



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικό και Καποδιστριακό  
Πανεπιστήμιο Αθηνών

---

## Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών και Διδακτική Πράξη

Δέσποινα Πόταρη

Σχολή Θετικών επιστημών

Τμήμα Μαθηματικό

---

## ΕΡΓΑΣΙΑ ΙΙ

Η εργασία είναι υποχρεωτική, για όσους δεν ασχολήθηκαν με την εργασία Ι και η καταληκτική ημερομηνία παράδοσης είναι:

Τρίτη 1<sup>η</sup> Ιουνίου 2010

Σας δίνονται

- ✧ οι παρακάτω ορισμοί πάνω στην έννοια της συνάρτησης.
  - ✧ η μετάφραση ενός κειμένου που αναφέρεται στην επιστημολογία της έννοιας της συνάρτησης.
1. Να συγκρίνετε τους ορισμούς ως προς τη διδακτική τους καταλληλότητα με βάση το κείμενο που σας έχει δοθεί. Αιτιολογήστε τις απόψεις σας.
  2. Διατρέξτε το σημερινό Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών του Γυμνασίου και του Λυκείου καθώς και τα σχολικά βιβλία και εντοπίστε παραδείγματα, αναπαραστάσεις, πλαίσια (μαθηματικά και μη) από τα οποία προσεγγίζεται η έννοια της συνάρτησης. Με βάση τη γνώση σας σχετικά με τη διδασκαλία και μάθηση της έννοιας της συνάρτησης αιτιολογήστε τις προσεγγίσεις αυτές.

ΟΡΙΣΜΟΙ**ΟΡΙΣΜΟΣ 1**

«Μια διμελής σχέση  $f$  λέγεται απεικόνιση του συνόλου  $A$  στο σύνολο  $B$ , όταν σε κάθε στοιχείο του  $A$  αντιστοιχίζεται ένα μόνο στοιχείο του  $B$ . Το σύνολο αφετηρίας  $A$  λέγεται και πεδίο ορισμού της απεικονίσεως. Μια απεικόνιση  $f$  του  $A$  στο  $B$  συμβολίζεται  $f:A \rightarrow B$ . Το μοναδικό  $y \in B$ , που είναι αντίστοιχο ενός στοιχείου  $x \in A$ , συμβολίζεται  $f(x)$  και λέγεται εικόνα του  $x$ . Γράφουμε λοιπόν

$$y=f(x)$$

Άρα το γράφημα της  $f$  αποτελείται από τα ζεύγη της μορφής  $(x, f(x))$  με  $x \in A$ . Από τον ορισμό της απεικονίσεως συμπεραίνουμε ότι ισχύει:

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2}$$

Αντί του όρου απεικόνιση χρησιμοποιείται και όρος **συνάρτηση**. Στην περίπτωση αυτή, η εικόνα  $f(x)$  λέγεται και τιμή της  $f$  στο  $x$ .

**Βαρουχάκης, Ν. Αδαμόπουλος, Λ., Αλεξανδρής, Ν., Παπακωνσταντίνου, Δ.Α., Παπαμικρούλης, Α., Σ., (1984), Α' Λυκείου, ΟΕΔΒ, ΑΘΗΝΑ**

**ΟΡΙΣΜΟΣ 2**

«**Συνάρτηση** από ένα σύνολο  $A$  σε ένα σύνολο  $B$  λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου  $A$  αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου  $B$ .

Το σύνολο  $A$  λέγεται **πεδίο ορισμού ή σύνολο ορισμού** της  $f$ .

Αν με μια συνάρτηση  $f$  από το  $A$  στο  $B$ , το  $x \in A$  αντιστοιχίζεται στο  $y \in B$ , τότε γράφουμε:  
 $y=f(x)$

και διαβάζουμε « $y$  ίσον  $f$  του  $x$ ». Το  $f(x)$  λέγεται τότε **τιμή της  $f$  στο  $x$** »

**Ανδρεαδάκης, Σ,Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος, Α.** (2010)  
Άλγεβρα Α' Γενικού Λυκείου (Αναμορφωμένη έκδοση), ΟΕΔΒ, ΑΘΗΝΑ

### ΟΡΙΣΜΟΣ 3

**Δραστηριότητα 1.** Κατά καιρούς ακούμε στην τηλεόραση για τις αυξήσεις στους μισθούς των εργαζομένων. Αυτή τη χρονιά ανακοινώθηκε αύξηση 3%.

α) Δύο εργαζόμενοι έχουν μισθούς 800 € και 1100 € το μήνα. Πόση είναι η αύξηση που θα πάρει ο καθένας;

β) Ένας εργαζόμενος έχει μισθό  $x$  €. Ποια είναι η αύξηση  $y$  που θα πάρει εφέτος

#### Λύση

α) Η αύξηση θα είναι:

για τον πρώτο εργαζόμενο:  $800 = 3 \cdot 8 = 24$  €

για τον δεύτερο εργαζόμενο:  $1100 = 3 \cdot 11 = 33$  €

β) Η αύξηση θα είναι:  $y = 0,03x$  δηλαδή  $y = 0,03x$ .

