ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών και Διδακτική Πράξη

Δέσποινα Πόταρη

Σχολή Θετικών επιστημών

Τμήμα Μαθηματικό

Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΣΤΟ Β7
(ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ)

01.21.Κ: Το θέμα μας σήμερα είναι βασικά η συνάρτηση $\psi = \alpha^{\chi}$, που ονομάζεται εκθετική συνάρτηση. Αλλά παράλληλα, πριν φτάσουμε εκεί, μας ενδιαφέρει να δούμε κάποια άλλα θέματα, που προηγούνται στο να φτάσεις στην γραφική παράσταση.
01.54Κ: Τον τελευταίο καιρό έχουμε μιλήσει πολλές φορές για αυτήν την αντιπαράθεση της αριθμητικής με την γεωμετρική πρόοδο. Μέσα από αυτό το πινακάκι σας θυμίζω ότι έχουμε αρχικά διαπιστώσει τις ιδιότητες των δυνάμεων, μετά εξηγήσαμε την ονομασία του λογαρίθμου, μετά δώσαμε τον τυπικό ορισμό και διαπιστώσαμε τις ιδιότητες των λογαρίθμων. Έχουμε κάνει πολλά και σήμερα θα κάνουμε άλλο ένα ωραίο μέσα από αυτό το πινακάκι, μέσα από αυτήν την αντιπαράθεση δύο διαφορετικών κόσμων. [Β3:Πάνω είναι ο προσθετικός κόσμος, πάω συν ένα, και κάτω είναι ο πολλαπλασιαστικός κόσμος, πάω επί δύο].

03.43.Κ: Σε αυτό το πινακάκι, αν ονομάζαμε τις τιμές της αριθμητικής προσόδου με χ και τις τιμές της γεωμετρικής προόδου με ψ, ποια σχέση συνδέει το χ με το ψ έτσι ώστε να προκύπτουν αυτές οι αντίστοιχες τιμές; Ποια είναι η συνάρτηση ας πούμε που εκφράζει το ψ ως προς το χ;
Μς: $\psi = 2^{\chi}$
Κ: Μάλιστα. Να το διαπιστώσουμε: αν βάλουμε στη θέση του χ το 2 θα βγει το 4, αν βάλουμε στην θέση το 3, θα βγει 8, σαφώς είναι αυτή η σχέση που βρήκαμε. Ποια θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι η βασική ιδιότητα εδώ;
Μς: ……..
Κ: Κοιτάξτε κάτι που δεν το έχουμε σκεφτεί ίσως. Αν αυξήσω το χ κατά 1. Ας πούμε ότι το χ είναι 2 και το κάνω 3. Τα αντίστοιχα ψ θα είναι το 4 και το 8. Ομοίως, αν το χ είναι 5 και το αυξήσω κατά 1, θα γίνει 6. Τα αντίστοιχα ψ θα είναι το 32 και το 64.
Παναγιώτης: Γίνεται διπλάσιο.
Κ: Για να δούμε αυτό που λέει ο Παναγιώτης: Το 8 είναι διπλάσιο του 4, δηλαδή 8 δια 4 κάνει 2, και το 64 είναι διπλάσιο από το 32, δηλαδή 64 δια 32 κάνει 2. Αυτό τι σημαίνει; Ότι όταν το χ αυξάνεται κατά 1 το ψ διπλασιάζεται. Δηλαδή, έχουμε ένα ποσοστό με το οποίο μεταβάλλεται το ψ . Το ποσοστό αυτό ποιο είναι; Με ποιο ποσοστό μεταβάλλεται το ψ όταν το χ μεταβάλλεται κατά 1; Αφού διπλασιάζεται ποιο ποσοστό είναι;

Μς: 200% [το σωστό είναι 100%!!!!!!!!!]

05.56Κ: Δηλαδή το ψ μεταβάλλεται με ένα σταθερό ποσοστό, όταν το χ μεταβάλλεται κατά 1. Λοιπόν καλά. Αυτό το κρατάμε και πάμε λίγο στο φυλαδιάκι μας. Έχω παραστήσει με σημεία, όλα τα ζεύγη των αντιστοίχων τιμών. Από το διάστημα – 4 έως το 10. Και με το Excel, έχω βρει τα αντίστοιχα σημεία.

06.25.Κ: Αυτή είναι η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης; Αυτά τα σημεία; Ή για αυτό το πινακάκι τιμών;

Μς: ………

Κ: Μπορώ να βάλω και άλλες τιμές στο χ;

Μς: Όσες θέλουμε [εννοεί μεγαλύτερες του 10]

Κ. Τι τιμές να βάλω; Μπορώ να βάλω τιμές μεγαλύτερες του 10, αλλά τα κενά πως θα τα καλύψω ανάμεσα σε αυτά τα σημεία;

Δήμητρα: [νομίζω:] Πρέπει να βάλουμε τιμές ανάμεσα. Αλλά αυτό δεν…

Κ: Πρέπει να βάλουμε νέες τιμές εδώ μέσα. Να προσπαθήσουμε να καλύψουμε τα κενά; Γιατί όπως ξέρετε εσείς, όλες οι γραφικές παραστάσεις που σας έχουνε δοθεί, είναι συνεχόμενες γραμμές. Αλλά πως βγαίνει αυτό το συνεχόμενο; Για να δούμε ένα παράδειγμα εδωπέρα.

