ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Προβλήματα που συνδέονται με ελλείψεις στην κατανόηση των βασικών αντικειμένων που διαπραγματεύεται ο Απειροστικός Λογισμός. Δηλαδή, των πραγματικών αριθμών και της έννοιας της συνάρτησης.

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ο διαχωρισμός μεταξύ των διαφόρων κατηγοριών των αριθμών παραμένει αρκετά συγκεχυμένος και φαίνεται να εξαρτάται από τη σημειακή αναπαράσταση τους.

Η συσχέτιση μεταξύ πραγματικών αριθμών και πραγματικής ευθείας δεν είναι πλήρης στο μυαλό των παιδιών.

Η αυξανόμενη χρήση των υπολογιστών τσέπης τείνει να δημιουργήσει την αντίληψη ότι οι πραγματικοί αριθμοί έχουν δεκαδικές αναπαραστάσεις με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Πολλοί μαθητές για να ελέγξουν αν μία σχέση ορίζει συνάρτηση χρησιμοποιούν κριτήρια που έρχονται σε αντίθεση με τον ορισμό της έννοιας, αν και οι περισσότεροι από αυτούς είναι σε θέση να τον αναπαράγουν.

Τα κριτήρια αυτά σχηματοποιούνται από τυπικά παραδείγματα που θεωρούνται ως πρότυπα και από συσχετισμούς όπως:

Συνάρτηση - Τύπος - Καμπύλη.

Αδυναμία συνδυασμού των διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας συνάρτησης και η μετάβαση από μια αναπαράσταση σε άλλη.

Αδυναμία στην θεώρηση της συνάρτησης όχι μόνο ως διαδικασία, αλλά και ως αντικείμενο.

Αυτό δημιουργεί προβλήματα όταν πρέπει π.χ. να θεωρήσει ο μαθητής σύνολα συναρτήσεων.

- 2. Προβλήματα που συνδέονται με τη διάσταση που υπάρχει μεταξύ του «αλγεβρικού» και του «αναλυτικού» τρόπου σκέψης.

Η Μαθηματική ανάλυση απαιτεί αλγεβρικές δεξιότητες και ικανότητες και ταυτόχρονα απαιτεί απομάκρυνση από τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης.

Για να διεισδύσουμε στην αναλυτική σκέψη και να είμαστε αποτελεσματικοί σε αυτήν πρέπει να αναπτύξουμε νέες τεχνικές.

Επίσης στον Απειροστικό αντικείμενα και γνώσεις που ήταν ήδη γνωστά πρέπει να αναπροσαρμοστούν.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η έννοια της εφαπτομένης.

Στην μέση εκπαίδευση εισάγεται ως γεωμετρική έννοια (εφαπτόμενη στον κύκλο) με τις εξής ιδιότητες:

Με τον κύκλο έχει μόνο ένα κοινό σημείο.

Είναι κάθετη στην ακτίνα του κύκλου στο σημείο επαφής.

Έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο και δεν τον «κόβει».

Έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο και ο κύκλος βρίσκεται στο ένα ημιεπίπεδο.

Αυτή η γεωμετρική οπτική αντίληψη μπορεί να επεκταθεί σε άλλες καμπύλες, όπως είναι η έλλειψη και η παραβολή.

Δεν υπάρχει όμως άμεση συσχέτιση μεταξύ αυτής της γεωμετρικής αντίληψης της έννοιας της εφαπτομένης και της αναλυτικής έννοιας που μαθαίνει ο μαθητής στον Απειροστικό Λογισμό.

Διάφορες έρευνες δείχνουν ότι το Εκπαιδευτικό σύστημα αφήνει στους μαθητές την ευθύνη να αναδιοργανώσουν μόνοι τους τις διάφορες έννοιες, κάτι που δεν μπορούν να το επιτύχουν. Έτσι, τελειώνοντας τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, η πλειοψηφία των μαθητών δεν είναι σε θέση να συνδέσει αυτές τις έννοιες.

Έρευνες επίσης έδειξαν ότι όταν η διδασκαλία αναλαμβάνει αυτή την ευθύνη τότε η αναδιοργάνωση των εννοιών επικρατεί αποτελεσματικά και σταθερά.

3. Προβλήματα που οφείλονται στη δυσκολία κατανόησης της έννοιας του ορίου.