#### Παρατήρηση:

Η σχέση  $y = 0,03x$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για άλλες τιμές της

μεταβλητής  $x$ . Αν, για παράδειγμα, ένας εργαζόμενος έχει μισθό  $x = 700$  €, η αύξηση που θα πάρει θα είναι  $y = 0,03 \cdot 700 = 21$  €.

Ομοίως, για  $x = 1500$  βρίσκουμε αύξηση  $y = 0,03 \cdot 1500 = 45$  €.

«Με τη σχέση αυτή κάθε τιμή της μεταβλητής  $x$  (παλιός μισθός), αντιστοιχίζεται σε μία μόνο τιμή της μεταβλητής  $y$  (αύξηση). Μια τέτοια σχέση στα Μαθηματικά λέγεται **συνάρτηση**.»

**Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ. Ρεκούμης,** (2008) Κ. Μαθηματικά Β' Γυμνασίου, ΟΕΔΒ, ΑΘΗΝΑ

### ΟΡΙΣΜΟΣ 4

Στην καθημερινή μας ζωή ακούμε ή διαβάζουμε εκφράσεις όπως

- Η κατανάλωση βενζίνης ενός αυτοκινήτου εξαρτάται από την ταχύτητά του.
- Η ατμοσφαιρική πίεση σε ένα τόπο εξαρτάται από το υψόμετρό του....

Στα παραδείγματα αυτά με την έκφραση «εξαρτάται από» θέλουμε να δηλώσουμε την αλληλοεξάρτηση μεταξύ δυο μεγεθών κατά την οποία, όταν μεταβάλλεται το ένα μέγεθος μεταβάλλεται και το άλλο με συγκεκριμένο τρόπο. Στα μαθηματικά μια τέτοια διαδικασία ονομάζεται **συνάρτηση** και συνηθίζουμε να λέμε ότι « η μεταβλητή  $y$  εκφράζεται ως συνάρτηση της  $x$ ».

**Αλιμπινίσης, Α., Γρηγοριάδης, Σ., Ευσταθόπουλος, Ε. Κλαουδάτος, Ν. Παπασταυρίδης, Σ., Σβέρκος, Σ.** (1988) Μαθηματικά Β' γυμνασίου, ΟΕΔΒ.

### ΟΡΙΣΜΟΣ 5

*When quantities vary in accordance with changes in other quantities, all these quantities are*

*expressed as variables such as  $x$  and  $y$ . If we determine the value of  $x$ , the value of  $y$  is also determined. In situations like this, we say that  $y$  is a function of  $x$ .*

UCSMP textbook translations Japanese grade 7 mathematics, the university of Chicago school mathematics project, (1992) Ed. Kunihiko Kodaira, translator Hiromi Nagata, translation editor Fowler, G.

Μετάφραση: όταν ποσότητες μεταβάλλονται σε σχέση με άλλες ποσότητες, όλες αυτές οι εκφράζονται ως μεταβλητές των  $x$  και  $y$ . Αν προσδιορίσουμε την τιμή του  $x$ , προσδιορίζεται και το  $y$ . Σε τέτοιες περιπτώσεις, λέμε ότι η  $y$  **εκφράζεται ως συνάρτηση της  $x$** .

### **ΟΡΙΣΜΟΣ 6**

*A relationship between two variables in which the value of one variable depends on the value of the other variable.*

*For example, the distance  $d$  in miles covered in  $t$  hours by a car traveling at 55 mph is given by the equation  $d = 55t$ . The relationship between distance and the time is a function, and we say that the distance is a function of the time. This function is a linear function, and its graph is a straight line whose slope is 55.*

Lapan, Fey, Fitzgerald, Friet, Phillips, Moving straight ahead –Linear relationships, Connected mathematics 2, Pearson, Prentice Hall Pub.

Μετάφραση: η σχέση μεταξύ δυο μεταβλητών στην οποία η τιμή της μιας μεταβλητής εξαρτάται από την τιμή της άλλης μεταβλητής.

Για παράδειγμα, η απόσταση  $d$  σε μίλια που καλύπτεται σε  $t$  ώρες από ένα αυτοκίνητο που κινείται με ταχύτητα 55m/h δίνεται από την εξίσωση  $d = 55t$ . Η σχέση μεταξύ της απόστασης και του χρόνου είναι μια συνάρτηση χρόνου. Αυτή είναι μια γραμμική συνάρτηση και η γραφική της παράσταση είναι μια ευθεία γραμμή με κλίση 55.

### **ΟΡΙΣΜΟΣ 7**

**Function** A relationship between two variables in which the value of one variable depends on the value of the other. The relationship between length and area for rectangles with a fixed perimeter is a function; the area of the rectangle depends on, or is a *function of*, the length. If the variable  $y$  is a function of the variable  $x$ , then there is exactly one  $y$ -value for every  $x$ -value.

Μετάφραση: Συνάρτηση είναι η σχέση μεταξύ δυο μεταβλητών στην οποία η τιμή της μιας μεταβλητής εξαρτάται από την τιμή της άλλης. Η σχέση μεταξύ μήκους και εμβαδού ενός ορθογωνίου με σταθερή περίμετρο είναι συνάρτηση· το εμβαδό εξαρτάται, ή είναι συνάρτηση, του μήκους. Αν η μεταβλητή είναι  $y$  συνάρτηση της μεταβλητής  $x$ , τότε υπάρχει μια ακριβώς τιμή του  $y$  για κάθε τιμή του  $x$ .

