



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών και Διδακτική Πράξη

Δέσποινα Πόταρη

Σχολή Θετικών επιστημών

Τμήμα Μαθηματικό

Διδασκαλία σε τμήμα της Α΄ Λυκείου του 3^{ου} Λυκείου Πετρούπολης

3^η διδακτική ώρα (02-03-11)

00:00

Καθ: Θέλω να σας συστήσω την κ. Χ.Π. που θα παρακολουθήσει μερικά μαθήματα στην Άλγεβρα Τετ. και Παρ. που θα κάνουμε πάνω στις συναρτήσεις. Είναι μια συνάδελφός μου, είναι χρόνια στο σχολείο, είναι πολύ καλή και πέρα από τους άλλους λόγους που είναι πολύ καλή είναι ότι εξ αιτίας της γλυτώσατε το σημερινό τεστ. Το σημερινό τεστ θα το γράψουμε ...

Εμείς θα μπορούμε στο καινούριο κεφάλαιο των συναρτήσεων. Ξέρω ότι έχετε ασκηθεί και στο διάλογο, που ξέρετε να τον κάνετε πάρα πολύ καλά... Λοιπόν, ό,τι θέλετε να ρωτήσετε θα το ρωτάτε με αυτές τις ωραίες ερωτήσεις που κάνετε, που επιμένετε, που αν δεν ικανοποιηθείτε εκεί πέρα ξαναεπιμένετε, ναι; Οι συναρτήσεις είναι ένα πολύ βασικό εργαλείο στα Μαθηματικά, το οποίο έχετε συναντήσει και στο Γυμνάσιο, απλά σήμερα σαν μια πρώτη γνωριμία, σαν μια πρώτη εισαγωγή στις συναρτήσεις στην Α΄ Λυκείου, θέλω λιγάκι πιο ελεύθερα να συζητήσουμε τι είναι αυτό το μαθηματικό αντικείμενο, τι είναι η συνάρτηση, τι τη χρειαζόμαστε, τι είναι αυτό που ξέρουμε από το Γυμνάσιο, γιατί είναι απαραίτητες και να το κουβεντιάσουμε λιγάκι, δηλ. έτσι σε πιο χαλαρή βάση μεταξύ μας.

.....

Να σας πω, λοιπόν, πείτε ότι έχουμε μια Τράπεζα ...

M: ... και την κλέβουμε ...

Καθ: Θ΄ αρχίσω τις φωνές, δε θα κάνουμε μάθημα, δεν υπάρχει περίπτωση ...

Καθ: Ωραία, πείτε ότι έχουμε μια Τράπεζα που δίνει ένα επιτόκιο ε% και ένα κεφάλαιο 500 ευρώ. (γράφει στον πίνακα). Στο τέλος του πρώτου χρόνου κατάθεσης. Εάν σκεφτείτε τον τόκο που θα πάρετε γι΄ αυτό το κεφάλαιο, τον οποίο τον ονομάζουμε Τ, εντάξει; στο τέλος του πρώτου χρόνου, αυτός ο τόκος, ο τόκος που θα πάρετε δεν θα είναι ... Αν το επιτόκιο είναι ε%;

M: Τι εννοείτε;

Καθ: Έχετε 500 ευρώ. Έστω μια Τράπεζα δίνει 2% επιτόκιο. Πόσο τόκο θα πάρετε στο τέλος του πρώτου χρόνου

05:00

M: $500 \cdot 2 / 100$

Η καθηγήτρια γράφει αυτό που λέει ο μαθητής και κάνει τις πράξεις, δηλ;

Καθ: Ο τόκος δηλ. θα είναι $500 \cdot 2 / 100$, δηλ.;

Τα παιδιά κάνουν τις πράξεις και βρίσκουν 10 ευρώ (το λένε).

Καθ: Η ίδια Τράπεζα, δίνει επιτόκιο 3%, για τα 500 ευρώ σας, πόσο τόκο θα πάρετε;

M₁: 15

M₂: 500 επί 3 δια 100

M₁: 15

Κ: Αν η Τράπεζα σας δώσει επιτόκιο 1,5%, πόσο τόκο θα πάρετε για τα 500 ευρώ σας;

M: 7,5

Γ: Θα πάρετε δηλ. $500 \cdot 1,5/100$, όσο κάνει αυτό. Εάν η Τράπεζα δίνει επιτόκιο $\epsilon\%$, εντάξει; πόσο τόκο θα πάρετε για τα 500 ευρώ σας;

M: $500 \cdot \epsilon/100$

Καθ: Δηλαδή;

M: 5ε, έτσι. Δε μου λέτε τώρα εάν φτιάξουμε με αυτά εδώ τα παραδείγματα που σκαρώσαμε τα πρόχειρα, αν φτιάξουμε ένα πινακάκι, που να βάλουμε εδώ πέρα το ϵ , δηλ. το επιτόκιο, που μπορεί να είναι 2, 1,5, 2, 3, επί τοις εκατό και εδώ πέρα να βάλουμε τον τόκο ...για επιτόκιο 1,5% είναι 7,5 ... (συμπληρώνει τον πίνακα που γράφει) κοκ. μπορούμε δηλ. να συμπληρώνουμε τιμές για το έψιλον, διάφορα επιτόκια της Τράπεζας, και να βρίσκουμε τους τόκους που εμείς θα πάρουμε για τα 500 ευρώ μας, στο τέλος του 1^{ου} χρόνου. Αυτό το πινακάκι, λοιπόν, **αναπαριστά** αυτήν την κατάσταση, αυτό το πρόβλημα που είχαμε διατυπώσει, σωστά; Ωραία

Καθ: Σκεφτείτε τώρα ότι έχετε ένα αυτοκ. το οποίο τρέχει με σταθ. ταχύτητα 50 χμ/ω,

....κάτι λένε τα παιδιά που όμως δεν ακούγεται καθαρά.