- Η έννοια του ορίου είναι μια ιδιαίτερα δύσκολη έννοια, χαρακτηριστική του είδους σκέψης που απαιτείται στα ανώτερα μαθηματικά.
- Κατέχει κεντρική θέση που διεισδύει σε ολόκληρη τη μαθηματική ανάλυση - ως θεμέλιο της θεωρίας προσέγγισης, της συνέχειας, του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού.

- Οι διάφορες έρευνες που έχουν διεξαχθεί παρουσιάζουν σαφέστατα ότι η πλειοψηφία των μαθητών δεν κατανοεί πλήρως την έννοια του ορίου, ακόμη και σε ανώτερο στάδιο των σπουδών τους. Αυτό βέβαια δεν τους αποτρέπει από το να λύνουν ασκήσεις, να επιλύουν προβλήματα και να επιτυγχάνουν στις εξετάσεις τους.

Θα μελετήσουμε διάφορα εμπόδια που παρουσιάζονται στους μαθητές στην προσπάθεια τους να κατανοήσουν την έννοια του ορίου.

- **Για τις περισσότερες μαθηματικές έννοιες, η διδασκαλία δεν ξεκινά σε παρθένο έδαφος.**
- **Στην περίπτωση των ορίων, πριν από οποιαδήποτε διδασκαλία γι’ αυτό το θέμα ο μαθητής έχει ήδη ορισμένες ιδέες, διαισθήσεις, εικόνες, γνώσεις, που προέρχονται από την καθημερινή εμπειρία, όπως οι κοινές σημασίες των όρων που χρησιμοποιούνται. Αυτές τις αντιλήψεις μιας έννοιας, που εμφανίζονται πριν από την τυπική διδασκαλία, ονομάζονται *αυθόρμητες αντιλήψεις* (spontaneous conceptions).**

- Όταν ένας μαθητής συμμετέχει σ’ ένα μάθημα μαθηματικών, αντίθετα με αυτό που μπορεί να φαντάζονται οι περισσότεροι καθηγητές, αυτές οι ιδέες δεν εξαφανίζονται.
- Αυτές οι αυθόρμητες ιδέες αναμιγνύονται με την νεοαποκτηθείσα γνώση, τροποποιούνται και προσαρμόζονται για να σχηματίσουν τις προσωπικές αντιλήψεις των μαθητών.

- Έχει αποδειχθεί ότι προκειμένου να επιλυθεί ένα πρόβλημα, γενικά δε στηριζόμαστε μόνο στην επιστημονική θεωρία, αλλά και στο φυσιολογικό ή αυθόρμητο συλλογισμό, ο οποίος είναι θεμελιωμένος στις αυθόρμητες αυτές ιδέες.

- Στην περίπτωση της έννοιας του ορίου, παρατηρούμε ότι οι λέξεις «τείνει» και «όριο» έχουν μια σημασία για τους μαθητές πριν αρχίσουν οποιαδήποτε μαθήματα και ότι οι μαθητές συνεχίζουν να βασίζονται σ’ αυτές τις σημασίες και αφότου τους έχει δοθεί ένας τυπικός ορισμός.

Οι έρευνες έχουν αποκαλύψει πολλές διαφορετικές σημασίες για την έκφραση «τείνει προς»:

- πλησιάζει (μένοντας τελικά μακριά του) πλησιάζει ... χωρίς να το φθάνει
- πλησιάζει ... μέχρι σχεδόν να το φθάσει
- μοιάζει

- Η ίδια η λέξη όριο μπορεί να έχει διαφορετική σημασία για τους ίδιους ανθρώπους σε διαφορετικές στιγμές. Συχνότερα θεωρείται ως ένα «αξεπέραστο όριο», αλλά μπορεί επίσης να είναι:

ένα αξεπέραστο όριο το οποίο μπορούμε να φθάσουμε
ένα αξεπέραστο όριο το οποίο είναι αδύνατο να φθάσουμε
ένα σημείο το οποίο πλησιάζουμε, χωρίς να το φθάνουμε
ένα σημείο το οποίο πλησιάζουμε και το φθάνουμε
ένα άνω ή κάτω φράγμα,
ένα μέγιστο ή ένα ελάχιστο,
ένα διάστημα,
αυτό που έπεται «αμέσως μετά από» εκείνο ως το οποίο μπορούμε να φθάσουμε,
ένας περιορισμός, μια απαγόρευση, ένας κανόνας,
το τέλος, το τέρμα.