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΙΙ –ΕΡΓΑΣΙΑ ΙΙ

Lapan, Fey, Fitzgerald, Friet, Phillips, Frogs, fleas and painted cubes- Quadratic relationships , Connected mathematics 2, Pearson, Prentice Hall Pub

## The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy

### Η κατανόηση της έννοιας της Συνάρτησης

Οι μαθητές δυσκολεύονται να συνδέσουν διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης: τύποι, γραφικές παραστάσεις, διαγράμματα, λεκτικές περιγραφές σχέσεων, όπως:  $f(x)$ ,  $x \rightarrow y$ ,  $\sin(x+t)$ , κλπ. Όπως επίσης και η γλώσσα που χρησιμοποιείται σε σχέση με τις συναρτήσεις δεν βοηθάει: το  $f(x)$  αντιπροσωπεύει και το όνομα αλλά και τη τιμή της συνάρτησης  $f$ . Σε αυθόρμητες καταστάσεις οι μαθητές χρησιμοποιούσαν διαφορετικούς συμβολισμούς και διαφορετική ορολογία. Για να πουν ότι η τιμή της συνάρτησης στο 2 είναι 3 έγραφαν:  $x(2)=3$ . Αυτό μπορούσε να διαβαστεί: «θέσε 2 στη θέση του  $x$  στο τύπο της συνάρτησης. Θα πάρεις 3.» Η έννοια της τιμής της συνάρτησης συνδέεται στενά με τη δραστηριότητα για τον υπολογισμό της τιμής της, αν δίνεται ο τύπος. Για να εκφράσουν το  $f(x)$ , έλεγαν: «θέσε 2 στο τύπο της συνάρτησης και υπολόγισε. Θα πάρεις έναν αριθμό.»

### ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ας υποθέσουμε ότι τα  $X$  και  $Y$  αντιπροσωπεύουν ΤΟΝ ΚΟΣΜΟ ΤΩΝ ΑΛΛΑΓΩΝ ή ΤΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ ΠΟΥ ΑΛΑΖΟΥΝ · Οπότε τότε το σύμβολο  $f$  αντιπροσωπεύει ΤΟΝ ΚΟΣΜΟ ΤΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ μεταξύ των αλλαγών ή των αντικειμένων που αλλάζουν ή ΤΟ ΚΟΣΜΟ ΤΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ που μετασχηματίζουν τα αντικείμενα σε άλλα αντικείμενα. Αυτές οι σχέσεις ή διαδικασίες πρέπει να προσδιορίζονται επακριβώς και αυτό αντιπροσωπεύει ΤΟΝ ΚΟΣΜΟ ΤΩΝ ΚΑΝΟΝΩΝ, ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΝΟΜΩΝ (παρόλο που στο τέλος θα πρέπει οι κανόνες αυτοί να έχουν καθολική ισχύ).

#### Αρχικές προϋποθέσεις

Αρχικά πρέπει να γίνουν κατανοητοί οι παραπάνω κόσμοι. Έτσι οι θεμελιώδεις πράξεις που πρέπει να γίνουν προκειμένου για την κατανόηση τους είναι:

$K^1(f)$ -1: προσδιορισμός των αλλαγών που παρατηρούνται στον περιβάλλοντα κόσμο ως ένα πρακτικό πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί.

$K(f)$ -2: προσδιορισμός των κανονικοτήτων των σχέσεων μεταξύ των αλλαγών ως ένα μέσο για να ασχοληθούμε με τις αλλαγές.

Για να επιτευχθούν τα παραπάνω πρέπει όμως να υπερπηδηθούν τα εξής επιστημολογικά εμπόδια:

$E^2(f)$ -1: ( Η φιλοσοφία<sup>3</sup> των μαθηματικών) Τα μαθηματικά δεν ασχολούνται με πρακτικά προβλήματα.

---

<sup>1</sup>  $K \rightarrow$  Κατανόηση

<sup>2</sup>  $E \rightarrow$  Επιστημολογικό

<sup>3</sup> Κάθε πράξη Κατανόησης προϋποθέτει την υπερπήδηση ενός αντίστοιχου Επιστημολογικού εμποδίου

## The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy

E (f)-2: ( Η φιλοσοφία των μαθηματικών) Υπολογιστικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή πινάκων που παρουσιάζουν αριθμητικές σχέσεις δεν είναι αντικείμενο άξιο προς μελέτη στα μαθηματικά.

Άλλη μια πράξη κατανόησης είναι η:

K(f)-3: Ο προσδιορισμός των ποσοτήτων που αλλάζουν κατά τη μελέτη μεταβολών.

Με αντίστοιχο επιστημολογικό εμπόδιο:

E (f)-3: ( Ασυνείδητο σχήμα σκέψης) Η θεώρηση των αλλαγών ως φαινόμενα· εστιάζοντας στο τρόπο που τα πράγματα αλλάζουν, αγνοώντας τις αλλαγές αυτές καθαυτές.