07.35Κ: Θα προσπαθήσουμε σε πρώτη φάση, να χωρίσουμε το διάστημα [0,1] και [1,2] στη μέση. Άμα το χωρίσουμε στην μέση: πάνω θα βάλουμε το ½ έτσι; Το ½ είναι το μισό του 1; Ναι γιατί ½ και ½ κάνει 1. Αλλά από κάτω ποιο είναι το μισό; Σας θυμίζω ότι από πάνω είναι αριθμητική πρόοδος και από κάτω είναι γεωμετρική. Τι σημαίνει αυτό; Αυτό σημαίνει ότι πάνω πάω προσθετικά, κάθε φορά προσθέτω το 1, έχω έναν προσθετικό κόσμο από πάνω. Και από κάτω πάω πολλαπλασιαστικά, κάθε φορά πολλαπλασιάζω με το 2.

Κωνσταντίνος: ρίζα 2

Κ: Η μονάδα από πάνω ποια είναι; Η μονάδα στον προσθετικό μου κόσμο ποια είναι;

Μς: το 1

Κ: και η μονάδα στον πολλαπλασιαστικό κόσμο;

Μς: το 2

Κ: Ωραία. Άρα λοιπόν τι θα βάλω εδώ πέρα στον πολλαπλασιαστικό κόσμο.

Μς: Ρίζα 2

Κ: Λένε ρίζα 2. Να το αποδείξουμε. Στο πινακάκι έχω βάλει πάνω $α_1$ και κάτω $γ_1$. Θέλω να βάλω κάτι εδώ πέρα, ώστε να διατηρείται ο προσθετικός κόσμος, δηλαδή η αριθμητική πρόοδος, και από κάτω να διατηρείται ο γεωμετρικός κόσμος, δηλαδή η γεωμετρική πρόοδος. Να μην χαλάει η γεωμετρική πρόοδος.

Δηλαδή, για να διατηρείται η αριθμητική πρόοδος πρέπει να έχω $\alpha_1 - 0 = 1 - \alpha_1$.

Το θυμάστε αυτό; Η διαφορά πρέπει να είναι σταθερή. Αυτό σημαίνει αριθμητική πρόοδος. Και από κάτω θέλω το $\gamma_1/1 = 2/\gamma_1$. Δηλαδή οι λόγοι να είναι ίσοι, δηλαδή γεωμετρική πρόοδος. Πάνω λοιπόν, αν λύσω ως προς α_1 θα μου δώσει (1 + 0)/2 και κάτω $\gamma_1^2 = 2\cdot 1$. Τι σας θυμίζουν αυτά;

Μς: Τον αριθμητικό μέσο και τον γεωμετρικό μέσο.

Κ: Γιατί τα είπαν μέσους; Για κοιτάξτε ο αριθμητικός μέσος. Γιατί το είπαν έτσι; Είναι στην μέση έτσι; Είναι το μισό του 1. Γιατί; Γιατί δύο φορές το ½ [1/2 και ½] [αν το προσθέσω με τον εαυτό του] μου κάνει 1. Το ρίζα 2 τώρα είναι στη μέση γιατί; Είναι στην μέση πολλαπλασιαστικά γιατί αν το πολλαπλασιάσω με τον εαυτό του 2 φορές μου κάνει 2. Άρα είναι το μισό του 2 με αυτήν την έννοια. Πολλαπλασιαστικά έτσι;

11.35Κ: Και εδώ πέρα τι μπαίνει;

Μς: ……..

Κ: Πάνω είναι 3/2, δηλαδή ένα και μισό.

Μ: ρίζα 3;

Κ: Ρίζα 3 όχι

Μ: ρίζα 2 δεύτερα;

Κ: όχι

Κ: ένα και μισό πολλαπλασιαστικά

Μς: 2 ρίζα 2.

Κ: Πράγματι το 2 ρίζα2 είναι ο μέσος του 2 και του 4, αφού το τετράγωνό του κάνει 2·4. Άρα πάμε καλά. Πάμε με γεωμετρική πρόοδο.

Κ: Μετά τι θα μπει;

Μς: 5/2 και 4 ρίζα2.

Κ: Ωραία. Η επόμενη ερώτηση είναι η εξής: διατηρείται η σχέση $\psi = 2^{\chi}$; Το πινακάκι αυτό τώρα αντιστοιχεί σε μια άλλη συνάρτηση ή στην ίδια;

Μς: Στην ίδια.

Κ: Γιατί;

Γιάννης: Γιατί την επαληθεύει. Αν βάλλουμε στην θέση του ψ ρίζα2….

Κ: Ναι, και στην θέση του χ ½, παίρνουμε $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$. Ισχύει αυτό;

Γιάννης: Ναι.

Κ: Ποιος μας το λέει αυτό;

Γιάννης: Το ρίζα 2 από τις ιδιότητες των δυνάμεων μπορούμε να το κάνουμε 2 εις την ½.

Κ: Δεν είναι ιδιότητα είναι ορισμός.