Καθ: ... τότε αυτό σε χρόνο, σε χρόνο μιας ώρας πόσο διάστημα διανύει; (γράφει στον πίνακα)

M: 50 χμ.

Καθ: Δηλ διανύει διάστημα $s=50\text{χμ}/\omega * 1\omega$ δηλ 50 χμ, αφού εσείς, σκέφτεστε ότι το διάστημα δίνεται από τον τύπο, ταχύτητα επί χρόνος, (γράφει: $s=u \cdot t$). Σε 1,5 ώρα πόσο διάστημα διανύει;

M: 75 χμ.

Καθ: Δηλ. $50 \cdot 1,5=75$ χμ, σε 2 ώρες, εντάξει, διανύει διάστημα 100 χμ (γράφει: $50 \cdot 2=100$ χμ) και γενικά σε t ώρες διανύει διάστημα $50t$, σωστά; Όλα αυτά μπορούμε να τα βάλουμε σε ένα πινακάκι, που στην πρώτη γραμμή του να βάλουμε τις διάφορες τιμές που δώσαμε στο χρόνο, δηλ. 1, 1,5, ο χρόνος δίνεται σε ώρες, 2 κοκ... (γράφει, ενώ τα παιδιά κάτι ψιθυρίζουν και η καθηγήτρια ζητά να λένε ό,τι θέλουν σηκώνοντας τα χέρια γιατί λέει δεν καταλαβαίνει τι λένε, δεν ακούει) κι εδώ θα μπει το διάστημα που διανύει, γιατί το u είναι σταθ, ...με το $t=1$...

M: 50χμ, 75χμ, 100χμ (ο μαθητής συμπληρώνει τις ερωτήσεις της καθηγήτριας.)

Καθ: Και μπορώ να συμπληρώσω τον πίνακα με διάφορες τιμές του χρόνου και του διαστήματος, έτσι;

10:00

Καθ: Απ' αυτά τα πρώτα παραδείγματα που κάνουμε, παρατηρούμε ότι διάφορα φαινόμενα της καθημερινής ζωής, διάφορα φαινόμενα που συναντάμε σε διάφορα μαθήματα, που λέει και ο Έκτορας, περιγράφονται από σχέσεις οι οποίες δείχνουν πώς ένα μέγεθος εξαρτάται από ένα άλλο μέγεθος. Σωστά; Αν το σκεφτείτε και λιγάκι βαθύτερα, όλα τα μεγέθη που συναντάμε στην καθημερινή ζωή, έχουν μια εξάρτηση το ένα από το άλλο δηλ. βασικά το μοναδικό ανεξάρτητο μέγεθος είναι ο χρόνος. Όλα τα άλλα εξαρτώνται το ένα από το άλλο. Το διάστημα εξαρτάται από το χρόνο, όταν η ταχύτητα μένει σταθερή, το εμβαδόν ενός τετραγώνου εξαρτάται από την πλευρά του, έτσι, ο τόκος εξαρτάται από το επιτόκιο που θα δώσει η Τράπεζα, κοκ. Υπάρχει μια εξάρτηση, υπάρχει μια συμμεταβολή κάποιων μεγεθών όταν αλλάζουν κάποια άλλα, έτσι; Ωραία και τι έγινε; Και τι έγινε; Δηλ. εμείς αυτό που θέλουμε με όλους αυτούς τους τύπους που περιγράψαμε κλπ και χωρίς να ξέρουμε τίποτα ούτε για συναρτήσεις, ούτε αυτά που έχουμε ακούσει από το Γυμνάσιο να έχουμε υπ' όψιν μας και τι έγινε; Δηλ εμείς τώρα όταν εκφράζουμε αυτούς τους τύπους και κάνουμε αυτά τα πινακάκια μήπως έχετε κάποια εντύπωση τι προσπαθούμε να κάνουμε; Δηλ. τι νόημα έχουν όλα αυτά;

Δημ: Να κάνουμε συνέχεια πράξεις και δοκιμές, μπορούμε να βγάλουμε ένα γενικό τύπο, έτσι ώστε να βγάλουμε, έτσι ώστε να μπορούμε π.χ. να μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα με το χρόνο, όπως εδώ πέρα ..., ή τον τόκο ...

Καθ: Ένα γενικό τύπο ... (επαναλαμβάνει τα λόγια του μαθητή). Δημήτρη, κράτα το αυτό που θέλεις να πεις. Πείτε ότι παρατηρούμε τη θερμοκρασία στη διάρκεια μιας βδομάδας, σε ένα τόπο, στην Αθήνα, εντάξει; Και καταγράφουμε τις μέγιστες τιμές της, τής θερμοκρασίας, έτσι; Και καταγράφουμε αυτές τις θερμοκρασίες σε ένα πίνακα την 1^η μέρα η μέγιστη τιμή της θερμοκρασίας, ... (γράφει ένα πίνακα) είναι 7⁰C, τη 2^η μέρα είναι 10 ⁰C, την 3^η μέρα είναι 15⁰C και ούτω καθ' εξής μέχρι την 7^η μέρα, έτσι; Εδώ πέρα σ' αυτήν την αντιστοιχία, δηλ. κάθε μέρα της εβδομάδας αντιστοιχεί μια μέγιστη θερμοκρασία, εδώ πέρα υπάρχει τύπος; Υπάρχει μια ισότητα που μπορούμε να βγάλουμε;

M₂: Ναι

M₃: Όχι

Στρ: Ναι

Καθ: Ποια Στράτο;

Στρ: Άμα το δω θα σας πω. ... Η μια μέρα ισούται με 7 φορές τη θερμοκρασία, άρα στις 3 μέρες ισούται με 14 φορές τη θερμοκρασία ... Ααα, όχι ... Δεν υπάρχει, όχι δεν υπάρχει.