### Οι γνωστές και άγνωστες ποσότητες έναντι μεταβλητών και σταθερών

Πριν οι μαθητές αρχίσουν να μαθαίνουν τις συναρτήσεις, η εμπειρία που έχουν με τις μεταβλητές είναι η σχετική με τη διάκριση μεταξύ γνωστών και άγνωστων ποσοτήτων. Όταν πρόκειται για τις συναρτήσεις πρέπει να κάνουν μια μετατόπιση στην διάκριση μεταξύ της σταθεράς και της μεταβλητής. Το παρακάτω πρόβλημα δόθηκε σε ένα διαγώνισμα σε ένα Γαλλικό κολλέγιο στο Μόντρεαλ σε 16-χρονους μαθητές: *«δύο εταιρίες ενοικιάζουν φωτοτυπικά μηχανήματα. Η πρώτη χρεώνει 300\$ για την τοποθέτηση του μηχανήματος για κάθε μήνα και 0,04 \$ για κάθε φωτοτυπία. Η δεύτερη χρεώνει 250\$ για την τοποθέτηση του μηχανήματος για κάθε μήνα και 0,06 \$ για κάθε φωτοτυπία. 1. Για πιο αριθμό φωτοτυπιών ανά μήνα θα ήταν ίδια η τιμή; 2. Εάν βγάξετε πολλές φωτοτυπίες ποια εταιρία είναι η πιο συμφέρουσα;»* Για να απαντηθεί η πρώτη ερώτηση αρκεί να σκεφτεί κανείς με όρους εξίσωσης και την εύρεση των αγνώστων. Αλλά η δεύτερη ερώτηση απαιτεί να θεωρηθεί ο αριθμός των φωτοτυπιών ως μια μεταβλητή από την οποία εξαρτάται η άλλη μεταβλητή, δηλ. η τιμή.

Ακόμα κι αν κάποια αντικείμενα είναι κοινά σε αυτές τις δυο περιοχές, η προσοχή στρέφεται στις διαφορετικές όψεις τους, και τους αναθέτει διαφορετικούς ρόλους. Για παράδειγμα, η εξίσωση δεν είναι πλέον μια σχέση πάνω στον άγνωστο που επιτρέπει να προσδιοριστεί η τιμή της. Στο πλαίσιο των συναρτήσεων παρουσιάζεται ως η αρχή ή ο νόμος σύμφωνα με τον οποίο κάποιες μεταβλητές συμμεταβάλλονται.

Και άρα η αντίστοιχη πράξη κατανόησης:

K(f)-4: η διάκριση μεταξύ των δυο τρόπων μαθηματικής σκέψης: η μια με όρους γνωστών και άγνωστων ποσοτήτων, η άλλη με όρους μεταβλητών και σταθερών ποσοτήτων.

Και αντίστοιχα:

E(f)-4: (~~–~~Ασυνείδητο ~~–~~ σχήμα της σκέψης) Πρέπει να εκμαιευθεί η σκέψη με όρους εξισώσεων κι αγνώστων.

### Ασυμμετρία X και Y : Η εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή.

Οι ρόλοι των X και Y δεν είναι συμμετρικοί στον ορισμό της συνάρτησης. Σήμερα δεν είναι αξιωματικό, αλλά πρέπει να αναλογιστούμε ότι χρειάστηκε πολύς χρόνος για να γίνει

## The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy

κατανοητό ότι είναι σημαντικό να γίνει διάκριση μεταξύ της σειράς των μεταβλητών. Άλλωστε δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η έννοια της συνάρτησης απέκτησε υπόσταση μέσα από την αναλυτική γεωμετρία, όπου αυτό που είχε σημασία ήταν η σχέση μεταξύ των ευθυγράμμων τμημάτων που σχημάτιζαν την καμπύλη ( διάμετρος, άξονες κλπ) . Στην εξίσωση της έλλειψης  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , δεν έχει σημασία η σειρά των μεταβλητών .

Αυτό παρατηρήθηκε στο Robert, ένα μαθητή που μετείχε στο πείραμα που διεξήγαγε η Sierpinski (1989): για αυτόν οι συναρτήσεις είχαν υπόσταση σε πλαίσιο της αναλυτικής γεωμετρίας· οι καμπύλες δεν αντιπροσώπευαν συγκεκριμένες σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών. Μάλλον οι καμπύλες ήταν αρχικά εκεί, και περιγράφονταν από τις σχέσεις που αντιπροσώπευαν τις καμπύλες. Ο τύπος της συνάρτησης το μόνο που έκανε ήταν να επιτρέπει τον υπολογισμό της μιας συντεταγμένης σε σχέση με την άλλη.

Κι άρα

K (f)-5: η διάκριση μεταξύ των εξαρτημένων και ανεξάρτητων μεταβλητών.