- Από τον ένα μαθητή στον άλλο η σημασία που αποδίδεται στις λέξεις ποικίλει.
- Για ένα μαθητή μια λέξη μπορεί να έχει διάφορες σημασίες, ανάλογα με τις περιστάσεις.
- Οι αυθόρμητες ιδέες παραμένουν για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα.
- Οι έρευνες δείχνουν ότι μπορούν να παραμείνουν και σε μαθητές σε πολύ πιο προχωρημένο στάδιο μάθησης.

- Η Aline Robert έχει μελετήσει τα διαφορετικά πρότυπα που οι μαθητές μπορούν να έχουν για την έννοια του ορίου μιας ακολουθίας.
- Παρά το γεγονός ότι στους μαθητές έχει δοθεί ένας τυπικός ορισμός της συγκλίνουσας ακολουθίας, όταν τους ζητείται να περιγράψουν την έννοια, ενεργούν σα να μη τους είχε δοθεί, έχουν την τάση να δημιουργούν αντιλήψεις που σχετίζονται με διάφορες πτυχές της πρότερης εμπειρίας τους.

- **Μερικοί μαθητές πρότειναν πρωτογενή, στοιχειώδη μοντέλα, που θυμίζουν εκείνα που μπορεί να προκληθούν αυθόρμητα, όπως:**

  ***σταθερή*: «Οι τελικοί όροι έχουν πάντα την ίδια τιμή»,**

  ***φράγμα*: "Οι τιμές δεν μπορούν να περάσουν το *l*»**

- **Επιπλέον υπήρξαν μοντέλα που προέκυψαν περισσότερο από την τυπική διδασκαλία:**
- ***Μονοτονικά και δυναμικά-μονοτονικά***
- **«μια συγκλίνουσα ακολουθία είναι μια αύξουσα ακολουθία άνω φραγμένη (ή φθίνουσα κάτω φραγμένη)»,**
- **«μια συγκλίνουσα ακολουθία είναι μια αύξουσα (ή φθίνουσα) ακολουθία που πλησιάζει ένα όριο».**

- ***Δυναμικά*:**
- **«η un τείνει στο *l*»**
- **«η un πλησιάζει το *l*»**
- **«η απόσταση της un από το *l* γίνεται μικρή»**
- **«οι τιμές πλησιάζουν έναν αριθμό όλο και περισσότερο».**

- ***Στατικά***:
- **«τα un βρίσκονται σ’ ένα διάστημα κοντά στο *l*»**
- **«τα un είναι συγκεντρωμένα γύρω από το *l* »**
- **«Τα στοιχεία της ακολουθίας καταλήγουν να βρίσκονται σε μια γειτονιά γύρω από το *l*".**
- ***Μικτά*: ένα μίγμα των ανωτέρω**

- Επίσης η Robert διαπίστωσε ότι αυτά τα μοντέλα επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο οι φοιτητές του πανεπιστημίου έλυναν τα προβλήματα.

- Σαφώς δεν υπάρχει μια μοναδική έννοια του ορίου στο νου των μαθητών.
- Είναι εμφανές ότι διαθέτουν ποικίλες εικόνες της έννοιας.

- **Επιπλέον, είναι επίσης σαφές ότι η αρχική διδασκαλία τείνει να δίνει έμφαση στη *διαδικασία* προσέγγισης του ορίου, παρά στην ίδια την έννοια του ορίου.**
- **Το σύνολο των εικόνων της έννοιας που συνδέονται μ' αυτή τη διαδικασία, όπως εξηγήθηκε παραπάνω, περιέχει πολλούς παράγοντες που συγκρούονται με τον τυπικό ορισμό («πλησιάζει αλλά δε μπορεί να φθάσει», «δε μπορεί να το περάσει», κ.λπ...).**
- **Κατά συνέπεια οι μαθητές αναπτύσσουν εικόνες των ορίων και του απείρου που σχετίζονται με παρανοήσεις που αφορούν τη διαδικασία «της προσέγγισης» ή «της αύξησης» ή «της επ'**

- Λόγω της ποικιλίας των αυθόρμητων εννοιών και της αυξανόμενης συνειδητοποίησης του φορμαλισμού από τον μαθητή, συμβαίνει συχνά να υπάρχουν ταυτόχρονα στο μυαλό ενός ατόμου αντιφατικές ιδέες, που οδηγούν σε μια καθολική «εικόνα έννοιας» που περιέχει πιθανούς συγκρουόμενους παράγοντες.