Δημ: Να πω κυρία γιατί δεν υπάρχει;

Καθ: Ωραία, μισό λεπτό, μέχρι εδώ και να πεις μετά γιατί δεν υπάρχει. Αυτό που θέλει λοιπόν να πει ο Στράτος ότι υπάρχει περίπτωση και σ' εκείνον τον πίνακα που μας δίνουν τις ημέρες στην

πρώτη του γραμμή και τις θερμοκρασίες στη δεύτερή του γραμμή, υπάρχει περίπτωση κάπως να παρατηρήσουμε κάποιο μοτίβο, υπάρχει περίπτωση να παρατηρήσουμε κάποια σχέση, ανάμεσα στις μέρες και τις θερμοκρασίες, και αν δώσω όλες τις ημέρες, (γράφει) την 4^η έπεσε στους -25, την 5^η μέρα ανέβηκε 40, δώσω όλες τις μέγιστες θερμοκρασίες που έχουν παρατηρηθεί, οι οποίες μετά από εξονυχιστική εξέταση, ούτε είναι ούτε προσεγγίζουν σε κάποιο μοτίβο, σε κάποια σχέση. Εάν λοιπόν ισχύει αυτό, ... Πες Γιάννη γιατί δεν υπάρχει σχέση.

... (Δεν ακούγεται καθαρά)

Καθ: Μισό λεπτό, θες να ρωτήσεις αυτό που λέει;

Μ: Δεν άκουσα τι ακριβώς είναι αυτό που λέει.

Καθ: Ωραία, θα λέτε ο καθένας ό,τι θέλει, θα ακούτε οι υπόλοιποι αυτό που λέει ο καθένας και θα απαντάτε σ' αυτό και θα λέτε και το δικό σας.

15:00

Καθ: Λέει ο Γιάννης, δεν μπορώ να βγάλω μια σχέση γιατί η θερμ. μεταβάλλεται από μέρα σε μέρα.

Στρ: Όχι το ότι μεταβάλλεται, γιατί μπορεί να είναι και ...

Γιαν: Ότι αλλάζει ...

Στρ: Γιατί μπορεί να μεταβάλλεται και ανάλογα, δηλ να πηγαίνει η θερμοκρασία την 1^η μέρα 5, τη 2^η 10°C, την 3^η, 15°C, ... και να μπορούμε να το υπολογίσουμε κάθε φορά.

Γιαν: Κυρία, κυρία (ο Γιάννης επιμένει)

Στρ: Δηλ. να αυξάνει ανά 5.

Καθ: Όχι Γιάννη, γιατί μιλάει ακόμα και δεν έχεις ακούσει τι έχει πει σ' αυτό που είπες εσύ.

Στρ: Μεταβάλλεται αλλά δεν είναι ανάλογη (για την Αθήνα)

Καθ: Λέει ο Στράτος, ότι εάν η θερμοκρασία την 1^η μέρα ήταν 7 βαθμούς και τη 2^η μέρα γινόταν η θερμοκρασία 10°C και την 3^η γινόταν 13°C (γράφει στον πίνακα ό,τι λέει), κοίτα Γιάννη, δηλ. ανέβαινε κατά 3 βαθμούς τώρα θέλω να πω και την 4^η μέρα γινόταν 16 βαθμούς, κοκ, τότε η θερμοκρασία πάλι θα μεταβαλλόταν από μέρα σε μέρα, αλλά θα μεταβαλλόταν συναρτήσει κάποιου μοτίβο, δηλ. θα μεταβαλλόταν με ένα κανόνα, θέλει να πει ο Στράτος. Άρα λοιπόν, λέει ο Στράτος, το επιχείρημά σου ότι η θερμοκρασία μεταβάλλεται από μέρα σε μέρα δεν είναι σωστό γιατί μπορεί να μεταβάλλεται έτσι, ώστε οι τιμές της θερμοκρασίας, να έχουν κάποια σχέση μεταξύ τους.

Γιαν: Ναι, αλλά τη θερμοκρασία δεν μπορούμε να την ελέγξουμε, δεν είναι ένα ποσό ...

Στρ: Γενικά λέμε ...

Γιαν: Είναι πολύ απίθανο η θερμοκρασία να ακολουθεί κάποιο μοτίβο. (εννοεί η θερμοκρασία ενός τόπου).

Στρ: Φτιάξε εσύ ένα δικό σου χώρο και ρύθμισέ του εσύ τη θερμοκρασία εκεί πέρα, ένα θερμοκήπιο.

Γιαν: Μα δε μιλάμε για αυτό, για τη θερμοκρασία στην Αθήνα μιλάμε

Στρ: Εδώ δεν είναι η θερμοκρασία Αθήνας, είναι ξέρω γω ποια θερμοκρασία ...

... λέγονται διάφορα που δεν ακούγονται καθαρά

M: Αυτό είναι ο μέσος όρος της θερμοκρασίας μιας ημέρας ή για μια συγκεκριμένη ώρα;