### **X και Y –ποσότητες ή σύνολα σημείων;**

Προκειμένου να «μετρηθούν και τα μη μετρήσιμα<sup>4</sup>» επιβαλλόταν μια επέκταση και ομοιόμορφη θεώρηση της έννοιας του αριθμού. Αυτό ήταν ένα απαραίτητο βήμα που έπρεπε να γίνει προκειμένου να μοντελοποιηθούν τα φυσικά φαινόμενα με τη βοήθεια των σχέσεων μεταξύ των συνόλων των αριθμών. Η διάκριση που οι Έλληνες έκαναν μεταξύ των ακεραίων αριθμών και των συνεχών ποσοτήτων αποτελούσε ένα ακόμα εμπόδιο στην προσπάθεια αυτή. Οι αναλογίες θεωρούνταν κάτι διαφορετικό από τις ισότητες, ό λόγος κάτι διαφορετικό από το πηλίκο.

Και άρα το επόμενο επιστημολογικό εμπόδιο που έπρεπε να υπερπηδηθεί ήταν:

E(f)-6: (Μια στάση προς την έννοια του αριθμού) μια ετερογενής αντίληψη του αριθμού.

Επίσης η ανάπτυξη στον τομέα της Άλγεβρας και της συμβολικής γραφής (η χρήση γραμμάτων στην άλγεβρα) (symbolic notation) οδήγησε στην ανάγκη για εξαλειφθεί η διάκριση μεταξύ διακριτών αριθμών και συνεχών μεγεθών. Ακόμα κι όταν στην αρχή της επίλυσης του προβλήματος κάποια γράμματα υποδηλώνουν ποσότητες ενός αντικειμένου ή μεταβαλλόμενα μεγέθη, και κάποια άλλα απλά αριθμούς, η διάκριση αυτή εξαλείφεται όταν η εξίσωση στην οποία εμφανίζονται πρέπει να τη χειριστούμε αλγεβρικά.

Και άρα η αντίστοιχη πράξη κατανόησης της συνάρτησης είναι:

K(f)-6: Γενίκευση και σύνθεση της έννοιας του αριθμού. Με αντίστοιχο εμπόδιο, σύμφωνα με κάποιους ιστορικούς της ετερογενούς αντίληψης του αριθμού<sup>5</sup>.

Και

---

<sup>4</sup> Έκφραση που αποδίδεται στον<sup>4</sup> Galileo

<sup>5</sup> E(f)-6



## The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy

E(f)-7: (Μια στάση προς την έννοια του αριθμού) Η Πυθαγόρεια φιλοσοφία του αριθμού: τα πάντα είναι αριθμοί.

Η διάκριση μεταξύ μεταβλητών που αντιπροσωπεύουν φυσικές έννοιες ( *χρόνος, ταχύτητα, θέση*) και αριθμητικών μεταβλητών είναι μια απαραίτητη προϋπόθεση για την κατανόηση της συνάρτησης. Δεν θα πρέπει να συγχέονται ο αριθμός και η ποσότητα. Ο γενικευμένος (abstract) αριθμός και η ποσότητα ενός πράγματος είναι δυο ξεχωριστές έννοιες και η επίγνωση αυτού είναι το ίδιο σημαντική όσο και η ενοποιημένη έννοια του αριθμού.

Οπότε :

K(f)-7: Διάκριση μεταξύ αριθμού και ποσότητας

Όμως η διάκριση μεταξύ αριθμού και φυσικού μεγέθους είναι ένα πράγμα, και η κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των φυσικών νόμων και των μαθηματικών συναρτήσεων είναι άλλο.

E(f)-8: (Ασυνείδητο σχήμα της σκέψης) Οι νόμοι στη Φυσική και οι συναρτήσεις στα μαθηματικά δεν έχουν τίποτα κοινό · ανήκουν σε διαφορετικές περιοχές (θαλάμους) της σκέψης.

K(f)-8: Η σύνθεση των εννοιών των νόμων και της έννοιας της συνάρτησης· ειδικά, η επίγνωση της δυνατής χρήσης των συναρτήσεων για τη μοντελοποίηση σχέσεων μεταξύ φυσικών και άλλων μεγεθών.

### **Μια προνομιούχα σχέση – Η αναλογία**

Εδώ μελετάμε το τρίτο στοιχείο της τριάδας : μετά τα **X** και **Y** είναι η σειρά της **f**.

Η αναλογία ήταν μια σχέση που για πολύ καιρό είχε εξέχουσα θέση ( μέχρι τον 18<sup>ο</sup> αι.) Η θεωρία των αναλογιών αναπτύχθηκε στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη και διασφάλισε μια σταθερή βάση. Δεν είναι τυχαίο που αναζητούσαν την αναλογία στα πάντα.

Σε σχέση με την τέλεια αυθαιρεσία του «νόμου» της συνάρτησης στον ορισμό της , μια τέτοια θεώρηση μπορεί να θεωρηθεί εμπόδιο:

E(f)-9<sup>6</sup>: (Ασυνείδητο σχήμα της σκέψης) Η αναλογία είναι μια προνομιούχα μορφή σχέσης.

Ωστόσο, όπως και όλα τα επιστημολογικά εμπόδια, έχει επίσης ένα θετικό ρόλο στη σκέψη μας. Η αντίληψη των αναλογικών σχέσεων είναι η ουσία αυτή καθαυτή οποιασδήποτε αναλογικής σκέψης. Η αναλογία είναι η ισότητα δυο λόγων. Ο λόγος και η αιτιολόγηση είναι η ουσία της μαθηματικής δομής, αλλά συναντάται παντού : στο περιβάλλον, στο σπίτι, στο ανθρώπινο σώμα , στη χρήση της γλώσσας.

