). Το χωρίσαμε αυτό στη μέση και πήραμε 3 από τη μία μεριά και 3 από την άλλη μεριά; Και έχουμε ένα πρόβλημα τώρα. Τι πρόβλημα έχουμε;

M: Μας λείπει το τετραγωνάκι.

E: Ότι μας λείπει αυτό το τετραγωνάκι Το οποίο το προσθέτουμε. Είναι  $3^2$  τώρα; Αυτό που υπάρχει εδώ με αυτό που έχω γράψει εδώ είναι εντάξει

Μαθητές : Ναι

E:Ναι. Τι είναι; Τι θέλετε;

M: Θέλω να ρωτήσω κάτι

E: Να ρωτήσεις (πάω στον μαθητή. Δεν ακούγεται τι ρωτάει) Ναι, μισό λεπτό, μισό λεπτό ο Κώστας ρωτάει αν γίνεται να βγει σχήμα χωρίς μνα λείπει κάτι. Και ήδη έχουμε δύο περιπτώσεις στον πίνακα που και στις δύο περιπτώσεις κάτι μας λείπει. Έτσι; Ο Γιώργος κάτι θέλει να πει (μιλάει ο Γιώργος δεν ακούγεται τι λέει, γελάνε οι υπόλοιποι γίνεται οχλαγωγία μου λέει να μην το πω) Δεν το λέω δεν το λέω θα το πούμε μετά. Αν το γράψω .ετσι είμαι εντάξει;  $\chi^2 + 2 \cdot 3\chi + 3^2 = 10$ .

M: Ναι

E: Τι έγινε τώρα; Τι σχηματίστηκε εδώ;

M: Ταυτότητα

E: Δυνατά

Μαθητές: Ταυτότητα Ταυτότητα Ταυτότητα Ταυτότητα (γέλια)

E: Ταυτότητα. Ποια ταυτότητα είναι αυτή δηλαδή; Τι λέτε; Ανι;

Ανί: (λέει)  $(\chi+3)^2$

E: (Λέω)  $(\chi+3)^2 = 10$ . Δε μου λέτε είναι αυτό συμβατό; Το τετράγωνο που έχουμε στο πίνακα τι πλευρά έχει;

M:  $\chi+3$

E:  $\chi+3$ . Εδώ δηλαδή εμείς φτιάξαμε ένα τετράγωνο με πλευρά  $\chi+3$  που σημαίνει ότι το εμβαδόν του είναι τόσο.  $(\chi+3)^2$  ακριβώς αυτό που μας βγήκε εδώ. Αυτό ξέρω να το λύνω τώρα έτσι όπως είναι; Μπορώ να βρω τη λύση με τις μεθόδους που ξέρω;

Ευτυχία:  $\chi+3 = \pm$  ρίζα 10

E: Λέει η Ευτυχία  $\chi+3 = \pm$  ρίζα 10.  $\chi+3 = \pm$  τετραγωνική ρίζα του 10. Έτσι; Λύνουμε ως προς  $\chi$  και βγαίνει μια χαρά. Δηλαδή παιδιά και το ίδιο πράγμα γίνεται και εκεί. Αν κάνουμε κατάλληλα τις πράξεις και το 1,5 το κάνουμε  $3/2$  και κάνουμε τις απλοποιήσεις (κάνω αναφορά στη πρόταση των κοριτσιών Μαρία και Γιωταλία που απέφυγα τότε, αλλά και τώρα δεν επιμένω για τους ίδιους λόγους) θα μας βγει και εκεί πάλι ταυτότητα από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε το  $\chi$ . Έτσι παιδιά; Δηλαδή παιδιά τι κάναμε εδώ; Ούτε περσινή γνώση χρησιμοποιήσαμε, ούτε παραγοντοποίηση κάναμε. Οδηγηθήκαμε δηλαδή μέναν τελείως διαφορετικό τρόπο στη λύση της εξίσωσης. Το βασικό παιδιά εδώ θες να πεις;

M: Ναι

E: Τι;

M: Προσθέσαμε και στα δύο μέλη

E: Τι προσθέσαμε και στα δύο μέλη; Δυνατά Γιάννη Τι προσθέσαμε εδώ;

Γιάννης: Το  $3^2$

E: Το  $3^2$ . Και τι είναι γεωμετρικά το  $3^2$ .

Γιάννης: Ένα τετράγωνο

E: Δηλαδή προσθέσαμε ένα τετράγωνο. Αυτή παιδιά η μέθοδος λέγεται μέθοδος της συμπλήρωσης

τετραγώνου. Είναι ένας τρόπος που χρησιμοποίησαν παιδιά στην αρχαιότητα πρώτοι οι Βαβυλώνιοι. Εδώ και χιλιάδες χρόνια οι άνθρωποι προσπάθησαν να λύσουν τέτοιες εξισώσεις αφού δεν ξέραν ούτε διακρίνουσα ούτε τίποτα (λέω δύο τρία ιστορικά στοιχεία για τους Βαβυλώνιους και τους Ινδούς που δεν ακούγονται καθαρά και δεν επιμένω γιατί είναι ανεπαρκής οι γνώσεις μου πάνω σ'αυτά και δεν είχα χρόνο για περισσότερα με αποτέλεσμα να κινηθεί ελάχιστα το ενδιαφέρον των παιδιών απότι είδα). Χριστίνα;

Χριστίνα: Γιατί τα κάναμε όλα αυτά;

Ε: Ρωτάει η Χριστίνα γιατί τα κάναμε όλα αυτά. Και λέω είμασταν σε αδιέξοδο. Είμασταν εδώ και δεν ξέραμε με δεδομένο βέβαια ότι δεν θα χρησιμοποιήσουμε την διακρίνουσα. Με όλους τους τρόπους τις δευτεροβάθμιας εξίσωσης που προσπαθήσαμε δεν μπορούσε να λυθεί αυτό. Έπρεπε να βρούμε έναν άλλο τρόπο. Ο άλλος τρόπος είναι αυτό που κάναμε. Το κάναμε γεωμετρικά. Και καταφέραμε να καταλήξουμε σε ταυτότητα πάλι. Έτσι όπως ήταν αυτό στην αρχή υπήρχε περίπτωση να ξέρει κανείς ότι αυτό θα γινόταν ταυτότητα;

Μ: Όχι

Ε: Όχι. Έτσι; Και αυτό το καταφέραμε με τη συμπλήρωση τετραγώνου και φτιάξαμε ταυτότητα..

Και έτσι έχουμε

$x = \sqrt{10 - 3}$  ή  $x = -\sqrt{10 - 3}$ . Να σας ρωτήσω τώρα κάτι; Ναι Άννα τι είναι;

Άννα: Γιατί όμως δεν χρησιμοποιήσαμε τη διακρίνουσα;

Ε: Γιατί δεν τη ξέρουμε υποτίθεται.

Μαθητές: Πως δεν τη ξέρουμε;

Ε: Βρε παιδιά να σας πω κάτι;

# Σημειώματα

## Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Δέσποινα Πόταρη 2014. Δέσποινα Πόταρη. «Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών και Διδακτική Πράξη.». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/MATH237/>.

## Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

## Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