Καθ: Είναι η μέγιστη θερμοκρασία είπαμε, είναι η μέγιστη θερμ που παρατηρούμε κατά τη διάρκεια των 24 ωρών μιας ημέρας. Ωραία, δε μου λέτε, πείτε λοιπόν εδώ ότι έχουμε άλλο ένα παράδειγμα, εδώ έχουμε τη μέγιστη θερμ στην Αθήνα (δείχνει τον προηγούμενο πίνακα με τις τυχαίες τιμές) κι εδώ έχουμε ένα άλλο παράδειγμα που έχουμε, σε 7 ημέρες τη μέγιστη θερμοκρασία που παρατηρούμε σε ένα δικό μας χώρο, σωστά; δηλ. φτιάχνω ένα δικό μου χώρο, ένα θερμοκήπιο, ένα δικό μου χώρο και έχω μια πηγή θερμότητας και ρυθμίζω εγώ τη θερμοκρασία έτσι, ώστε η μέγιστη θερμ κάθε μέρας να είναι κατά 1°C μεγαλύτερη από τη μέγιστη θερμοκρασία της προηγούμενης ημέρας, εντάξει; Έχω λοιπόν την 1^η μέρα, 13°C (γράφει στον πίνακα), τη 2^η ... κοκ., δεν τα γράφω γιατί δε με χωράει ο πίνακας και για να μην κάνουμε 100 ώρες, όλες τις 7 μέρες της εβδομάδας, εντάξει; Ωραία. Αυτό εδώ το μοντέλο, του Έκτορα, αυτό εδώ το μοντέλο του Στράτου και όλα τα προηγούμενα που λέγαμε, εντάξει; έχουν κάποιο χαρακτηριστικό; Εδώ, μπορώ να βγάλω ένα τύπο. Αν πω θερμοκρασία τη μέγιστη θερμ της ημέρας, αυτή η μέγιστη θερμοκρασία της ημέρας, είναι η θερμ της προηγούμενης μέρας συν 1, εντάξει; Μπορώ δηλ να φτιάξω μια σχέση, εδώ, στη μέγιστη θερμοκρασία της Αθήνας, εάν καταγράψω τις ημέρες και τις θερμοκρασίες που παρατηρηθήκανε, δεν μπορώ να βγάλω μια σχέση έτσι όπως είναι τα νούμερα εκεί. Στη σταθερή ταχύτητα 50 χμ και με τους διάφορους χρόνους, για το διάστημα που διανύει ένα κινητό, μπορώ να βγάλω μια σχέση. Στο επιτόκιο της Τράπεζας και για τον τόκο που παίρνω όταν εγώ έχω 500 ευρώ και θέλω να τα βάλω μέσα στην Τράπεζα και να δω τι τόκο θα πάρω ανάλογα με το επιτόκιο που δίνουν μπορώ να βρω μια σχέση. Σε όλα αυτά, εδώ πέρα, τα παραδείγματα βλέπετε κάτι κοινό; Υπάρχουν παραδείγματα στα οποία υπάρχουν σχέσεις και υπάρχει και παράδειγμα στο οποίο δεν υπάρχει σχέση. Βλέπετε κάτι κοινό;

M: Υπάρχει αναλογία μεταξύ τους.

Καθ: Δηλαδή;

M: Ότι, ας πούμε, το θερμοκήπιο, την 1^η, τη 2^η, την 3^η μέρα όπως είπαμε στον τύπο είναι η θερμοκρασία είναι όσο της προηγούμενης ημέρας +1, δηλ. ανεβαίνει ανάλογα. Όχι;

20:00

M: Γενικά σε αυτά τα ... μπορούμε να βρούμε ένα τύπο (εννοεί την ταχύτητα και το επιτόκιο), ενώ στη θερμοκρασία και μερικά άλλα δεν μπορούμε.

Καθ: Ωραία

M: Ίσως εκεί πέρα να κάνουμε κάποιο διάγραμμα.

Καθ: Ας πούμε ότι έχουμε άλλο ένα παράδειγμα, περιμένετε, και Δημήτρη να πεις και αυτό που ήθελες προηγουμένως και σε διέκοψα, ας βάλουμε άλλο ένα παράδειγμα σ' αυτό εδώ πέρα το πλήθος των παραδειγμάτων, ας πούμε ότι έχουμε ένα τετράγωνο το οποίο έχει πλευρά, α, όπου το α, η πλευρά του τετραγώνου, είναι 1 εκ, (γράφει τον πίνακα), 1,5 εκ, ρίζα 2, 5, ...

M: Δεν είναι τετράγωνο (νομίζει ότι οι τιμές αφορούν τις πλευρές του ίδιου τετραγώνου)

Καθ: ... τότε το εμβαδόν του ...πότε δεν είναι τετράγωνο;

M: Δεν έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

Καθ: (Επαναλαμβάνει) Λέω έχουμε ένα τετράγωνο, που έχει **τη μια φορά** πλευρά 1 εκ, ...

M: Ααα... είναι όλα 1, όλα ρίζα 2, όλα ...

Καθ: Την άλλη φορά πλευρά 2 εκ.

M: Ααα...

Καθ: Έτσι; Όλες οι πλευρές ίσες μεταξύ τους. Τότε σε ένα τετράγωνο με πλευρά 1, το εμβαδόν του πόσο θα είναι;

M: α επί α

Καθ: α^2 , σε ένα τετράγωνο με πλευρά 1 το εμβαδόν του θα είναι 1, σε ένα τετράγωνο ... (λέει όλες τις περιπτώσεις και συμπληρώνει τον πίνακα). Τι έχει να πεις για αυτήν την αναλογία;

M: Θα είναι τυχαία

Γιάν: Σε κάθε τιμή που δίνουνε για ένα ποσό, αντίστοιχα θα υπάρχει και μια άλλη τιμή ...

Καθ: Φαίνεται ότι σε κάθε τιμή που δίνουμε για ... ένα γράμμα; Για ... μια μεταβλητή; Για ... ένα ποσό; Τέλος πάντων σε κάθε τιμή ενός μεγέθους... εντάξει; τι είναι μέγεθος;

M₁: Πόσο μεγάλο είναι κάτι;

M₂: Μπορεί

M: Όχι, γιατί μπορεί να είναι και μικρό.

M₁: Ένα αντικείμενο;

M₂: Πώς είναι το σχήμα ...

Καθ: Κάτι που μπορούμε να το μετρήσουμε.

M: Απροσδιόριστο;

M₁: Αντικείμενο που μπορούμε να το μετρήσουμε;

Καθ: Αντικείμενο ...

M: Ύλη; Μια ύλη

M₂: Όπως είναι το σχήμα ενός πράγματος;

M: Δεν είναι ύλη;

Τα παιδιά κάτι λένε και γελάνε.

Στρ: Είναι ένα πράγμα που μπορούμε να το μετρήσουμε, μπορεί να είναι αντικείμενο, μπορεί να είναι εκατοστά, μπορεί να είναι μέτρο, ...

M: Κυρία, μέγεθος δεν είναι μόνο ένα είναι πολλά.

M₁: Ανάλογα βέβαια με την περίπτωση.