### **Η γοητεία της άλγεβρας: η αναλυτική έκφραση της συνάρτησης**

Η απουσία της γνώσης της άλγεβρας κάνει πολύ δύσκολη την κατανόηση των συναρτήσεων.

---

<sup>6</sup> προνομιακή αναλογία

## The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy

Έτσι αναφορικά με το ρόλο της άλγεβρας στα μαθηματικά βρήκαμε δυο εμπόδια:

E(f)-10: (Μια πεποίθηση αναφορικά με τις μαθηματικές μεθόδους) Η ισχυρή πεποίθηση της ισχύος των τυπικών πράξεων στις αλγεβρικές εκφράσεις.

E(f)-11: (Μια αντίληψη για τη συνάρτηση) Μόνο οι σχέσεις που περιγράφονται από αναλυτικούς τύπους αξίζει να ονομαστούν συναρτήσεις.

Τα παραπάνω εμπόδια E(f)-9, E(f)-10 και E(f)-11, εισηγούνται μια άλλη πράξη κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης.

K(f)-9: Η διάκριση μεταξύ της συνάρτησης και των αναλυτικών εργαλείων που μερικές φορές χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τον κανόνα της.

Αυτή η διάκριση μπορεί να προαχθεί στους μαθητές φέρνοντας τους παραδείγματα όπου μια συνάρτηση περιγράφεται με δυο διαφορετικούς τύπους ( πχ. έναν αναδρομικό και ένα με τη γενική μορφή του  $n$ -οστού όρου, όπως ο τύπος του Binet για την ακολουθία Fibonacci).

### Η σύνθεση της γενικής έννοιας της συνάρτησης- γιατί είναι τόσο δύσκολη;

E(f)-12: (Η αντίληψη του ορισμού) Ο ορισμός είναι η περιγραφή ενός αντικείμενου που αλλιώς γίνεται αντιληπτό με τις αισθήσεις ή την ενόραση. Ο ορισμός δεν προσδιορίζει το αντικείμενο· μάλλον το αντικείμενο προσδιορίζει τον ορισμό. Ο ορισμός δεν είναι λογικά δεσμευτικός ( binding logically).

K(f)-10: Η διάκριση μεταξύ μαθηματικών ορισμών και περιγραφές αντικειμένων

K(f)-11: Η σύνθεση της γενικής αντίληψης της συνάρτησης ως αντικείμενο.

Η πεποίθηση ότι όλες οι συναρτήσεις είναι συνεχείς και διαφορίσιμες σχεδόν παντού συχνά αναφέρεται ως μια σοβαρή εσφαλμένη εντύπωση ή ακόμα και ως ένα επιστημολογικό εμπόδιο. Το παιδαγωγικό συμπέρασμα αυτών των παρατηρήσεων είναι ότι μια πρώιμη εισαγωγή του ορισμού της συνάρτησης δεν έχει νόημα· είτε θα αγνοηθεί είτε θα οδηγήσει σε παρανοήσεις.

### Επιστημολογικές ερωτήσεις σχετικές με τον ορισμό της συνάρτησης του Peano : είναι οι συναρτήσεις μόνο ειδικές κατηγορίες σχέσεων;

Ο ορισμός του Dirichlet

*«Μια συνάρτηση  $y(x)$  είναι δοσμένη αν έχουμε οποιοδήποτε κανόνα που δίνει μια συγκεκριμένη τιμή  $y$  σε κάθε  $x$  σε κάποιο σύνολο σημείων. Δεν είναι αναγκαίο το  $y$  να υπόκειται στον ίδιο κανόνα που αφορά το  $x$  μέσα σ' ολόκληρο το διάστημα»*

*(Davis & Hersh 1981 σελ.257)*

## The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy

ήταν ευρέως αποδεκτός και χρησιμοποιήθηκε ως τα μέσα του 20<sup>ου</sup> αι. και μετέπειτα, τουλάχιστον από τους συγγραφείς των εγχειριδίων. Στην αλλαγή του αιώνα άρχισε να προκαλεί συζητήσεις και διαφωνίες στους κύκλους των κονστρουκτιβιστών, εμπειριστών και των φορμαλιστών. Οι μεν γιατί ήθελαν ένα κανόνα που να επιτρέπει να βρίσκουν ένα  $y$  που να αντιστοιχεί σε ένα  $x$  σε πεπερασμένο χρόνο ή πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Οι δε, θεωρούσαν ότι ο ορισμός δεν ήταν αρκετά αυστηρός.

Ο ορισμός του Peano<sup>7</sup> εισήχθη στην διδασκαλία στη β-θμια εκπαίδευση (μερικές φορές και νωρίτερα) κατά την μεταρρύθμιση των Νέων Μαθηματικών. Αυτό οδηγεί σε μια περαιτέρω προϋπόθεση για την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης.

K(f)-11: η διάκριση μεταξύ των εννοιών της συνάρτησης και της σχέσης.