Γιάννης: Ναι

Κ: Και ποιος τον λέει αυτόν τον ορισμό;

Γ: Α, τώρα…

Κ: Εγώ θέλω να το πιάσουμε από κει. Μας είπανε κάποιοι ότι $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$. [Μιλάμε και για το $2^{3/2}$ ότι κάνει 2·ρίζα2] Και γενικά ο ορισμός λέει ότι $\sqrt[\nu]{\alpha} = \alpha^{\frac{\kappa}{\nu}}$. Γιατί το λέει αυτό ο ορισμός; Βλέπουμε εδώ πέρα μια αιτία που λέει αυτόν τον ορισμό; Θα έπρεπε τα δύο πινακάκια να αντιστοιχούν στην ίδια συνάρτηση; Είναι ο ίδιος νόμος; Ποιος είναι ο νόμος που διέπει το πάνω πινακάκι;

Μς: ….

Κ: Ο νόμος που είπαμε πριν είναι ότι αν αυξήσω το χ κατά ένα, τότε το ψ αυξάνεται με σταθερό ποσοστό. Αν ο νόμος αυτός ισχύει και για το κάτω πινακάκι τότε μιλάμε για την ίδια συνάρτηση. Γιατί κάθε συνάρτηση ορίζεται από κάποιο νόμο που συνδέει τα χ με τα ψ. Για να δούμε ισχύει αυτός ο νόμος εδώ. Ας πάρω για χ το ½. Το αυξάνω κατά 1, πάει 3/2. Το ψ πάει ρίζα2 και μετά πάει 2·ρίζα2. Διπλασιάζεται πάλι; Αυξάνεται δηλαδή το ψ με τον ίδιο ρυθμό, με το ίδιο ποσοστό, καθώς το χ αυξάνεται κατά 1; Άρα είναι ο ίδιος νόμος! Άρα σαφώς θα πρέπει να ταυτίσουμε τα δύο πινακάκια. Άρα σαφώς θα πρέπει να ορίσω ότι πρέπει $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$. Να γιατί βγαίνει αυτός ο ορισμός. Δεν είναι ένας αυθαίρετος ορισμός. Δηλαδή $2^{0,5}$. Θα ασχοληθούμε με αυτό και παρακάτω, να το ξεκαθαρίσουμε πιο καλά ακόμα.

17.00: Βλέπουμε εδώ πέρα παιδιά, στην πίσω σελίδα, έχω κάνει χωρισμό σε δύο ίσα κομμάτια όλων των διαστημάτων και έχει βγει αυτή η παράσταση. Αυτό σε σχέση με το διάγραμμα 1 μπορείτε να το δείτε λίγο και να κάνετε καμία παρατήρηση;

Κωνσταντίνος: Μικρότερα τα κενά…

Κ: Μικρότερα τα κενά αφού τα έχουμε πυκνώσει

Κωνσταντίνος: Και είναι λιγάκι ποιο απότομη η καμπύλη…

Κ: Ίσως εδώ να μας ξεγελάει επειδή μικρύναμε το διάστημα. Άμα το δεις στο ίδιο διάστημα είναι το ίδιο. Η ουσία είναι ότι ανεβαίνει. Όσο μεγαλώνει το χ μεγαλώνει και το ψ έτσι; Αλλά, τα κενά τα έχουμε καλύψει; Όχι. Πάμε να χωρίσουμε το κάθε διάστημα σε περισσότερα κομματάκια μπας και καλύψουμε τα κενά; Στο φύλλο έχω κάνει με τρία αλλά ας πάμε στα δέκα κομμάτια κατευθείαν. Το άγχος μας είναι να δούμε πως γεμίζουνε τα κενά. Να δούμε πως γεμίζονται. Πως θα χωρίσουμε το καθένα από τα αρχικά διαστήματα σε 10 ίσα κομμάτια;

19.03 Γιάννης 1: Πως θα καταφέρουμε να καλύψουμε τα κενά αν δεν πάρουμε πάρα πολύ μικρές αποστάσεις. Δηλαδή…

Κ: Ναι αυτό πάμε να κάνουμε.

Γιάννης 1: Δεν καλύπτονται κύριε τα κενά. Μπορούμε να βρούμε πολλά σημεία και να τα ενώσουμε, αλλά τα κενά …

Κ: Δηλαδή, συγνώμη Γιάννη. Όταν σου λέει η παραβολή είναι κάπως έτσι, μια συνεχόμενη γραμμή, στην πραγματικότητα υπάρχουν κενά αλλά δεν τα βλέπουμε;

Γ. Όχι, δεν υπάρχουν κενά, αλλά εμείς δεν μπορούμε να τα κατασκευάσουμε βρίσκοντας όλες τις τιμές μία – μία και…[δεν το ακούω καλά]

Κ: Ναι πρακτικά δεν μπορούμε, θεωρητικά όμως μπορούμε να σκεφτούμε πως στην πραγματικότητα μπορούν να καλυφθούν. Θεωρητικά…

Γιάννης 1: Ναι

Κ: Πρακτικά φυσικά δεν μπορούμε, αλλά μπορούμε θεωρητικά να σκεφτούμε και να καταλάβουμε πως καλύπτονται τελικά.