- Άλλες έννοιες του Απειροστικού Λογισμού, όπως η έννοια της συνέχειας, της διαφόρισης, της ολοκλήρωσης, κλπ., αν και επιφανειακά δείχνουν διαφορετικές, από γνωστική άποψη παρουσιάζουν παρόμοιες δυσκολίες.

- Λόγου χάρη, η συνέχεια πάσχει από το γεγονός ότι υφίσταται μια αυθόρμητη αντίληψη που προκαλείται από τη χρήση της καθημερινής γλώσσας σε φράσεις όπως «έβρεχε συνεχώς όλη μέρα» (δηλαδή, δεν υπήρξε διακοπή στη βροχόπτωση) ή «η σιδηροδρομική γραμμή είναι συνεχώς ενωμένη» (δεν υπάρχουν κενά στις ράγες).
-

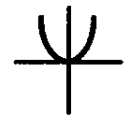
- Αυτή η άποψη ενισχύεται συχνά από τις προσπάθειες του δασκάλου να δώσει μια απλή ενόραση στην έννοια της συνέχειας λέγοντας ότι η γραφική παράσταση «είναι μονοκόμματη» ή «σχεδιάζεται χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί», συγχέοντας μ’ αυτό τον τρόπο τις μαθηματικές έννοιες της συνέχειας και της συνεκτικότητας.

- Ένα ερωτηματολόγιο που δόθηκε σε πρωτοετείς πανεπιστημιακούς φοιτητές μαθηματικών (Tall & Vinner 1981) περιελάμβανε μια ερώτηση για να διερευνηθούν οι εικόνες έννοιας των μαθητών για τη συνέχεια.

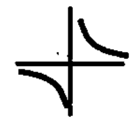
Which of the following functions are continuous?

If possible, give reasons for your answer.

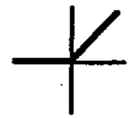
$f_1(x) = x^2$



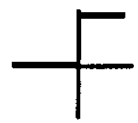
$f_2(x) = 1/x \ (x \neq 0)$



$f_3(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x & \end{cases}$



$f_4(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$



$f_5(x) = \begin{cases} 0 & \text{(rational)} \\ 1 & \text{(irrational)} \end{cases}$

Figure 16 : the concept image of continuity

N=41	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
continuous	41	6	27	1	8
discontinuous	0	35	12	38	26
no response	0	0	2	2	7

- Αν και όλες οι απαντήσεις για τη f1 είναι «σωστές», στην πλειοψηφία τους είναι «σωστές απαντήσεις για λανθασμένους λόγους», όπως η ιδέα ότι η f1 είναι συνεχής «επειδή δίνεται από έναν και μόνο τύπο».

- Η f2 είναι συνεχής, σύμφωνα με τον ε-δ ορισμό στο πεδίο ορισμού της R\{0}.
- Αλλά οι εικόνες έννοιας των μαθητών προτείνουν:

Είναι συνεχής επειδή:

- «η συνάρτηση δίνεται από ένα και μοναδικό τύπο».

Δεν είναι συνεχής επειδή

- «η γραφική παράσταση δεν είναι μονοκόμματη»,
- «η συνάρτηση δεν ορίζεται στην αρχή των αξόνων»,
- «η συνάρτηση απειρίζεται στην αρχή των αξόνων».

- Στα αρχικά στάδια της μάθησης, επομένως, βλέπουμε να προκύπτουν αυθόρμητες αντιλήψεις που έρχονται συχνά σε σύγκρουση με τον τυπικό ορισμό.

- Είναι χρήσιμο να μελετηθεί η ιστορία της έννοιας για να εντοπιστούν οι περίοδοι βραδείας εξέλιξης και οι δυσκολίες που προέκυψαν και οι οποίες μπορεί να υποδείξουν την παρουσία επιστημολογικών εμποδίων.

Στην περίπτωση της ιστορίας της έννοιας ορίου, βλέπουμε ότι αυτή η έννοια εισήχθη για να επιλύσει τρεις κύριους τύπους δυσκολιών:

- γεωμετρικά προβλήματα,
- το πρόβλημα του αθροίσματος και της σύγκλισης μιας σειράς,
- τα προβλήματα διαφόρισης, (που προέρχονται από τη σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων που τείνουν ταυτόχρονα σε μηδέν).