Καθ: Μέγεθος είναι κάτι που αλλάζει.

M: Γενικά;

Καθ: Κάτι που αλλάζει

M: Πάντα κάτι αλλάζει.

Καθ: Το πιο απλό μέγεθος στα Μαθηματικά, στη Γεωμετρία, ξέρετε ποιο είναι; Το ευθύγραμμο τμήμα.

M: Ααα... τότε εκεί πέρα γιατί ...

Καθ: Περίμενε, περίμενε, πριν πεις το άσχετο, μην το ξεχάσεις, ο Δημήτρης περιμένει 10 ώρες, μην το ξεχάσεις. Λέει ο Γιώργος λοιπόν ότι παρατηρούμε ότι σε κάθε τιμή ενός μεγέθους, αντιστοιχεί μια άλλη τιμή, σωστά; Κι εδώ, κι εδώ αφού λύσαμε αυτό που είπες με την αναλογία, κι εδώ, στο 2 αντιστοιχεί το 100, στο 1,5 το 75 (μιλάει για το χρόνο και τα αντίστοιχα διαστήματα), εδώ στο 1 αντιστοιχεί το 1, στο ρίζα 2 το 2 ...κι εδώ στο 1, στην πρώτη μέρα αντιστοιχούν 7°C, ...ας μην υπάρχει τύπος, ... στην 4^η μέρα -25°C, ας μην υπάρχει τύπος, εδώ στην 1^η μέρα 13°C, στη 2^η μέρα 14°C, ...και υπάρχει και ένα μοτίβο, υπάρχει μια σχέση, ...

Στρ: Όπου υπάρχει ένα μοτίβο μπορούμε να βγάλουμε ένα τύπο, όπως π.χ. στο τετράγωνο, υπάρχει ο τύπος $E=a^2$, ή για τον τόκο ισχύει $T=$ οι καταθέσεις επί το έψιλον ...

Καθ: Οι καταθέσεις, το κεφάλαιο δηλ. το 500 επί το ε δια 100. Σωστά.

25:00

M: Ναι αλλά στη θερμοκρασία πώς ξέρουμε πώς μεταβάλλεται;

Καθ: Εδώ μετράμε, μεταβάλλεται ... (δείχνει το πινακάκι με το μοτίβο)

Γιαν: Όχι εδώ, δεν υπάρχει τύπος, μπορεί τη μια μέρα να είναι +1, την άλλη μέρα να πέσει, ή μπορεί να μεγαλώσει πιο πολύ από το +1... (δείχνει αυτό με τις θερμ της Αθήνας)

Καθ: Αυτό που λέει ο Γιάννης, Στράτο, πώς το απαντάς; Εδώ λέει πώς θα γίνει με τον τύπο, δεν υπάρχει σχέση.

Στρ: Δεν υπάρχει σχέση με τον τύπο εκεί πέρα, απλά ...

Καθ: Λέει ο Έκτορας, όμως ότι βλέπω ότι σε μερικές περιπτώσεις δεν υπάρχει σχέση, στις άλλες περιπτώσεις όμως υπάρχει ένα μοτίβο, υπάρχει μια σχέση, μπορώ να γράψω έναν τύπο, μπορώ να γράψω ένα κανόνα, μπορώ να βγάλω μια ισότητα, έτσι; Όλα όμως αυτά τα παραδείγματα κι εκεί που δεν υπάρχει σχέση κι εκεί που υπάρχει σχέση, συμφωνείτε με αυτό που είπε ο Γιώργος δηλ. ότι σ' όλα τα παραδείγματα υπάρχει μια αντιστοιχία; Οι τιμές ενός μεγέθους, του ϵ , του T , του α , των ημερών, των ημερών πάνω, αντιστοιχούν με τις τιμές του κάτω μεγέθους, δηλ. του T , του E , της θερμοκρασίας, της θερμ, υπάρχει δηλ. μια αντιστοιχία και μάλιστα αυτή η αντιστοιχία, γίνεται και με έναν ορισμένο τρόπο, αν παρατηρήσετε, δηλ. υπάρχει περίπτωση για επιτόκιο 1,5% να πάρω δυο ποσά σαν τόκους; Δηλ αν έχω επιτόκιο 1,5% μπορεί να πάρω σαν τόκο στο τέλος του πρώτου έτους 7,5 ευρώ, μπορώ να πάρω και 10, ας πούμε;

Παιδιά: Όχι

Καθ: Όχι, η αντιστοιχία γίνεται έτσι ώστε οι τιμές του 2^{ου} μεγέθους να αντιστοιχούν κατά μοναδικό τρόπο στις τιμές του 1^{ου} μεγέθους, μάλλον, γιατί είναι λίγο δύσκολο, στην Αθήνα να παρατηρήσω την ίδια μέρα δυο μέγιστες θερμοκρασίες. Αν αυτές δεν είναι ίσες. Μια είναι η μέγιστη θερμοκρασία, που θα παρατηρήσω κατά τη διάρκεια μιας ημερήσιας μέτρησης. Έτσι; Δημήτρη, τι ήθελες να πεις πριν;

Δ: Ότι κάθε μέγεθος εκφράζεται συναρτήσει μιας ανεξάρτητης μεταβλητής και ανάλογα πώς μεταβάλλεται αυτή η μεταβλητή, και σε ορισμένες περιπτώσεις, μεταβάλλεται και το μέγεθος.

Καθ: Ωραία

Δ: Αυτό δεν ισχύει στη θερμοκρασία.

Καθ: Γιατί δεν ισχύει;

Δ: Μεταβάλλεται, αλλά όχι με ανάλογο ρυθμό ...

Καθ: Μεταβάλλεται, όχι με ανάλογο ρυθμό, μεταβάλλεται όχι με μια σχέση, ούτε με σταθερό ρυθμό, γιατί κι εδώ πέρα είπαμε, δε μεταβάλλεται με ανάλογο τρόπο, δηλ. δε βρίσκουμε έτσι μια αναλογία, απλά βρίσκουμε μια σχέση, αυτό εδώ πέρα με το εμβαδόν του τετραγώνου, έτσι; Βρίσκουμε μια σχέση όμως. Εσύ είπες τώρα για ανεξάρτητη μεταβλητή, το κρατάμε αυτό το ανεξάρτητη μεταβλητή και πάμε πρώτα να δούμε τι γίνεται με τις μεταβλητές εδώ πέρα, σε όλα αυτά τα παραδείγματα και θέλω σ' αυτό που είπες, Δημήτρη, να μου πεις το εξής: σκέψου ότι έχουμε ... Λοιπόν, παιδιά σκεφτείτε ..., εδώ θα γράψω άλλο ένα παράδειγμα πάνω σε αυτό που είπε ο Δημήτρης. Σκεφτείτε ότι είστε εσείς ... Σκεφτείτε τώρα ... Κουραστήκατε;

Μ: Όχι, έχουμε ακόμη ...

Καθ: Ναι, ξέρω, ξέρω ... Σκεφτείτε ότι είστε σε ένα αυτοκίνητο, ωραία; και σκεφτείτε ότι δίπλα σας, είναι ένα αυτοκίνητο το οποίο έχει μέσα το φίλο σας, τη φίλη σας, κοιτιέστε από το τζάμι ...

Κάτι λένε τα παιδιά και γελάνε ...

Καθ: Κοιτιέστε από το τζάμι, ωραία; και θέλετε να μετρήσετε την απόσταση μεταξύ σας. Περιμένετε, έχετε 2 αυτοκίνητα και πηγαίνετε σε 2 λωρίδες του δρόμου, έτσι ώστε τα αυτοκίνητα να έχουν ακριβώς την ίδια ταχύτητα

Μ: Δηλαδή πάνε παράλληλα

Καθ: Περνώντας ο χρόνος, πείτε ότι κάνετε ένα ταξίδι 10 ωρών, ωραία;

30:00

Καθ: Και έρχεται, και έρχεται .. και στις 10 ώρες με την ίδια ταχύτητα ...

Κάτι λένε τα παιδιά.

Καθ: Εσείς μην το πάρετε 10 ώρες πείτε ότι είναι 10 λεπτά, ας πούμε 10 λεπτά για νάναι λιγάκι πιο αληθοφανές, και στα 10 λεπτά, 2 λωρίδες στο δρόμο για να πηγαίνουν παράλληλα τα αυτοκίνητα, έχετε την ίδια ταχύτητα και αυτό το διαπιστώνετε βλέποντας, το φίλο σας από το τζάμι του αυτοκινήτου, έτσι; Βλέπετε δηλ. ότι μονίμως είναι δίπλα σας. Εσείς, θέλετε λοιπόν να μετρήσετε την απόσταση μεταξύ σας. Δηλ. την απόσταση μεταξύ των 2 αυτοκινήτων, ωραία;. Τότε, αν μετρήσετε την απόσταση μεταξύ των δυο αυτοκινήτων στο χρόνο, στο 1^ο δευτερόλεπτο, στο 2^ο δευτ., στο ... κοκ. μέχρι τα 10 δευτ., ή τα 10 λεπτά, ή τις 10 ώρες ..., (γράφει το πινακάκι), έβαλα sec εκεί, αν μετρήσετε την απόσταση μεταξύ σας, τότε αυτή η απόσταση μεταξύ σας, Λεμονιά θα σε βγάλω έξω, δε θάναι 0 σε όλες αυτές τις στιγμές;

Μ₁: Ναι

Πολλοί μαζί: Όχι, όχι

Καθ: Γιατί αφού εδώ τρέχετε παράλληλα, με την ίδια ταχύτητα, και έτσι ώστε από το τζάμι να βλέπετε πάντα το φίλο σας, τη φίλη σας, στο δίπλα αυτοκίνητο. Τρέχετε λοιπόν, στον ίδιο δρόμο, με την ίδια ταχύτητα, παράλληλα τα δυο αυτοκίνητα κι εσείς θέλετε να μετρήσετε την απόσταση του ενός αυτοκινήτου από το άλλο.

Παιδιά: Ανάμεσα; Τα παιδιά παρανοούν και νομίζουν την οριζόντια απόσταση των 2 αυτοκινήτων.

Καθ: Λοιπόν, θέλετε να μετρήστε δηλ. πόσο προηγείται το ένα αυτοκίνητο από το άλλο, εντάξει; Στο 1^ο δευτ. βλέπετε ότι προηγείται 0, γιατί είναι δίπλα σας το αυτοκίνητο, στο 2^ο ..., στο 3^ο ... και γενικά και στα 10 δευτ, αν μετρήσετε, το αυτοκίνητο του φίλου σας προηγείται κατά 0 χμ. 0 μ., από εσάς αφού είναι δίπλα σας και τα 10 δευτ. Σ' αυτό εδώ πέρα το παράδειγμα, το 2^ο μέγεθος, που είναι η απόσταση που απέχετε, από το αυτοκίνητο του φίλου σας, αλλά όχι η απόσταση αυτή η δίπλα, η απόσταση που απέχετε δηλ. κατά πόσο προηγείται το αυτοκίνητο εσείς ή ο φίλος

σας, το δικό σας αυτοκίνητο ή το αυτοκίνητο του φίλου σας είναι 0, μεταβάλλεται αυτή η απόσταση;

Κάτι λέει ένα μαθητής.

Καθ: Όχι, θέλω να κρατήσεις αυτό για το σχεδιάγραμμα και να μου πεις αν μεταβάλλεται αυτή η απόσταση.

M: Όχι δε μεταβάλλεται γιατί είναι μηδέν x , μηδέν επί d .

Καθ: Δηλ. εννοείς ότι υπάρχει τύπος, υπάρχει σχέση κι εδώ.

M: Ναι

Καθ: Δεν είναι ότι δεν υπάρχει σχέση, είναι ότι δε μεταβάλλεται το 2^ο μέγεθος εκεί κάτω, για λέγε, Δημήτρη

Δ: Αν γράφαμε θα ήταν $d=0$, αφού είναι ανεξαρτήτως του χρόνου σταθερή η απόσταση.

Καθ: Μμ, μμ

Καθ: Δε μου λέτε σε αυτό εδώ πέρα το παράδειγμα, μπορούμε να παρατηρήσουμε αυτό που είδαμε στα άλλα παραδείγματα;

M: Όχι.

Καθ: Δηλ. τι είδαμε; Στα άλλα παραδείγματα τι είχαμε δει Γιώργο;

Γιώργος: Φαινόταν ότι κάθε τιμή από ένα ... μέγεθος να το πω, αντιστοιχούσε σε μια άλλη μόνο

Καθ: Σ' αυτό εδώ πέρα, λοιπόν, το παράδειγμα, το 1sec, αντιστοιχεί στην τιμή 0; Υπάρχει περίπτωση η απόσταση του αυτοκινήτου σας από του φίλου σας στο 1^ο δευτερ. να είναι και 0 και 2 μ.;

M: Όχι

Καθ: Η τιμή 2 sec, για το χρόνο, στο τέλος του 2^{ου} δευτερ. η απόσταση μεταξύ των 2 αυτοκινήτων είναι 0; Είναι, μόνο 0. Δηλ. αποκλείεται τα 2 αυτοκίνητα να απέχουν 0μ. μεταξύ τους αλλά και 10 μ. μεταξύ τους. Στο τέλος του 3^{ου} δευτ. η απόσταση είναι 0;

M: Ναι

Καθ: Γιώργο, δηλ. εδώ πέρα σ' αυτό το παράδειγμα ισχύει ό,τι παρατήρησες στα προηγούμενα; Δηλ. σε κάθε τιμή του χρόνου αντιστοιχεί μόνο μια τιμή της απόστασης των 2 αυτοκινήτων, όπως την ορίσαμε;

Γιωρ: Όχι

Καθ: Οι υπόλοιποι τι λέτε;

Πολλοί μαζί: Όχι

Καθ: Στράτο;

Στρ: Για μια μόνο τιμή όχι. Αλλά υπάρχει ένα μοτίβο.

Καθ: Υπάρχει ένα μοτίβο (επαναλαμβάνει)

Δ: Ποιο είναι αυτό;

35:00

Καθ: Δημήτρη; Ισχύει.

Δημ: Ναι

Καθ: Φυσικά ισχύει, γιατί;

Μ: Κυρία, πάντα 0 είναι.

Καθ: Πάντα 0 είναι (επαναλαμβάνει), πώς γίνεται να ισχύει;

Μ: Στον πίνακα στο 1sec η απόσταση είναι 0, και στα 2sec η απόσταση είναι 0, και στα 3sec η απόσταση είναι 0, άρα το 1sec αντιστοιχεί και στα 2 και στα 3sec;

Καθ: Μπορείτε να του απαντήσετε;

Μαθήτρια: Δεν μπορεί να αλλάξει ταχύτητα;

Καθ: Εμείς μετράμε την απόσταση ανάμεσα στα αυτοκίνητα στο δρόμο έτσι;

Μαθήτρια: Αλλά αν του ενός ... ή δε γίνεται;

Καθ: Εμείς είπαμε ότι το πρόβλημα είναι δυο αυτοκίνητα πηγαίνουν σε δυο δρόμους παράλληλα με σταθερή ταχύτητα, έτσι, χωρίς να αυξηθεί η ταχύτητα ... Περίμενε, περίμενε πριν ρωτήσεις κάτι άλλο. Γιώργο, αυτό που είχες πει είναι ότι σε κάθε τιμή του 1^{ου} μεγέθους να αντιστοιχεί μόνο μια τιμή από το δεύτερο, εντάξει; Γιατί δεν ισχύει εδώ; Δηλ. πάρε μια τιμή του 1^{ου} μεγέθους, πάρε 2sec, αντιστοιχεί ..., αντιστοιχούν στα 2sec, 2 τιμές της μεταξύ τους απόστασης των 2 αυτοκινήτων;

Γιωρ: Όχι δε νομίζω

Καθ: Πάρε για το χρόνο μόνο τα 2sec. Όταν μετρήσω τα 2sec, τα αυτοκίνητα θα απέχουν 0m μεταξύ τους, εντάξει; Υπάρχει περίπτωση να απέχουν και άλλη απόσταση εκτός από το 0;

Το σκέφτονται ...

Καθ: Είναι λίγο περίεργο, το ξέρω.

Μ: Σίγουρα είναι περίεργο.

Καθ: Επειδή είναι όλα μηδενικά, εκεί κάτω, είναι περίεργο, το ξέρω, εντάξει; . Σκεφτείτε όμως ... Να κάνω ένα άλλο παραδειγματάκι εδώ; Σκεφτείτε ότι μετρώ τη θερμοκρασία της Αθήνας 7

μέρες τη βδομάδα. Σας ζάλισα τα αυτιά; Κάθε μέρα. 1^η μέρα, 2^η μέρα, 3^η μέρα, ... για 7 μέρες και σκεφτείτε ότι η μέγιστη θερμοκρασία για εκείνη τη βδομάδα (δix) και τις 7 μέρες είναι 14°C. Η μέγιστη θερμοκρασία είναι 14 βαθμοί.

Μαθήτρια: Κάθε μέρα;

Καθ: Κάθε μέρα

Μ: Δηλαδή είναι μέχρι 14 βαθμούς

Καθ: Η μέγιστη θερμοκρασία που μ' ενδιαφέρει είναι 14 βαθμοί Κελσίου.

Μ: 3 η ώρα δηλ. είναι 14 βαθμοί.

Καθ: Μετρώ κάθε μέρα τη μέγιστη θερμοκρασία στην Αθήνα και τη βρίσκω 14°C. Υπάρχει αντιστοιχία κάθε μέρα με τη μέγιστη θερμοκρασία της ημέρας, εδώ, που έλεγε ο Γιώργος στην αρχή ότι σε όλα τα παραδείγματα υπάρχει μια αντιστοιχία;

Μ: Ναι

Καθ: Υπάρχει αντιστοιχία. Σε κάθε μέρα αντιστοιχεί μια μόνο τιμή της θερμοκρασίας; Ή μπορούν να αντιστοιχούν 2 τιμές της μέγιστης θερμοκρασίας;

Μαθήτρια: Μέχρι τους 14°C, όλοι, όλα.

Καθ: Όλες οι τιμές μέχρι τους 14°C (επαναλαμβάνει) ...

Μαθήτρια: Από το 0 μέχρι το 14.

Καθ: Εδώ, σκέψου ότι είναι οι μέρες της εβδομάδας που είναι 1^η, 2^η, 3^η, ... 7^η (γράφει) και σκέψου ότι εδώ πέρα είναι η μέγιστη θερμοκρασία. Δηλ. υπάρχει η περίπτωση στην Αθήνα τη 2^η μέρα που εγώ μετρώ να έχει μέγιστη θερμοκρασία και 1°C και 1,5 και 2, και 2,75°C και 3 και 4 και 5 και 6, όλες τις τιμές δηλ. που μπορεί να πάρει η θερμοκρασία μέχρι το 14; Σε μέγιστη;

Μαθήτρια: Όχι

Καθ: Ποια θα είναι η μέγιστη θερμοκρασία με αυτό το πινακάκι που κάναμε, εκεί, τη 2^η μέρα;

Μαθήτρια: 14°C

Καθ: : 14°C, αυτή η μέγιστη θερμοκρασία της 2^{ης} μέρας θα είναι μέγιστη θερμοκρασία και την 1^η μέρα, θα είναι μέγιστη θερμοκρασία και της 3^{ης} μέρας στο παράδειγμα που είπαμε. Κάναμε μετρήσεις μια βδομάδα και είδαμε ότι στην Αθήνα εκείνη τη βδομάδα η μέγιστη θερμοκρασία είναι 14°C και λέω τώρα, ρωτάω: για τη 2^η μέρα, για την 3^η μέρα ... αυτή η μέγιστη θερμοκρασία

40:00

Καθ: ... που αντιστοιχεί σε κάθε μέρα, έτσι; είναι μοναδική σαν τιμή, δηλ. σε κάθε μέρα, σε κάθε μέρα, υπάρχει περίπτωση να έχει δυο μέγιστες θερμοκρασίες ή και παραπάνω;

Παιδιά: όχι, μια είναι

Καθ: Γιατί λες τότε ότι δεν είναι μοναδική σα τιμή.

Μαθήτρια: Νόμιζα ότι είπατε οποιαδήποτε τιμή μέχρι το 14.

Καθ: Είναι μοναδική ως μέγιστη τιμή

Μαθήτρια: Μόνο μια μέγιστη τιμή έχει.

Καθ: Ωραία, πες Ελπίδα

Ελπίδα: Εγώ μπερδεύτηκα λίγο, όταν λέτε μοναδική τιμή, εγώ νόμιζα ότι κάποια στιγμή μέσα στη μέρα το περισσότερο ήταν 14 βαθμοί ... αλλά όχι όλη την ημέρα ... οπότε ...δεν μπορώ

Χτυπάει το κουδούνι.

Καθ: Ωραία, θα το θυμηθείς την Παρασκευή; Περιμένετε δυο λεπτά.

Μ: Ανάλογα πώς πάει μέσα στην ημέρα, εκείνη τη στιγμή η θερμοκρασία είναι τόσο ...Απλώς ..., τώρα δεν μπορώ να καταλάβω πότε μετρήσαμε αυτήν τη θερμοκρασία και πήραμε ότι είναι 14.

Καθ: Γιατί υπάρχει περίπτωση να μετρήσουμε 3 η ώρα το μεσημέρι και να είναι 14°C και υπάρχει και περίπτωση να ξαναμετρήσουμε στις 7 η ώρα το απόγευμα και να είναι πάλι 14°C, έτσι;

Μαθήτρια: Μπορεί να είναι και 16

Καθ: Νάχει πάει 16; Και τότε γιατί λέμε ότι η μέγιστη θερμοκρασία είναι 14;

Μ: Γιατί δεν έχουμε μετρήσει όλες τις ώρες,

Καθ: Γιατί έχουμε μετρήσει λάθος

Μ: Μπορεί σε ένα λεπτό να έχει αλλάξει, μετά να ξανακατέβει.

Καθ: Μισό λεπτό, σας τρώω το διάλειμμα, ναι αλλά δε σας έβαλα τεστ. Λέει όμως η Ειρήνη ότι μπορεί να έχουμε μετρήσει λάθος, πού ξέρουμε τι έχουμε μετρήσει; Πώς έχουμε μετρήσει; δεν έχουμε λέει μετρήσει όλες τις ώρες της ημέρας.. Δηλ. θέλω τις ερωτήσεις των συμμαθητών σας να τις σκεφτείτε μέχρι την Παρασκευή.

Μαθητής: Εκεί λέει η μέγιστη θερμοκρασία της ημέρας

Μαθήτρια: Όλης της ημέρας, το περισσότερο που πήγε είναι 14°C

Μαθητής: Από τις 12 το βράδυ μέχρι τις 12 το άλλο βράδυ έχει φτάσει τους 14°C, άρα και οποιαδήποτε ώρα και αν μετρήσουμε θα δω ως μέγιστη θερμοκρασία τους 14°C

Καθ: Δημήτρη ήθελες να πεις κάτι άλλο; ... Σας χαιρετώ.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Δέσποινα Πόταρη 2014. Δέσποινα Πόταρη. «Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών και Διδακτική Πράξη.». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/MATH237/>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