Λοιπόν, αν χωρίζουμε σε 10 ίσα κομματάκια τι τιμές θα βάλω πάνω;

Μς: 0,1, 0,2, ……

Κ: Ωραία, από κάτω πόσο θα είναι το κάθε κομματάκι; Πάνω είναι προσθετικά. Το ένα δέκατο έτσι; Χώρισα την μονάδα σε 10 ίσα κομματάκια προσθετικά. Και το ένα κομματάκι από αυτά είναι το ένα δέκατο γιατί 1/10 και 1/10 κ.λ.π κάνει την μονάδα. Από κάτω, πολλαπλασιαστικά, πως θα χωρίσω το 2 σε 10 ίσα κομματάκια;

Παναγιώτης: Μπορούμε να το γράψουμε σαν $10^{η}$ ρίζα του 2

Κ: Λέει ο Παναγιώτης $10^{η}$ ρίζα του 2. Συμφωνείται;

Μς: Ναι

Κ: Σαφώς είναι. Μετά τι θα πάει;

Μς: $20^{η}$ ρίζα του 2.

Κ: όχι. Εδώ είναι το 1/10 του 2. Μετά θα πάει το 2/10 του 2. Ποια είναι τα 2/10 του 2;

Παναγιώτης: $10^{η}$ ρίζα του 4

Κ. Δηλαδή $10^{η}$ ρίζα του 2 εις την δευτέρα. Μετά θα πάει τα 3/10 του 2.

Μς: $10^{η}$ ρίζα του 2 εις την τρίτη και μετά $10^{η}$ ρίζα του 2 εις την τετάρτη. Μέχρι να πάει εις την $10^{η}$ και να γίνει 2.

22.00 Κ: Πάλι εδώ πέρα τι βλέπουμε; Αφού διατηρείται ο τύπος $ψ = 2^{χ}$, άμα το δοκιμάσετε θα δείτε ότι όταν το χ αυξάνεται κατά 1 το ψ μεταβάλλεται κατά το διπλάσιό του, το ποσοστό αύξησης του ψ είναι πάλι 200% [το σωστό είναι 100%!!!!!!!!!]. Άρα προκύπτει, από την ισότητα, ότι $2^{0,1} = \sqrt[10]{2}$. Εντάξει αυτό υπακούει τον ορισμό που είχαμε δώσει και πριν. Άρα τι είναι το $2^{0,1}$; Άμα σου πω τι είναι το 0,1 τι θα μου πεις;

Μς: Το 1/10 της μονάδας

Κ: Δηλαδή θα μου πεις ότι πρέπει να χωρίσω την μονάδα σε 10 ίσα κομματάκια και να πάρω το 1. Αν σε ρωτήσω τι είναι το $2^{0,1}$, τι θα μου πεις;

Παναγιώτης: Πρέπει να χωρίσω το 2 σε 10 ίσα κομματάκια…

Κ: Αλλά τι όμως; Όχι προσθετικά, πολλαπλασιαστικά και να πάρω το 1. Ωραία.

23.00: Κ: Έχω κάνει τώρα στο διάγραμμα 6 τα σημεία με τα 10 κομματάκια. Καλύπτονται τα κενά;

Μς: Όχι

Κ: Μετά η επόμενη κίνηση ποια θα μπορούσε να είναι; Αφού δουλεύουμε στο δεκαδικό σύστημα, η επόμενη λογική κίνηση ποια θα μπορούσε να είναι;

Μς: Σε 20 ….σε 100

Κ: Σε 100 ναι. Αφού δουλεύουμε στο δεκαδικό σύστημα πάμε με τις δυνάμεις του 10. Χωρίζουμε σε 100 ίσα κομματάκια. Πάνω θα ήταν 0,01 και κάτω τι θα ήταν;

Μς: $100^{η}$

Κ. Σωστά, $100^{η}$ ρίζα του 2. Κοιτάξτε το διάγραμμα 6 με τα 10 ίσα κομματάκια και το διάγραμμα 8 με τα 100 ίσα κομματάκια. Βλέπετε ότι η μορφή της καμπύλης παραμένει η ίδια. Της υποτιθέμενης καμπύλης. Αλλά τα καλύψαμε τα κενά επιτέλους;

Μς: Ναι

Κ: Τα καλύψαμε;

Μς: Φαινομενικά

Κ: Φαινομενικά ναι. Στην πραγματικότητα τα καλύψαμε;

Μς: Όχι

Γιάννης: Αν συνεχίσουμε, άπειροι αριθμοί άρα…

Μς: Άπειροι….

Γιάννης 1: Αυτό δεν θα το κάνουμε ποτέ.

Γιάννης: Άπειρα κενά

Κ: Συγνώμη, αυτό που έλεγε ο Γιάννης 1 ότι ποτέ δεν καλύπτονται;

Μς: Ναι

Κ: Δηλαδή και αυτή η συνεχόμενη γραμμή τι είναι, απάτη;

Γιάννης 1: Όχι, θεωρητικά υπάρχει, εμείς δεν πρόκειται να το κάνουμε ποτέ.

Κ: Ναι

Γιάννης 1: Δεν μπορούμε να βρούμε όλες τις τιμές και να ενώσουμε…

Κ: Πρακτικά όχι. Αλλά …

Γ: Εντάξει ξέρουμε ότι υπάρχει

Κ: Γιατί όμως υπάρχει;

Γιάννης 1: ….