- Υπάρχουν τέσσερα σημαντικά επιστημολογικά εμπόδια στην ιστορία της έννοιας ορίου:

1) *Η αποτυχία σύνδεσης της γεωμετρίας με τους αριθμούς*.

- Πρέπει να αναρωτηθούμε γιατί η έννοια του ορίου δεν αποσαφηνίστηκε την περίοδο 400-300 π.Χ., όταν οι αρχαίοι Έλληνες εκδήλωσαν ενδιαφέρον για σχετικές διαδικασίες.

Το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού ενός κύκλου, λόγου χάρη, παρείχε μια ευκαιρία για την ανάπτυξη εργαλείων που μοιάζουν εξαιρετικά με την έννοια του ορίου.

- Ο Ιπποκράτης ο Χίος (430 π.Χ.) θέλησε να αποδείξει ότι ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων είναι ίσος με τον λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους.
- Ενέγραψε κανονικά πολύγωνα στους κύκλους και, αυξάνοντας συνεχώς το πλήθος των πλευρών, προσέγγισε τα εμβαδά των δύο κύκλων. Σε κάθε βήμα ο λόγος των εμβαδών των εγγεγραμμένων πολυγώνων είναι ίσος με το λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων, και από αυτό προέκυψε ότι «οριακά» αυτό θα ίσχυε επίσης για τα εμβαδά των κύκλων.

- **Αυτή η μετάβαση προς το όριο, που εξηγείται πολύ λιτά, καθορίστηκε ένα έτος αργότερα, μέσω της μεθόδου της εξάντλησης, που αποδίδεται στον Εύδοξο τον Κνίδιο (408-255 π.Χ.). Η μέθοδος βασίζεται στην αρχή του Ευδόξου (*Στοιχεία* Ευκλείδη, Βιβλίο Χ, Πρόταση Ι) που αναφέρει:**

Δοθέντων δύο άνισων μεγεθών, εάν από το μεγαλύτερο αφαιρεθεί μέρος μεγαλύτερο από το μισό του, κατόπιν από το υπόλοιπο αφαιρεθεί μέρος μεγαλύτερο από το μισό του, και η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνεχώς, τότε θα μείνει κάποια στιγμή κάποιο μέγεθος το οποίο θα είναι μικρότερο του δοθέντος μικρότερου μεγέθους.

Αυτή η αρχή μας επιτρέπει να ισχυριστούμε ότι:

για οποιοδήποτε ε>0 υπάρχει ένα κανονικό πολύγωνο που εγγράφεται σε κύκλο και του οποίου το εμβαδόν διαφέρει από το εμβαδόν του κύκλου λιγότερο από ε.

Αν ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων είναι Α1/Α2 και ο λόγος των τετραγώνων των ακτίνων είναι r1/r2, τότε έχουμε μία από τις τρεις περιπτώσεις:

Α1/Α2 > r1/r2, Α1/Α2 < r1/r2 , ή Α1/Α2= r1/r2

Αν υποθέσουμε τις δύο πρώτες με τη βοήθεια του παραπάνω ισχυρισμού οδηγούμαστε σε άτοπο.

Άρα ισχύει ο τρίτος.

Παρά το γεγονός ότι η μέθοδος της εξάντλησης φαίνεται εξαιρετικά κοντά στην έννοια του ορίου, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι Έλληνες κατείχαν τη σύγχρονη έννοια του ορίου.

Η μέθοδος της εξάντλησης είναι κατ' ουσία μια γεωμετρική μέθοδος που επιτρέπει την απόδειξη αποτελεσμάτων χωρίς να πρέπει να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα του απείρου.

Εφαρμόζεται σε γεωμετρικά μεγέθη, όχι στους αριθμούς.

Κάθε περίπτωση αντιμετωπίζεται μεμονωμένα με τη χρήση ενός συγκεκριμένου επιχειρήματος προσαρμοσμένου στο γεωμετρικό

Δεν υπάρχει καμία μεταφορά από τα γεωμετρικά σχήματα σε μια καθαρώς αριθμητική ερμηνεία, οπότε η έννοια του ορίου των αριθμών απουσιάζει.

Η γεωμετρική ερμηνεία και η επιτυχία της στην επίλυση των συναφών προβλημάτων, επομένως, φαίνεται ότι προκάλεσε ένα εμπόδιο που απέτρεψε τη μετάβαση στην έννοια του αριθμητικού ορίου.

2). Η έννοια του απείρως μεγάλου και του απείρως μικρού.

- Σε όλη την ιστορία της έννοιας του ορίου συναντάμε την υπόθεση της ύπαρξης απειροστών ποσοτήτων.
- Είναι πιθανό να έχουμε ποσότητες που να είναι τόσο μικρές ώστε να είναι σχεδόν μηδενικές, κι όμως να έχουν ένα συγκεκριμένο «προσδιορίσιμο» μέγεθος; Τι συμβαίνει τη στιγμή που μια από αυτές τις ποσότητες μηδενίζεται;

- **Τέτοια φιλοσοφικά προβλήματα έλκυσαν την προσοχή πολυάριθμων μαθηματικών που, όπως ο Newton, ο Euler, ο D’ Alembert, ο Cauchy κ.α.**

- Η ιδέα μιας ‘ενδιάμεσης κατάστασης’ μεταξύ εκείνου που είναι τίποτε και εκείνου που δεν είναι συναντάται συχνά στους σύγχρονους μαθητές.
- Θεωρούν συχνά ότι το σύμβολο ε αναπαριστά έναν αριθμό που δεν είναι μηδέν αλλά ταυτόχρονα είναι μικρότερος από οποιονδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό.

3).Η μεταφυσική άποψη της έννοιας του ορίου.

- **Η έννοια του ορίου είναι δύσκολο να εισαχθεί στα μαθηματικά επειδή φαίνεται πιο συναφής με τη μεταφυσική ή τη φιλοσοφία.**

- Οι μαθηματικοί συχνά επιφυλάσσονται να μιλήσουν για τέτοιες έννοιες, από τον καιρό των αρχαίων Ελλήνων μέχρι τον D’ Alembert που έγραψε ότι
- «κάποιος μπορεί να τα καταφέρει εύκολα στο διαφορικό λογισμό χωρίς όλα τα υπόλοιπα μεταφυσικά του άπειρου».

- Η μεταφυσική σκοπιά της έννοιας του ορίου αποτελεί ένα από τα κύρια εμπόδια για τους σημερινούς μαθητές.
- Σε μια συνέντευξη κάποιος είπε, «Δεν είναι ακριβώς μαθηματικά», επειδή τα αρχικά στάδια του απειροστικού λογισμού δε βασίζονται πλέον εντελώς στην απλή αριθμητική και την άλγεβρα.

- Οι μαθητές μπορεί να έχουν δυσκολίες στο χειρισμό της έννοιας του απείρου.
- «Δεν είναι αυστηρό, αλλά δουλεύει».
- «Δεν υπάρχει»,
- «Είναι πολύ αφηρημένο»,

- Αυτό το εμπόδιο καθιστά την κατανόηση της έννοιας του ορίου ιδιαίτερα δύσκολη, ιδιαίτερα όταν ένα όριο δεν μπορεί να υπολογιστεί άμεσα με τη χρήση γνωστών μεθόδων άλγεβρας και αριθμητικής.

4).Επιτυγχάνεται το όριο ή όχι;

- **Αυτή είναι μια αντιπαράθεση που διήρκεσε σε όλη την ιστορία της έννοιας.**
- **Λόγου χάρη, ο Robins (1697-1751) ισχυρίστηκε ότι το όριο δεν μπορεί ποτέ να επιτευχθεί, ακριβώς όπως τα κανονικά πολύγωνα που εγγράφονται στο κύκλο δε μπορούν ποτέ να είναι ίσα με αυτόν. Υποστήριξε ότι**
- **«Δίνουμε την ονομασία έσχατο μέγεθος στο όριο το οποίο μια μεταβλητή μπορεί να προσεγγίσει όσο πολύ εμείς θέλουμε, αλλά με το οποίο ποτέ δεν μπορεί να γίνει απολύτως ίση»**

- Από την άλλη πλευρά, ο Jurin (1685-1750), είπε ότι

  «ο έσχατος λόγος δύο ποσοτήτων είναι ο λόγος που επιτυγχάνεται τη στιγμή που αυτές εξουδετερώνονται»,

- Ο D’ Alambert επέμεινε ότι μια ποσότητα δεν πρέπει ποτέ να γίνει ίση με το όριό της:

  «Για να μιλήσουμε σωστά, το όριο δεν συμπίπτει ποτέ, ή δεν γίνεται ποτέ ίσο με την ποσότητα της οποίας είναι το όριο, αλλά πλησιάζει πάντα και μπορεί να διαφέρει κατά μια ποσότητα τόσο μικρή όσο κάποιος επιθυμεί».

- Υπάρχουν βεβαίως πολλά άλλα εμπόδια στην έννοια του ορίου εκτός από αυτά τα τέσσερα. Τα λάθη που διαπράττουν οι μαθητές είναι πολύτιμες ενδείξεις για τον εντοπισμό των εμποδίων. Επομένως, η κατασκευή παιδαγωγικών στρατηγικών για τη διδασκαλία των μαθητών πρέπει να λάβει υπόψη τέτοια εμπόδια.

- Το ζήτημα δεν είναι να τα αποφύγουμε αλλά, αντίθετα, να οδηγήσουμε το μαθητή να τα συναντήσει και να τα υπερπηδήσει, αντιμετωπίζοντας τα εμπόδια ως συστατικά των αναθεωρημένων μαθηματικών εννοιών που πρόκειται να αποκτηθούν.

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ
ΕΝΝΟΙΩΝ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ
ΣΤΟΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ

Η διδασκαλία των Μαθηματικών πρέπει να γίνεται προσπάθεια να ικανοποιεί, στον βαθμό που αυτό είναι δυνατόν, τις επόμενες απαιτήσεις

1. Να δείχνει στους μαθητές την εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης που οδήγησε στο αποτέλεσμα.

2. Να δίνει στους μαθητές την δυνατότητα να συμμετέχουν ενεργά σε αυτή την εξέλιξη.

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΕΝΝΟΙΩΝ

Όλα τα μαθηματικά αποτελέσματα έχουν αφετηρία τη λύση προβλημάτων.

Συνεπώς το πρώτο στάδιο της διδασκαλίας είναι ένα πρόβλημα που δεν αντιμετωπίζεται με τις υπάρχουσες γνώσεις και που η προσπάθεια για τη λύση του θα οδηγήσει στην ανάγκη εισαγωγής της νέας έννοιας.

Όταν αντιμετωπίζουμε ένα πρόβλημα σκεφτόμαστε πως θα το λύσουμε.

Το δεύτερο στάδιο της διδασκαλίας είναι η συζήτηση και ο προβληματισμός για την επίλυση του προβλήματος.

Από τη συζήτηση αυτή θα προκύψει η ανάγκη εισαγωγής της νέας έννοιας.

Στο τρίτο στάδιο αρχίζει η συζήτηση για την έννοια.

Η έννοια περιγράφεται συμβολικά, γραφικά, λεκτικά.

Στο τέταρτο στάδιο δίνονται παραδείγματα για καλύτερη κατανόηση και αποφυγή παρανοήσεων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

↓ Συζήτηση για την επίλυση του προβλήματος

ΕΝΝΟΙΑ

(Αριθμητικά, συμβολικά, γραφικά, λεκτικά)

↓

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ

- **Στο πρώτο στάδιο διατυπώνουμε ένα πρόβλημα.**

- Στο δεύτερο στάδιο συζητάμε για την λύση του προβλήματος.
- Η συζήτηση αυτή ανάγει τη λύση του προβλήματος στην απόδειξη μιας εικασίας.

- Στο τρίτο στάδιο διατυπώνεται η εικασία και δημιουργείται προβληματισμός για την ισχύ της.
- Ο προβληματισμός αυτός οδηγεί στην πεποίθηση ότι η εικασία ισχύει.

- Στο τέταρτο στάδιο διατυπώνεται και αποδεικνύεται το Θεώρημα.
- Στο πέμπτο στάδιο διαπιστώνεται, μέσω παραδειγμάτων, η αναγκαιότητα του συνόλου των υποθέσεων καθώς και η ισχύς ή όχι του αντιστρόφου.

- Στο έκτο στάδιο γίνονται ορισμένες εφαρμογές του θεωρήματος και λύνεται, αν είναι εφικτό, το αρχικό πρόβλημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

↓ Συζήτηση για την επίλυση του προβλήματος

ΕΙΚΑΣΙΑ

↓ Συζήτηση για την εικασία

ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

↓

ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

↓

ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ

↓

ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ &

ΑΛΛΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