### **Ενέργειες για την κατανόηση των σχετιζόμενων μεταξύ τους αναπαραστάσεων των συναρτήσεων**

Πολλές διαφορετικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων, πίνακες τιμών, γραφικές παραστάσεις και αναλυτικοί τύποι χρησιμοποιούνται ευρέως στο σχολείο.

#### **Πίνακες τιμών.**

E(f)-13: (Η αντίληψη της συνάρτησης) Η συναρτήσεις είναι ακολουθίες.

Οι ακολουθίες είναι ένα προνομιούχο είδος συνάρτησης. Ίσως επειδή θεωρείται σιωπηρά ότι οι μεταβλητές παίρνουν διαδοχικά ένα πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος τιμών.

K(f)-13: Η διάκριση μεταξύ των εννοιών της συνάρτησης και ακολουθίας.

#### **Συναρτήσεις και καμπύλες.**

Το σύστημα των βοηθητικών τμημάτων επιλεγόταν για κάθε καμπύλη ή οικογένεια καμπυλών ξεχωριστά· οι συνιστώσες δεν ήταν αριθμοί που καθορίζονταν από ένα σύστημα αξόνων που επιλεγόταν εκ των προτέρων. Ήταν ευθύγραμμα τμήματα- γεωμετρικά αντικείμενα.

E(f)-14: (Η αντίληψη για τις συντεταγμένες) Οι συντεταγμένες ενός σημείου είναι ευθύγραμμα τμήματα (όχι αριθμοί).

K(f)-14: Η διάκριση μεταξύ των συντεταγμένων του σημείου της καμπύλης και των ευθυγράμμων τμημάτων *ικανοποιώντας μια λειτουργία της συνάρτησης.*

---

<sup>7</sup> Ο Giuseppe Peano (1911) στο έργο του «πάνω στον ορισμό της συνάρτησης» (Sulla definizione di funzione, Atti dei Lincei, 1911) είναι ο δημιουργός μιας άλλης αντίληψης: Σύμφωνα μ' αυτή, η έννοια της συνάρτησης θα έπρεπε να αναχθεί στην έννοια της σχέσης. Ο Peano εισήγαγε την ιδέα της σχέσης και υποστήριξε πειστικά ότι οι συναρτήσεις θα έπρεπε να ταυτίζονται με τέτοιες σχέσεις οδηγώντας μ' αυτόν τον τρόπο στον ορισμό της έννοιας αργότερα από τον Hausdorff ως σύνολο διατεταγμένων ζευγών.

## The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy

Αυτή η τελευταία συνθήκη είναι το ίδιο σημαντική για τους σημερινούς μαθητές όσο και τους μαθηματικούς του 17<sup>ου</sup> -18<sup>ου</sup> αι.

E(f)-15: (Η αντίληψη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι ένα γεωμετρικό μοντέλο, η συναρτησιακή σχέση. Δε χρειάζεται να είναι πιστή, μπορεί να περιέχει και σημεία  $(x,y)$  στα οποία η συνάρτηση να μην ορίζεται στο  $x$ .

Μερικοί μαθητές βλέπουν τα διαγράμματα με ένα συνθετικό και συγκεκριμένο τρόπο. Δηλ. βλέπουν τις συναρτήσεις ως γεωμετρικά αντικείμενα, εξιδανικεύσεις γραμμών στο χαρτί, ή τροχιών κινούμενων σημείων. Άλλοι μαθητές μπορεί να αντιλαμβάνονται αυτή την αναπαράσταση που αποτελείται από τα  $(x,y)$ , όπου τα  $x,y$  σχετίζονται με κάποιο τρόπο μεταξύ τους. Αυτή η σχέση μπορεί να δίνεται με μια εξίσωση. Αλλά η γραμμή δεν αντιπροσωπεύει τη σχέση. Μάλλον αντιπροσωπεύεται από αυτήν. Η εστίαση αντιστρέφεται. Η συνάρτηση είναι η γραμμή και όχι η σχέση.

Η έννοια της γραφικής παράστασης είναι δύσκολη. Μερικοί μαθητές δε θα χρησιμοποιούσαν ποτέ μια δισδιάστατη γραφική παράσταση αυθόρμητα για να αναπαραστήσουν μια συναρτησιακή σχέση.

### **Οι Συναρτήσεις και οι αναπαραστάσεις τους –διάκριση και σύνθεση.**

Η αναπαράσταση δεν είναι η ίδια όπως το αντικείμενο που αναπαρίσταται.

K(f)-15: Η διάκριση μεταξύ των διαφορετικών μορφών αναπαράστασης των συναρτήσεων και των ίδιων των συναρτήσεων

Καθώς οι συναρτήσεις εφαρμόζονται σε διαφορετικά πλαίσια, χρησιμοποιούνται διαφορετικοί όροι των ίδιων πραγμάτων. Λέμε: η τιμή της συνάρτησης, ο όρος της ακολουθίας, η εικόνα του σημείου. Στη φυσική λέμε: στη θερμοκρασία των 273K ο όγκος ενός mol ενός αερίου είναι 22l. Η συνάρτηση εκχωρεί κάτι σε ένα αριθμό· μια ακολουθία διατάσσει ένα διακριτό σύνολο, μια αντιστοίχιση χαρτογραφεί, ένας νόμος συσχετίζει δυο ή περισσότερα μεγέθη.

K(f)-16: η σύνθεση των διαφορετικών μορφών απεικόνισης των συναρτήσεων, αντιπροσωπεύοντας τις συναρτήσεις και μιλώντας για αυτές.

### **Οι έννοιες της συνάρτησης και της αιτίας (cause).**

Έχει αναφερθεί ότι οι μαθητές μερικές φορές συγχέουν τις έννοιες της συνάρτησης και της αιτίας : η αλλαγή στο  $x$  είναι αυτό που προκαλεί την αλλαγή στο  $y$ .

E(f)-16: ( η αντίληψη της μεταβλητής) Οι αλλαγές στη μεταβλητή είναι αλλαγές στο χρόνο.

K(f)-17: η γενίκευση της έννοιας της μεταβλητής.

K(f)-18: η σύνθεση των ρόλων των εννοιών της συνάρτησης και του σκοπού στην ιστορία της επιστήμης: η επίγνωση του γεγονότος ότι η αναζήτηση συναρτησιακών και αιτιολογικών σχέσεων είναι και οι δυο εκφράσεις της ανθρώπινης προσπάθειας να κατανοήσουν κι εξηγήσουν τις αλλαγές στον κόσμο που τους περιβάλλει.

## The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy

K(f)-19: η διάκριση μεταξύ των εννοιών των συναρτησιακών και αιτιωδών σχέσεων.

Ένα παιδαγωγικού περιεχομένου συμπέρασμα είναι εάν δεν παρουσιαστεί η έννοια της συνάρτησης στους μαθητές ως ένα από τα εργαλεία που διαθέτουν για να απαντήσουν στις ερωτήσεις τους για την μεταβλητότητα του κόσμου τούτου, τότε αυτή θα παραμείνει χωρίς νόημα για αυτούς έξω από την τάξη των μαθηματικών.

### Μερικά συμπεράσματα διδακτικού περιεχομένου

1. Αναφορικά με την κινητοποίηση: οι μαθητές πρέπει να ενδιαφέρονται να εξηγήσουν τις αλλαγές, βρίσκοντας κανονικότητες μεταξύ αυτών. Οι συναρτήσεις μπορεί να παρουσιάζονται ως μοντέλα συγκεκριμένων σχέσεων που παρατηρούν. Αλλά πρέπει επίσης να παρουσιάζονται ως εργαλεία αναπαράστασης ενός συστήματος με ένα άλλο (τότε θα μιλούσαμε για αντιστοιχίες)
2. Αναφορικά με τα εισαγωγικά πλαίσια: οι συναρτήσεις στην αναλυτική μορφή θα πρέπει αρχικά να παρουσιάζονται ως εργαλεία μοντελοποίησης συγκεκριμένων καταστάσεων στην καθημερινή ζωή ή τη φυσική. Καλό θα ήταν η παρουσίαση της πραγματικής κατάστασης να μην ήταν ιδεατή, με αποτέλεσμα τη μετατροπή της κατασκευής του μοντέλου σε ένα τυπικό πρόβλημα.
3. Αναφορικά με αναπτυξιακά πλαίσια: μέθοδοι που παρεμβάλλονται στην κατασκευή των πινάκων τιμών βοηθούν στην βαθύτερη κατανόηση της έννοιας.
4. Αναφορικά με την ανάπτυξη ενός πιο λεπτομερή επιπέδου κατανόησης των συναρτήσεων: οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να πουν όχι μόνο *πώς αλλάζει αλλά και τι αλλάζει*.
5. Αναφορικά με προαπαιτούμενες γνώσεις: χρειάζεται μια αλγεβρική επίγνωση δομικού επιπέδου. Δεν έχει νόημα η εισαγωγή του γενικού ορισμού της συνάρτησης πριν την ανάπτυξη μιας συγκεκριμένης μαθηματικής κουλτούρας.
6. Αναφορικά με τις αναπαραστάσεις: πρέπει να παρέχεται στους μαθητές ένα ευρύ φάσμα παρουσίασης της συνάρτησης, μιλώντας για αυτές (αντιστοιχίες, μετασχηματισμούς,...) και αναπαριστώντας τις συναρτήσεις ώστε να αποφευχθεί η συνταύτιση των συναρτήσεων με μια μόνο από αυτές.
7. Αναφορικά με τους ορισμούς: Οι άτυποι ορισμοί της συνάρτησης, της μορφής του Dirichlet, επαρκούν για την β-θμια εκπαίδευση.
8. Αναφορικά με τη διάκριση της έννοιας της συνάρτησης και άλλων γενικών εννοιών : συζητήσεις στην τάξη για ομοιότητες και διαφορές μεταξύ συναρτησιακών και αιτιώδους συνάφειας σχέσεων μπορούν να συμβάλλουν στην καλύτερη κατανόηση των δυο εννοιών.

**ΠΗΓΗ:** *The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, Ed. Harel, G., & Dubinski, E. Mathematical Association of America MMA notes Vol. 25

# Σημειώματα

## Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Δέσποινα Πόταρη 2014. Δέσποινα Πόταρη. «Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών και Διδακτική Πράξη.». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/MATH237/>.

## Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

## Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