Κ: Δηλαδή, τι άλλο θα μπορούσα να κάνω. Εδώ χωρίζω σε 10 κομματάκια, τίποτα. Χωρίζω σε 100 κομματάκια, τίποτα. Σε 1000 κομματάκια, τίποτα. Παίρνω δηλαδή πάνω, στην ουσία, αφού χωρίζω σε 10, 100 κ.λ.π κομματάκια, παίρνω όλους τους δεκαδικούς αριθμούς. Δηλαδή όλους τους ρητούς αριθμούς. Έτσι δεν είναι; Γιατί μετά θα πάει 1,01, 1,02, μετά θα πάει 1,001, 1,002 αλλά τα κενά δεν καλύπτονται. Γιατί όμως; Ο άξονας χ΄χ, σε ένα σύστημα αξόνων, που βάζουμε τα χ, τι αριθμούς περιέχει;

Κωνσταντίνος: Όλο το R

Κ: Όλο το R, δηλαδή όλους τους δεκαδικούς που πάω να βάλω εγώ εδώ, τους δεκαδικούς δηλαδή τους ρητούς, τι άλλο περιέχει;

Μς: Τους άρρητους.

Κ: Τους άρρητους. Άρα λοιπόν τίθεται το ερώτημα: Μπορώ εγώ να βάλω κάπου στην πάνω γραμμή το ρίζα2 για παράδειγμα;

Μς: Γιατί όχι

Κ: Και αν βάλω το ρίζα2, μετά θα πρέπει να υπολογίσω το 2 εις την ρίζα2. Υπάρχει το 2 εις την ρίζα2; Πως μπορώ να το προσεγγίσω;

Μς: ……..

Κ: Τι είναι το 2 εις την ρίζα2; Αφού το ρίζα2 είναι ένας άρρητος αριθμός, δεν τα ξέρω όλα τα δεκαδικά του ψηφία.

Μς: Να το βάλεις στο κομπιουτεράκι

Μς: Δεν γίνεται

Κ: Για πάμε λοιπόν τώρα να προσεγγίσουμε το 2 εις την ρίζα2. Να δούμε τι πράγμα είναι αυτό. Υπάρχει; Πως μπορούμε να το βρούμε;

26.49: Παναγιώτης: Ξέρουμε ότι το ρίζα2, το έχουμε υπολογίσει από πριν ότι είναι 2 εις την 0,5

Γιάννης: Ναι 2 εις την ½.

Κ: Να σου πω: το ρίζα2 είναι 1,41421356….κ.λ.π Αυτό είναι το ρίζα2.

Άρα $2^{\sqrt{2}} = 2^{1,41421356....}$ Αν ο εκθέτης ήταν ρητός θα μπορούσα να τον βρω στον χωρισμό που έκανα πριν σε 10, 100, 1000,…… κομματάκια. Κάπου θα τον συναντούσα. Αλλά αυτός όμως…, δεν ξέρω τα δεκαδικά του ψηφία. Είναι άπειρα και μη επαναλαμβανόμενα. Άρα σε αυτή την διαδικασία του χωρίσματος – να μικρύνω δηλαδή τα διαστήματα ώστε να γεμίσω τα κενά – δεν θα εμφανιστεί το ρίζα2, γιατί δεν είναι ρητός.

Μ: Πάλι όμως μπορώ να το βρω έστω στο περίπου.

Κ: Ωραία, πως μπορώ να τον προσεγγίσουμε; Καταρχήν αν πάμε με δεκαδική προσέγγιση ενός δεκαδικού ψηφίου το $2^{\sqrt{2}}$ ανάμεσα σε ποια νούμερα θα είναι;

Παναγιώτης: $10^{η}$ ρίζα του 2 εις την $14^{η}$

Κ: Ναι. Θα είναι $2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5}$. Το $2^{1,4}$ δεν μπορώ να το βρω; Χωρίζω σε 10 ίσα κομματάκια και παίρνω τα 14. Τα έχω υπολογίσει, κοιτάξτε στο φυλλάδιο, με προσέγγιση βέβαια κάποιων δεκαδικών ψηφίων. Για να τα παρατηρήσουμε λίγο. Στην πρώτη περίπτωση είναι το $2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5}$, με τις δεκαδικές προσεγγίσεις των $2^{1,4}$ και $2^{1,5}$. Μετά έχω πάρει μια προσέγγιση με δύο δεκαδικά ψηφία. Θα είναι $2^{1,41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42}$. Και συνεχίζω με 3 δεκαδικά ψηφία, με 4 δεκαδικά ψηφία,… Για παρατηρείστε λίγο αυτά τα νούμερα που προκύπτουν στα δύο άκρα, τι βλέπετε;

Μ: Είναι διαφορετικά

Κ: Είναι διαφορετικά. Πολύ διαφορετικά; Για κοιτάξτε τα λίγο προσεκτικά πως πάνε.

Γιάννης: Αυξάνει κατά 1 συνέχεια.

Παναγιώτης: Μετά από κάποια ψηφία υπάρχει στασιμότητα…

Κ: Για να δούμε τι λέει ο Παναγιώτης. Λέει ότι μετά από κάποια ψηφία, μετά από κάποια βήματα αυτής της διαδικασίας, σταθεροποιούνται, υπάρχει μια στασιμότητα λέει, σταθεροποιούνται τα δεκαδικά ψηφία. Κοιτάξτε λίγο. Στην αρχή είναι το 2 μόνο. Μόνο το ακέραιο μέρος. Μετά πάει το 2,6, ίδιο. Μετά πάει το 2,66 ίδιο. Το βλέπετε και στα δύο άκρα; Τι σημαίνει αυτό; Ότι όσο θα συνεχίζεται αυτή η διαδικασία τι θα γίνεται;

Παναγιώτης: Κάθε ένα θα σταθεροποιείται με ποιο πολλούς αριθμούς.
Κ. Θα σταθεροποιούνται αυτά. Πράγματι, αποδεικνύεται με την βοήθεια των ορίων, ότι αυτή η διαδικασία τελικά κάπου καταλήγει δηλαδή, τι σημαίνει καταλήγει;
Παναγιώτης: Φτάνει σε έναν αριθμό
Κ: Φτάνει σε έναν αριθμό. Με ποια έννοια, αφού είναι άπειρη διαδικασία**,** δεν φτάνει ποτέ πουθενά. Με ποια έννοια φτάνει σε έναν αριθμό τότε. Υπάρχει κάποιος αριθμός, άρρητος, δεν τον ξέρουμε αυτός ποιος είναι, αλλά με αυτήν την διαδικασία μπορούμε να τον προσεγγίσουμε όσο κοντά θέλουμε, με οποιαδήποτε δεκαδική προσέγγιση θέλουμε. Δηλαδή, [βλέπουμε το φυλλάδιο] στην περίπτωση ας πούμε που είναι με τρία δεκαδικά ψηφία, με πόσα δεκαδικά ψηφία τον έχουμε προσεγγίσει αυτόν τον αριθμό, τον $2^{\sqrt{2}}$; Αφού είναι 2,66 και 2,66. Με δύο δεκαδικά ψηφία. Τον έχουμε προσεγγίσει με δύο δεκαδικά ψηφία. Μετά στο επόμενο βήμα, τον έχουμε προσεγγίσει με τρία δεκαδικά ψηφία. Στο επόμενο με 4 δεκαδικά ψηφία. Τον ξέρουμε δηλαδή. Στο επόμενο με 5 δεκαδικά ψηφία. Τι σημαίνει αυτό; Έναν αριθμό που μπορούμε να τον προσεγγίσουμε με όσα δεκαδικά ψηφία θέλουμε, τον θεωρούμε γνωστό. Και δεν σας είναι ξένο αυτό. Το ρίζα2 τι είναι; Ένας άρρητος. Τον ξέρουμε;
Μς: Όχι ακριβώς
Κ: Ναι δεν τον ξέρουμε ακριβώς αλλά μπορούμε να τον προσεγγίσουμε με οσαδήποτε δεκαδικά ψηφία θέλουμε. Με την ίδια έννοια, και αυτόν τον αριθμό τον ξέρουμε, υπάρχει.
Μ: Άρα μπορώ να τον βάλω στο…
Κ: Άρα μπορώ να βάλω το ρίζα2 πάνω στο πινακάκι και τον $2^{\sqrt{2}}$ από κάτω. Άρα αν βάλω το ρίζα2 και αν βάλω, ξέρω γω, και όλους τους άρρητους, ότι άρρητο σκεφτώ, το ρίζα3 και ότι άρρητο σκεφτώ, ορίζονται οι αντίστοιχες δυνάμεις, έχουν νόημα, το είδαμε το νόημα, μέσα από το $2^{\sqrt{2}}$ έτσι; Άρα λοιπόν μπορούν τελικά να καλυφθούν τα κενά; Άλλο αν πρακτικά, όπως λέει ο Γιάννης, αυτό είναι αδύνατο. Πρακτικά ναι, χαίρω πολύ είναι αδύνατο. Αλλά θεωρητικά τουλάχιστον, έχω καλύψει όλα τα κενά; Αν δεχτώ δηλαδή [σχεδιάζω ένα σύστημα αξόνων] ότι το χ που παίρνει τιμές πάνω στον χ΄χ μπορεί να πάρει όλες τις πραγματικές τιμές έτσι; Χωρίς να αφήνει κανένα κενό έτσι; Αυτό το δέχομαι. Αξιωματικά το δέχομαι. Ότι αν πάρω όλους τους πραγματικούς στον χ΄χ, τότε δεν μένει κανένα κενό. Τότε, αν πάρω λοιπόν όλα τα χ πάνω στον χ΄χ, έχει νόημα και το $2^{χ}$, είπαμε $2^{\sqrt{2}}$ έχει νόημα, υπάρχει αυτό το πράγμα

και ομοίως τα άλλα, τότε θα μείνει κανένα κενό; [Σχεδιάζω στον πίνακα την γραφική παράσταση της $\psi = 2^{\chi}$] Θα μείνει κανένα κενό; Όχι.

34.00: Γιάννη1 το κατάλαβες αυτό;

Γιάννης1: Ναι κύριε. Το κατάλαβα. [όμως ο τρόπος που το λέει δείχνει ότι διατηρεί τις αμφιβολίες του]

Κ: Δεν το κατάλαβες. Το καταλάβατε παιδιά, ότι πράγματι, θεωρητικά, υπάρχει τρόπος, να καλύψω όλα τα κενά και να πάρω μία συνεχόμενη γραμμή, η οποία είναι και η γραφική παράσταση της συνάρτηση της συνάρτησης $\psi = \alpha^{\chi}$.

Βέρα: Είναι άπειρα τα σημεία που πρέπει να πάρεις. Πρώτα το 10 μετά το 100….

Κ: Ναι είναι άπειρα. Αλλά υπάρχουν όμως. Θεωρητικά μπορείς να τα πάρεις. Υπάρχουν.

Κ: Πέστε κάποια ίσως παρατήρηση, κάτι να συζητήσουμε;

Μς: ………[νομίζω ότι αν και δεν το λένε οι μαθητές μάλλον συμφωνούν με την επιφυλακτικότητα του Γιάννη1]

Κ: Προσπαθήσαμε καταρχήν να δώσουμε ένα νόημα σε αυτό εδώ το πράγμα [$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$] και στα όμοιά του, προσπαθήσαμε να δώσουμε ένα νόημα στο τι σημαίνει το $2^{0,2}$ ας πούμε, το $2^{0,3}$, το $2^{1,4}$. Τι σημαίνει το $2^{1,4}$; Πως θα το λέγατε σε ένα παιδάκι του δημοτικού ας πούμε, τι σημαίνει το $2^{1,4}$.

Παναγιώτης: Άμα χωρίσεις το 2 σε 10 ίσα κομμάτια …

Κ: Πολλαπλασιαστικά

Παναγιώτης: Ναι, θα πάρεις τα 10 και άλλα 4 τέτοια

Χριστίνα: Θα καταλάβει τι σημαίνει πολλαπλασιαστικά; [ακούγονται κάποια γέλια]

Κ: Δηλαδή τι πολλαπλασιαστικά; Τι σημαίνει πολλαπλασιαστικά το 1/10 του 2; Ότι είναι εκείνος ο αριθμός που αν πολλαπλασιαστεί 10 φορές με τον εαυτό του κάνει 2.

Κ: Μετά προσπαθήσαμε να δούμε ότι μπορεί πράγματι να βρεθεί ο αριθμός $2^{\sqrt{2}}$, ότι υπάρχει αυτός ο αριθμός, με την έννοια ότι μπορώ να τον προσεγγίσω με όσα δεκαδικά ψηφία θέλω, όπως υπάρχει το π. Το π το ξέρω; Είναι ένας άρρητος αριθμός. Ξέρω όλα τα δεκαδικά του ψηφία;

Μς: Όχι

Κ: Όχι, αλλά μπορώ να τον προσεγγίσω με ακρίβεια όσων δεκαδικών ψηφίων θέλω. Έχουν βρει τώρα με υπολογιστές, νομίζω ένα τρις ψηφία του. Άρα με αυτήν την έννοια το ξέρω. Και το χρησιμοποιώ. Έτσι λοιπόν και το $2^{\sqrt{2}}$ το ξέρω και το χρησιμοποιώ και υπάρχει. Είναι κάποιος αριθμός. Και επίσης προσπαθήσαμε να δούμε πως καλύπτονται σε μία γραφική παράσταση, στην συγκεκριμένη περίπτωση στην $\psi = 2^{\chi}$, όλα τα κενά και δεν μένουνε τρύπες.

37.12: Κ: Και αν πάμε και λίγο στα τυπικά μαθηματικά, τα σχολικά, στην τελευταία σελίδα, αν μιλάμε γενικά για την $\psi = \alpha^{\chi}$ με $\alpha > 1$, γιατί για $\alpha < 1$ θα το πούμε την άλλη φορά, ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης;

Βέρα: Όλο το R;

Κ: Ναι. Και ποιο είναι το σύνολο τιμών;

Βέρα: Το $(0, +\infty)$

Κ: Ναι, οι τιμές που μπορεί να πάρει το ψ είναι το $(0, +\infty)$. Το 0 δεν το παίρνει. Παίρνει μόνο θετικές τιμές. Ποια είναι η μονοτονία;

Γιάννης 1: Γνησίως αύξουσα.

Κ: Γνησίως αύξουσα. Και πού τέμνει τον ψ΄ψ;

Μς: Στο 1.

Κ: Στο (0,1). Και ασύμπτωτη τώρα ποια είναι;

Γιάννης1: Ο χ΄χ

Κ: Γιατί τον λες ασύμπτωτη τον χ΄χ;

Γιάννης1: Δεν θα πάρει ποτέ κάποια τιμή πάνω στον χ΄χ, δηλαδή να έχει $\psi = 0$. Θα πηγαίνει αλλά δεν θα φτάσει ποτέ.

Κ: Ναι, και μάλιστα με ποια έννοια τον λέμε ασύμπτωτη

Μς: Δεν θα τέμνει ποτέ τον άξονα

Κ: Ναι αλλά τον πλησιάζει όσο θέλουμε. Και με την $\psi = -1$ για παράδειγμα δεν συμπίπτει ποτέ. Αλλά δεν είναι ασύμπτωτη. Ο χ΄χ είναι ασύμπτωτη γιατί: την πλησιάζει οσοδήποτε κοντά θέλουμε αλλά ποτέ δεν την φτάνει.

39:22 Κ: Ευχαριστώ πολύ παιδιά.

<u>ΣΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΣΤΟ Β4 ΕΧΩ ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΚΑΙ ΤΑ ΠΑΡΑΚΑΤΩ</u>

- <u>Στο 29:30 νομίζω ότι κάνω ένα λάθος</u>. Λέω:
-

28.05: Κ: Πάμε σε 100 ίσα κομματάκια. Πάνω θα βάλω 0,01, κ.λ.π και κάτω ….θα βάλω 100^{η} ρίζα του 2. Έχω κάνει λοιπόν στο διάγραμμα 8 όλα τα ζεύγη των αντιστοίχων τιμών με σημεία, και έκανα το διάγραμμα. Τα καλύψαμε επιτέλους τα κενά;

Μς: Στην ουσία δεν τα έχουμε καλύψει τα κενά.

Κ: Γιατί σαφώς υπάρχει και το 0,001 και το 0,00001 κ.λ.π Αλλά αν το κάνουμε αυτό θα τα καλύψουμε όλα τα κενά;

Μ: Όχι

Κ: Γιατί;

Μ: Γιατί υπάρχουν άπειροι αριθμοί

Κ: Πες ότι το κάνουμε για όλα τα άπειρα: 0,0001, 0,000001 κ.λ.π. Θα τα καλύψουμε τότε όλα τα κενά;

Μ: Όχι [διστακτικά. Νομίζω ότι η απάντηση αυτή κατά κάποιον τρόπο καθοδηγείται από τον τρόπο και το ύφος που κάνω την ερώτηση]

Μ: Οι αριθμοί είναι άπειροι.

Κ: Και τι θα μείνει; Ποιοι αριθμοί θα μείνουν;

Μ: ….

Κ: Αν βάλω όλα αυτά, τι θα λείπει ρε παιδιά; Τι θα λείπει; Μπορείτε να μου πείτε ένα ζευγάρι που θα λείπει;

Μ: ………

Κ: Αν βάλω όλα τα 0,0000…..

Μ: ….(προσπαθούν να πουν κάτι)

Κ: Το ($\sqrt{2}, 2^{\sqrt{2}}$) θα υπάρχει; Θα υπάρχει αν κάνω αυτήν την διαδικασία;

Μ: ……..

Κ: Είναι το ρίζα2 δεκαδικός που να ξέρω τα δεκαδικά του ψηφία; Άρα μπορώ με αυτήν την διαδικασία να τον προσεγγίσω; Ακριβώς γίνεται; Ακριβώς δεν γίνεται.

Κ: Όμως δεν είναι κάποιο νούμερο; Είναι κάποιο νούμερο τότε και το $2^{\sqrt{2}}$; Πως το βρίσκω;

Κ: Βλέπετε λοιπόν ότι αν δουλεύουμε με δεκαδικούς εδώ πέρα, δηλαδή όσο και να μικρύνουμε το ω επάνω, με υποδιαιρέσεις του 1, τότε τα κενά θα παραμένουν. Και μάλιστα δεν θα είναι λίγα. Στην πραγματικότητα θα είναι πολλά. Πρέπει λοιπόν να βάλουμε μες στο παιχνίδι και τους άρρητους, για να γεμίσουν τα κενά. Γιατί: ο χ΄χ δεν είναι η ευθεία των πραγματικών; **Η ευθεία των πραγματικών** από τι **αποτελείται;** Από όλους τους ρητούς και από όλους τους άρρητους. Πρέπει λοιπόν να μπουν και όλοι οι άρρητοι. Και πως τότε θα υπολογίσω το $2^{\sqrt{2}}$;

- **<u>Για τον οριακό ορισμό (που δεν τον λέω στο Β7):</u>**

- 35:40 Κ: …Το θέμα είναι ότι σταθεροποιείται κάπου. Και πράγματι αποδεικνύεται ότι το 2^{ρ_ν}, όπου το ρ_ν είναι μια δεκαδική προσέγγιση του ρίζα2 με ν δεκαδικά ψηφία, δηλαδή αρχικά το ρ_ν είναι 1,4 μετά 1,41 κ.λ.π , αυτό το πράγμα κάπου όπως λέμε συγκλίνει, δηλαδή υπάρχει κάποιος αριθμός που μπορούμε, με αυτήν την διαδικασία, να τον προσεγγίσουμε όσο κοντά θέλουμε. Άρα τον ξέρουμε, με την ίδια (έννοια που ξέρουμε) το ρίζα2. Αυτόν τον αριθμό που συμβολικά τον γράφουμε $\lim\limits_{\nu\to\infty} 2^{\rho_\nu}$, αυτόν τον αριθμό

  τον λέμε 2 εις την ρίζα 2: $\lim\limits_{\nu\to\infty} 2^{\rho_\nu} = 2^{\sqrt{2}}$.
- Κ: Βλέπετε πάντως, για να μην πάμε τώρα σε όρια, ότι αυτόν τον αριθμό, θα συμφωνείται, ότι μέσα από αυτήν την διαδικασία, μπορούμε να τον προσεγγίσουμε με όση ακρίβεια θέλουμε. Αυτός είναι ο αριθμός που ονομάζουμε 2 εις την ρίζα 2.
- Μ: Δεν <u>βγαίνει</u> <u>ακριβώς</u> όμως ποτέ.
- Κ: Είναι άρρητος, όπως και το ρίζα2. Άρρητος είναι. Αλλά θεωρούμε ότι τον ξέρουμε γιατί μπορούμε να τον προσεγγίσουμε όσο θέλουμε. Όπως και τον ρίζα2. Σε δεκαδική μορφή δεν τον ξέρουμε. Ούτε και αυτόν τον ξέρουμε. Αλλά μπορούμε να τον προσεγγίσουμε όσο θέλουμε. Άρα τον ονομάζουμε, υπάρχει. Υπάρχει, υπάρχει σαν αριθμός.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης