ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Αιτίες δημιουργίας και ανάπτυξης των Μαθηματικών

Η επίλυση προβλημάτων

Γιατί διδάσκουμε Μαθηματικά στα σχολεία

Για να είναι σε θέση ο σημερινός μαθητής και αυριανός πολίτης

- να κατανοήσει τι συμβαίνει γύρω του
- να κατανοήσει τον Φυσικό κόσμο
- να αναπτύξει μαθηματική σκέψη

Διδακτικοί στόχοι

- Ο μαθητής να κατανοεί έννοιες, μαθηματικές διαδικασίες και αρχές.

- Ο μαθητής να εκτελεί διαδικασίες με κατανόηση, ακρίβεια και ταχύτητα.

- Ο μαθητής να είναι ικανός να λύνει προβλήματα.

Διδακτικοί στόχοι

- Ο μαθητής να κατανοεί τη λογική δομή μιας απόδειξης.
- Ο μαθητής να αναπτύσσει θετική στάση για τα μαθηματικά, να του προκαλείται το ενδιαφέρον και η περιέργεια και να αναπτύσσει πρωτοβουλίες.
- Ο μαθητής να αναπτύσσει αποδοτικούς τρόπους μάθησης και επικοινωνίας στα μαθηματικά, καθώς και συνήθειες μελέτης και αναζήτησης της γνώσης για αυτόνομη πρόοδο.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

- Η μάθηση στα Μαθηματικά πρέπει να είναι εννοιολογική.

- Η μάθηση στα Μαθηματικά ακολουθεί αναπτυξιακή διαδικασία.

◆ Η οργάνωση του αναλυτικού προγράμματος πρέπει να είναι σπειροειδής.

Ο δάσκαλος πρέπει:

- να λαμβάνει υπόψη του τις προαπαιτούμενες γνώσεις κάθε έννοιας που πρόκειται να διδάξει
- να γνωρίζει τις αδυναμίες των μαθητών του
- να γνωρίζει να την ύλη όχι μόνο της τάξης του αλλά και των προηγούμενων και επομένων τάξεων

- Τα κίνητρα των μαθητών επηρεάζουν τη μαθησιακή διαδικασία.
- Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τι αναμένεται να μάθουν.
- Οι μαθητές πρέπει να έχουν την ευκαιρία για ενεργητική συμμετοχή.
- Η χρήση ποικιλίας εποπτικών μέσων συμβάλλει στη μάθηση.

◆Η διδασκαλία πρέπει να βοηθάει τους μαθητές να διατηρήσουν στη μνήμη τους τις βασικές έννοιες.

- Η διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει να αποβλέπει στην εννοιολογική κατανόηση.

- Κατά τη διάρκεια εισαγωγής μιας νέας έννοιας πρέπει να γίνεται σύντομη επανάληψη των προαπαιτούμενων γνώσεων.

- Η συχνή και διαφορετική χρήση βασικών μαθηματικών εννοιών οδηγεί στην ανάπτυξη ανώτερης μαθηματικής σκέψης.

ΓΝΩΣΤΙΚΑ ΕΜΠΟΔΙΑ

Τύποι γνωστικών εμποδίων

- Γενετικά και ψυχολογικά που είναι αποτέλεσμα της προσωπικότητας του μαθητή.
- Διδακτικά εμπόδια που είναι αποτέλεσμα του τρόπου διδασκαλίας του καθηγητή.
- Επιστημολογικά εμπόδια που οφείλονται στην ίδια τη φύση των μαθηματικών εννοιών.

Επιστημολογικά εμπόδια

Επιστημολογικό εμπόδιο εμφανίζεται όταν μια γνώση που λειτουργεί καλά για μια ορισμένη περιοχή δραστηριότητας και επομένως έχει εδραιωθεί, αποτυγχάνει να λειτουργήσει ικανοποιητικά σ’ ένα άλλο πλαίσιο και οδηγεί σε αντιφάσεις.

Χαρακτηριστικά επιστημολογικών εμποδίων

- Αποτελούν αναπόφευκτα και ουσιαστικά συστατικά της αποκτώμενης γνώσης

- Βρίσκονται, τουλάχιστον εν μέρει, στην ιστορική ανάπτυξη της έννοιας.

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΟΡΙΣΜΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εικόνα έννοιας

Εικόνα έννοιας (concept image) είναι η γνωστική δομή που έχει σχηματίσει ένα άτομο αναφορικά με την έννοια

Περιλαμβάνει νοητικές εικόνες, προτάσεις και διαδικασίες που αφορούν στην έννοιας

Για την κατανόηση μιας έννοιας είναι αναγκαία προϋπόθεση ο σχηματισμό μιας επαρκούς και συνεκτικής εικόνας της έννοιας.

Ορισμός Έννοιας

Εικόνα Έννοιας (

Παράδειγμα αρχικού σχηματισμού εικόνας έννοιας

- Ένας μαθητής μπορεί να διαθέτει μια εικόνα έννοιας για την έννοια των συστημάτων συντεταγμένων ως αποτέλεσμα της θέασης πολλών γραφικών παραστάσεων σε διάφορες καταστάσεις.

- Σύμφωνα με αυτήν την εικόνα έννοιας, οι δύο άξονες ενός συστήματος συντεταγμένων είναι μεταξύ τους κάθετοι.

Πιθανή εξέλιξη μετά τη διδασκαλία του τυπικού ορισμού

- Η εικόνα έννοιας μπορεί να μεταβληθεί ώστε να συμπεριλάβει και τα συστήματα συντεταγμένων, των οποίων οι άξονες δεν σχηματίζουν ορθή γωνία. (Αυτό αποτελεί μια ικανοποιητική ανακατασκευή.)

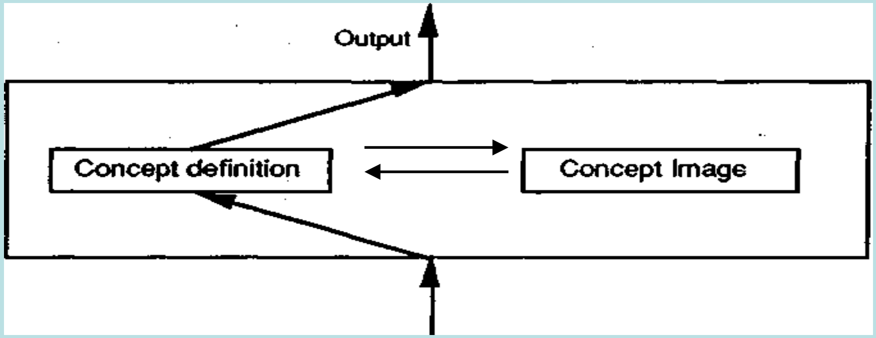
- Η εικόνα έννοιας μπορεί να παραμείνει αμετάβλητη. Το κελί του ορισμού θα περιέχει τον ορισμό του δασκάλου για λίγο αλλά αυτός ο ορισμός θα ξεχαστεί ή θα διαστρεβλωθεί μέσα σε σύντομο χρονικό διάστημα, και όταν ο μαθητής θα κληθεί να ορίσει ένα σύστημα συντεταγμένων θα αναφερθεί σε ένα, του οποίου οι άξονες σχηματίζουν μια ορθή γωνία. (Σε αυτήν την περίπτωση ο τυπικός ορισμός δεν έχει αφομοιωθεί.)

- Και τα δύο κελιά θα παραμείνουν αμετάβλητα. Τη στιγμή κατά την οποία ο μαθητής καλείται να ορίσει ένα σύστημα συντεταγμένων θα επαναλάβει τον ορισμό του δασκάλου του, αλλά σε όλες τις άλλες καταστάσεις θα σκεφτεί το σύστημα συντεταγμένων ως δύο κάθετους άξονες.

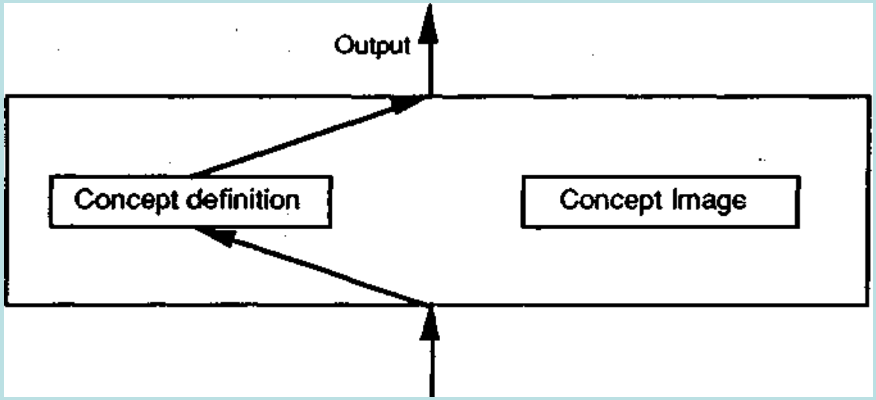
- Μια παρόμοια διαδικασία ενδέχεται να εμφανιστεί όταν μια έννοια εισάγεται αρχικά μέσω ενός ορισμού. Εδώ, το κελί της εικόνας έννοιας είναι κενό αρχικά. Μετά από πολλά παραδείγματα και επεξηγήσεις γεμίζει βαθμιαία.

Ρόλος των ορισμών κατά την επίλυση προβλήματος

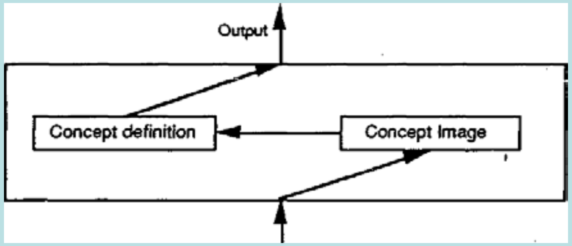
Αποδεκτές διαδικασίες



Αλληλεπίδραση μεταξύ του ορισμού και της εικόνας



Καθαρά τυπική αφαίρεση

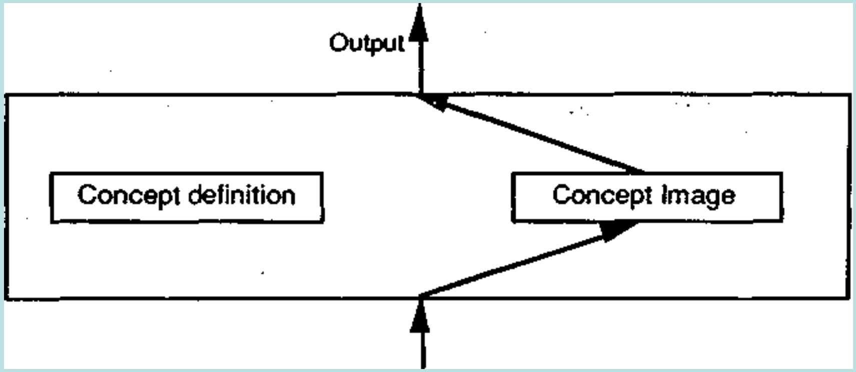


Αφαίρεση μετά από τη διαισθητική σκέψη

Κοινό στοιχείο των αποδεκτών διαδικασιών

Τελικό συμπέρασμα με βάση τον τυπικό ορισμό

Συνήθης διαδικασία

- 

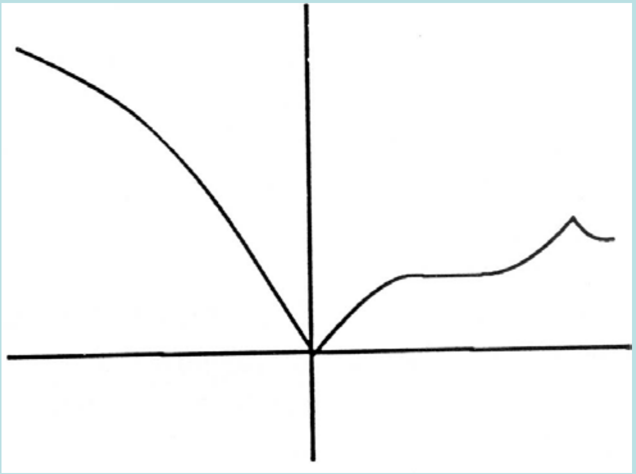
Ερευνητικά δεδομένα

Χώρα: Μεγάλη Βρετανία

Δείγμα έρευνας: 147 πρωτοετείς φοιτητές που είχαν τα μαθηματικά ως κύριο μάθημα στις δύο τελευταίες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

1. Κατά την άποψή σας τι είναι συνάρτηση;
2. Υπάρχει συνάρτηση στην οποία κάθε αριθμός διάφορος του μηδενός αντιστοιχίζεται στο τετράγωνό του και το 0 αντιστοιχίζεται στο -1;
3. Υπάρχει συνάρτηση στην οποία κάθε θετικός αριθμός αντιστοιχίζεται στο 1, κάθε αρνητικός αντιστοιχίζεται στο -1 και το 0 στο 0;
4. Προκύπτει αυτή η γραφική παράσταση από μια συνάρτηση;



Αποτελέσματα

Ερώτηση 1

- Το 57% απάντησε σωστά

•Το 14% των μαθητών είπε ότι μια συνάρτηση είναι ένας *κανόνας* αντιστοίχισης και απέρριψε τη δυνατότητα μιας αυθαίρετης συνάρτησης.

•Ένα επιπλέον 14% υποστήριξε ότι μια συνάρτηση είναι ένας αλγεβρικός τύπος, μια εξίσωση ή μια αριθμητική πράξη.

•Το υπόλοιπο δεν έδωσε καμία απάντηση ή καμία ικανοποιητική απάντηση.

Ερωτήσεις 2 και 3:

•Όσον αφορά τις εικόνες έννοιας προέκυψε ότι σε ορισμένες περιπτώσεις (στις ερωτήσεις 2 και 3) μεταξύ του ενός τρίτου και των δύο τρίτων των μαθητών θεωρούν ότι μια συνάρτηση θα πρέπει να δίνεται από έναν κανόνα ή, αν δίνονται δύο κανόνες, τότε τα πεδία ορισμού τους θα πρέπει να είναι ημιευθείες ή διαστήματα.

• Ένας κανόνας για ένα μοναδικό σημείο (όπως στην ερώτηση 2) δεν επιτρέπεται.

•Μερικοί μαθητές θεωρούν ότι οι αντιστοιχίες οι οποίες δε δίνονται από έναν αλγεβρικό κανόνα δεν είναι συναρτήσεις, εκτός αν η μαθηματική κοινότητα τις θεωρεί ως συναρτήσεις με το να τους δώσει ένα όνομα ή έναν ειδικό συμβολισμό. (Αυτό φάνηκε στις απαντήσεις της ερώτησης 3).

• Άλλοι μαθητές (περίπου τα 2/5) πιστεύουν πως η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης πρέπει να είναι κανονική, να αυξάνει μέσα σε λογικά πλαίσια κλπ... (Αυτό φάνηκε στις απαντήσεις της ερώτησης 4).

Ερώτηση 4:

- Περίπου το 60% των φοιτητών απάντησε σωστά

- Το υπόλοιπο περίπου 40% των φοιτητών πιστεύουν πως η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης πρέπει να είναι κανονική, να αυξάνει μέσα σε λογικά πλαίσια κλπ...

- Μόνο το ένα τρίτο των μαθητών που έδωσαν το σωστό ορισμό της συνάρτησης απάντησε επίσης σωστά στις ερωτήσεις 2-4.

- Κανένας μαθητής από αυτούς που έδωσαν λανθασμένο ορισμό δεν απάντησε στις ερωτήσεις 2-4 σωστά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΚΑ
ΜΕ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ
ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Από την έρευνα σχετικά με τη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού τα τελευταία είκοσι πέντε χρόνια προκύπτει ότι :

α) οι μαθητές συναντούν σημαντικά προβλήματα στην κατανόηση των εννοιών του Απειροστικού Λογισμού.

β)οι συνήθεις μέθοδοι και οι τεχνικές διδασκαλίας έχουν αποτύχει, όπως επίσης έχει αποτύχει η μονομερής επικέντρωση της ανάλυσης είτε σε αλγοριθμικούς και αλγεβρικούς υπολογισμούς, είτε σε θεωρητικά θέματα.

Επίσης από την έρευνα αυτή προκύπτουν συγκεκριμένες δυσκολίες και εμπόδια που συναντούν οι μαθητές στην προσπάθεια τους να κατανοήσουν αυτές τις έννοιες.

Η M. Artigue ταξινομεί σε τρεις μεγάλες κατηγορίες τα προβλήματα που δημιουργούνται στους μαθητές κατά τη μελέτη του Απειροστικού Λογισμού.

1. Προβλήματα που συνδέονται με ελλείψεις στην κατανόηση των βασικών αντικειμένων που διαπραγματεύεται ο Απειροστικός Λογισμός. Δηλαδή, των πραγματικών αριθμών και της έννοιας της συνάρτησης.

Τα βασικά αντικείμενα του Απειροστικού Λογισμού δεν αποτελούν καινούργια γνώση για τους μαθητές.

Έχουν συναντήσει σε προηγούμενες τάξεις τα είδη και τις διάφορες αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών καθώς και την έννοια της συνάρτησης.

Εντούτοις, η γνώση αυτών των εννοιών φαίνεται να μην έχει σταθεροποιηθεί στο μυαλό.

Η μελέτη του Απειροστικού Λογισμού πρόκειται να διαδραματίσει σημαντικό ρόλο για την ουσιαστική κατανόηση αυτών.

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μελέτες σχετικά με τις αντιλήψεις των μαθητών για τους πραγματικούς αριθμούς δείχνουν ότι αυτές οι αντιλήψεις δεν είναι επαρκείς για την Ανάλυση.

Ο διαχωρισμός μεταξύ των διαφόρων κατηγοριών των αριθμών παραμένει αρκετά συγκεχυμένος και φαίνεται να εξαρτάται από τη σημειακή αναπαράσταση τους.

Η συσχέτιση μεταξύ πραγματικών αριθμών και πραγματικής ευθείας δεν είναι πλήρης στο μυαλό των παιδιών. Ακόμα και αν οι μαθητές δέχονται ότι υπάρχει ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ του R και της πραγματικής ευθείας, εντούτοις δεν πείθονται ότι ο κάθε αριθμός έχει τη θέση του στην ευθεία.

Επιπλέον, η αυξανόμενη χρήση των υπολογιστών τσέπης τείνει να δημιουργήσει την αντίληψη ότι οι πραγματικοί αριθμοί έχουν δεκαδικές αναπαραστάσεις με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Πολλοί μαθητές για να ελέγξουν αν μία σχέση ορίζει συνάρτηση χρησιμοποιούν κριτήρια που έρχονται σε αντίθεση με τον ορισμό της έννοιας, αν και οι περισσότεροι από αυτούς είναι σε θέση να τον αναπαράγουν.

Τα κριτήρια αυτά σχηματοποιούνται από τυπικά παραδείγματα που θεωρούνται ως πρότυπα και από συσχετισμούς όπως:

Συνάρτηση - Τύπος - Καμπύλη.

Για αυτό το λόγο το ίδιο αντικείμενο μπορεί
να θεωρηθεί συνάρτηση ή όχι ανάλογα με τη
σημειακή του αναπαράσταση:
Η συνάρτηση f: x→ f(x)=2 για κάποιους
μαθητές δεν είναι συνάρτηση διότι η δοθείσα
αλγεβρική έκφραση δεν εξαρτάται από το x.
Είναι όμως συνάρτηση αν δοθεί η γραφική

Ένα άλλο σημαντικό πρόβλημα των μαθητών είναι η αδυναμία συνδυασμού των διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας συνάρτησης και η μετάβαση από μια αναπαράσταση σε άλλη.

Επίσης παρουσιάζεται αδυναμία στην θεώρηση της συνάρτησης όχι μόνο ως διαδικασία, αλλά και ως αντικείμενο.

Αυτό δημιουργεί προβλήματα όταν πρέπει π.χ. να θεωρήσει ο μαθητής σύνολα συναρτήσεων.

- 2. Προβλήματα που συνδέονται με τη διάσταση που υπάρχει μεταξύ του «αλγεβρικού» και του «αναλυτικού» τρόπου σκέψης.

Η Μαθηματική ανάλυση απαιτεί αλγεβρικές δεξιότητες και ικανότητες και ταυτόχρονα απαιτεί απομάκρυνση από τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης.

Για να διεισδύσουμε στην αναλυτική σκέψη και να είμαστε αποτελεσματικοί σε αυτήν πρέπει να αναπτύξουμε νέες τεχνικές.

Π.χ.

στην άλγεβρα για να αποδείξουμε ότι δύο ποσότητες α και β είναι ίσες μετασχηματίζουμε τη μία ή και τις δύο σχέσεις με διαδοχικές ισότητες μέχρι να καταλήξουμε σε μια προφανή ισότητα.

Άλλη διαδικασία είναι να μετασχηματίσουμε το πηλίκο (αντ. διαφορά) τους μέχρι να έχουμε αποτέλεσμα ίσο με το 1(αντ. μηδέν).

Στον Απειροστικό Λογισμό, πολλές φορές τέτοιες στρατηγικές δεν είναι εφαρμόσιμες ή η πιο σύντομες, καθώς πολλές φορές δεν γνωρίζουμε ακριβώς τα αντικείμενα.

Έτσι συχνά αποδεικνύουμε μια ισότητα χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία

$$\alpha=\beta \text{ αν και μόνον αν } |\alpha-\beta|<\varepsilon \text{ για κάθε } \varepsilon>0.$$

Δηλαδή, αποδεικνύουμε μια ισότητα μέσω ανισότητας.

Το παραπάνω οφείλεται στο γεγονός ότι στον Απειροστικό Λογισμό πολλές φορές τις ποσότητες που χρησιμοποιούμε δεν τις γνωρίζουμε ακριβώς, αλλά προσεγγιστικά. Δηλαδή, ως όρια γνωστών ποσοτήτων.

- Συνεπώς, ενώ η απόδειξη των ισοτήτων στην Άλγεβρα έχει στατικό χαρακτήρα στον Απειροστικό έχει δυναμικό.

Επίσης στον Απειροστικό αντικείμενα και γνώσεις που ήταν ήδη γνωστά πρέπει να αναπροσαρμοστούν.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η έννοια της εφαπτομένης.

Στην μέση εκπαίδευση εισάγεται ως γεωμετρική έννοια (εφαπτόμενη στον κύκλο) με τις εξής ιδιότητες:

Με τον κύκλο έχει μόνο ένα κοινό σημείο.

Είναι κάθετη στην ακτίνα του κύκλου στο σημείο επαφής.

Έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο και δεν τον «κόβει».

Έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο και ο κύκλος βρίσκεται στο ένα ημιεπίπεδο.

Αυτή η γεωμετρική οπτική αντίληψη μπορεί να επεκταθεί σε άλλες καμπύλες, όπως είναι η έλλειψη και η παραβολή.

Δεν υπάρχει όμως άμεση συσχέτιση μεταξύ αυτής της γεωμετρικής αντίληψης της έννοιας της εφαπτομένης και της αναλυτικής έννοιας που μαθαίνει ο μαθητής στον Απειροστικό Λογισμό.

Διάφορες έρευνες δείχνουν ότι το Εκπαιδευτικό σύστημα αφήνει στους μαθητές την ευθύνη να αναδιοργανώσουν μόνοι τους τις διάφορες έννοιες, κάτι που δεν μπορούν να το επιτύχουν. Έτσι, τελειώνοντας τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, η πλειοψηφία των μαθητών δεν είναι σε θέση να συνδέσει αυτές τις έννοιες.

Έρευνες επίσης έδειξαν ότι όταν η διδασκαλία αναλαμβάνει αυτή την ευθύνη τότε η αναδιοργάνωση των εννοιών επικρατεί αποτελεσματικά και σταθερά.

3. Προβλήματα που οφείλονται στη δυσκολία κατανόησης της έννοιας του ορίου.

- Η έννοια του ορίου είναι μια ιδιαίτερα δύσκολη έννοια, χαρακτηριστική του είδους σκέψης που απαιτείται στα ανώτερα μαθηματικά.
- Κατέχει κεντρική θέση που διεισδύει σε ολόκληρη τη μαθηματική ανάλυση - ως θεμέλιο της θεωρίας προσέγγισης, της συνέχειας, του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού.

- Οι διάφορες έρευνες που έχουν διεξαχθεί παρουσιάζουν σαφέστατα ότι η πλειοψηφία των μαθητών δεν κατανοεί πλήρως την έννοια του ορίου, ακόμη και σε ανώτερο στάδιο των σπουδών τους. Αυτό βέβαια δεν τους αποτρέπει από το να λύνουν ασκήσεις, να επιλύουν προβλήματα και να επιτυγχάνουν στις εξετάσεις τους.

Θα μελετήσουμε διάφορα εμπόδια που παρουσιάζονται στους μαθητές στην προσπάθεια τους να κατανοήσουν την έννοια του ορίου.

- Για τις περισσότερες μαθηματικές έννοιες, η διδασκαλία δεν ξεκινά σε παρθένο έδαφος.
- Στην περίπτωση των ορίων, πριν από οποιαδήποτε διδασκαλία γι’ αυτό το θέμα ο μαθητής έχει ήδη ορισμένες ιδέες, διαισθήσεις, εικόνες, γνώσεις, που προέρχονται από την καθημερινή εμπειρία, όπως οι κοινές σημασίες των όρων που χρησιμοποιούνται. Αυτές τις αντιλήψεις μιας έννοιας, που εμφανίζονται πριν από την τυπική διδασκαλία, ονομάζονται *αυθόρμητες αντιλήψεις* (spontaneous conceptions).

- Όταν ένας μαθητής συμμετέχει σ’ ένα μάθημα μαθηματικών, αντίθετα με αυτό που μπορεί να φαντάζονται οι περισσότεροι καθηγητές, αυτές οι ιδέες δεν εξαφανίζονται.
- Αυτές οι αυθόρμητες ιδέες αναμιγνύονται με την νεοαποκτηθείσα γνώση, τροποποιούνται και προσαρμόζονται για να σχηματίσουν τις προσωπικές αντιλήψεις των μαθητών.

- Έχει αποδειχθεί ότι προκειμένου να επιλυθεί ένα πρόβλημα, γενικά δε στηριζόμαστε μόνο στην επιστημονική θεωρία, αλλά και στο φυσιολογικό ή αυθόρμητο συλλογισμό, ο οποίος είναι θεμελιωμένος στις αυθόρμητες αυτές ιδέες.

- Στην περίπτωση της έννοιας του ορίου, παρατηρούμε ότι οι λέξεις «τείνει» και «όριο» έχουν μια σημασία για τους μαθητές πριν αρχίσουν οποιαδήποτε μαθήματα και ότι οι μαθητές συνεχίζουν να βασίζονται σ’ αυτές τις σημασίες και αφότου τους έχει δοθεί ένας τυπικός ορισμός.

Οι έρευνες έχουν αποκαλύψει πολλές διαφορετικές σημασίες για την έκφραση «τείνει προς»:

- πλησιάζει (μένοντας τελικά μακριά του) πλησιάζει ... χωρίς να το φθάνει
- πλησιάζει ... μέχρι σχεδόν να το φθάσει
- μοιάζει

- Η ίδια η λέξη όριο μπορεί να έχει διαφορετική σημασία για τους ίδιους ανθρώπους σε διαφορετικές στιγμές. Συχνότερα θεωρείται ως ένα «αξεπέραστο όριο», αλλά μπορεί επίσης να είναι:

ένα αξεπέραστο όριο το οποίο μπορούμε να φθάσουμε
ένα αξεπέραστο όριο το οποίο είναι αδύνατο να φθάσουμε
ένα σημείο το οποίο πλησιάζουμε, χωρίς να το φθάνουμε
ένα σημείο το οποίο πλησιάζουμε και το φθάνουμε
ένα άνω ή κάτω φράγμα,
ένα μέγιστο ή ένα ελάχιστο,
ένα διάστημα,
αυτό που έπεται «αμέσως μετά από» εκείνο ως το οποίο μπορούμε να φθάσουμε,
ένας περιορισμός, μια απαγόρευση, ένας κανόνας,
το τέλος, το τέρμα.

- Από τον ένα μαθητή στον άλλο η σημασία που αποδίδεται στις λέξεις ποικίλει.
- Για ένα μαθητή μια λέξη μπορεί να έχει διάφορες σημασίες, ανάλογα με τις περιστάσεις.
- Οι αυθόρμητες ιδέες παραμένουν για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα.
- Οι έρευνες δείχνουν ότι μπορούν να παραμείνουν και σε μαθητές σε πολύ πιο προχωρημένο στάδιο μάθησης.

- Η Aline Robert έχει μελετήσει τα διαφορετικά πρότυπα που οι μαθητές μπορούν να έχουν για την έννοια του ορίου μιας ακολουθίας.
- Παρά το γεγονός ότι στους μαθητές έχει δοθεί ένας τυπικός ορισμός της συγκλίνουσας ακολουθίας, όταν τους ζητείται να περιγράψουν την έννοια, ενεργούν σα να μη τους είχε δοθεί, έχουν την τάση να δημιουργούν αντιλήψεις που σχετίζονται με διάφορες πτυχές της πρότερης εμπειρίας τους.

- Μερικοί μαθητές πρότειναν πρωτογενή, στοιχειώδη μοντέλα, που θυμίζουν εκείνα που μπορεί να προκληθούν αυθόρμητα, όπως:

  σταθερή: «Οι τελικοί όροι έχουν πάντα την ίδια τιμή»,

  φράγμα: "Οι τιμές δεν μπορούν να περάσουν το *l*»

- Επιπλέον υπήρξαν μοντέλα που προέκυψαν περισσότερο από την τυπική διδασκαλία:
- *Μονοτονικά και δυναμικά-μονοτονικά*
- «μια συγκλίνουσα ακολουθία είναι μια αύξουσα ακολουθία άνω φραγμένη (ή φθίνουσα κάτω φραγμένη)»,
- «μια συγκλίνουσα ακολουθία είναι μια αύξουσα (ή φθίνουσα) ακολουθία που πλησιάζει ένα όριο».

- *Δυναμικά*:
- «η un τείνει στο *l*»
- «η un πλησιάζει το *l*»
- «η απόσταση της un από το *l* γίνεται μικρή»
- «οι τιμές πλησιάζουν έναν αριθμό όλο και περισσότερο».

- *Στατικά*:
- «τα un βρίσκονται σ’ ένα διάστημα κοντά στο *l*»
- «τα un είναι συγκεντρωμένα γύρω από το *l* »
- «Τα στοιχεία της ακολουθίας καταλήγουν να βρίσκονται σε μια γειτονιά γύρω από το *l*".
- *Μικτά*: ένα μίγμα των ανωτέρω

- Επίσης η Robert διαπίστωσε ότι αυτά τα μοντέλα επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο οι φοιτητές του πανεπιστημίου έλυναν τα προβλήματα.

- Σαφώς δεν υπάρχει μια μοναδική έννοια του ορίου στο νου των μαθητών.
- Είναι εμφανές ότι διαθέτουν ποικίλες εικόνες της έννοιας.

- Επιπλέον, είναι επίσης σαφές ότι η αρχική διδασκαλία τείνει να δίνει έμφαση στη *διαδικασία* προσέγγισης του ορίου, παρά στην ίδια την έννοια του ορίου.
- Το σύνολο των εικόνων της έννοιας που συνδέονται μ' αυτή τη διαδικασία, όπως εξηγήθηκε παραπάνω, περιέχει πολλούς παράγοντες που συγκρούονται με τον τυπικό ορισμό («πλησιάζει αλλά δε μπορεί να φθάσει», «δε μπορεί να το περάσει», κ.λπ...).
- Κατά συνέπεια οι μαθητές αναπτύσσουν εικόνες των ορίων και του απείρου που σχετίζονται με παρανοήσεις που αφορούν τη διαδικασία «της προσέγγισης» ή «της αύξησης» ή «της επ' άπειρον συνέχισης».

- Λόγω της ποικιλίας των αυθόρμητων εννοιών και της αυξανόμενης συνειδητοποίησης του φορμαλισμού από τον μαθητή, συμβαίνει συχνά να υπάρχουν ταυτόχρονα στο μυαλό ενός ατόμου αντιφατικές ιδέες, που οδηγούν σε μια καθολική «εικόνα έννοιας» που περιέχει πιθανούς συγκρουόμενους παράγοντες.

- Άλλες έννοιες του Απειροστικού Λογισμού, όπως η έννοια της συνέχειας, της διαφόρισης, της ολοκλήρωσης, κλπ., αν και επιφανειακά δείχνουν διαφορετικές, από γνωστική άποψη παρουσιάζουν παρόμοιες δυσκολίες.

- Λόγου χάρη, η συνέχεια πάσχει από το γεγονός ότι υφίσταται μια αυθόρμητη αντίληψη που προκαλείται από τη χρήση της καθημερινής γλώσσας σε φράσεις όπως «έβρεχε συνεχώς όλη μέρα» (δηλαδή, δεν υπήρξε διακοπή στη βροχόπτωση) ή «η σιδηροδρομική γραμμή είναι συνεχώς ενωμένη» (δεν υπάρχουν κενά στις ράγες).
-

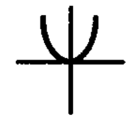
- Αυτή η άποψη ενισχύεται συχνά από τις προσπάθειες του δασκάλου να δώσει μια απλή ενόραση στην έννοια της συνέχειας λέγοντας ότι η γραφική παράσταση «είναι μονοκόμματη» ή «σχεδιάζεται χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί», συγχέοντας μ’ αυτό τον τρόπο τις μαθηματικές έννοιες της συνέχειας και της συνεκτικότητας.

- Ένα ερωτηματολόγιο που δόθηκε σε πρωτοετείς πανεπιστημιακούς φοιτητές μαθηματικών (Tall & Vinner 1981) περιελάμβανε μια ερώτηση για να διερευνηθούν οι εικόνες έννοιας των μαθητών για τη συνέχεια.

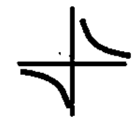
Which of the following functions are continuous?

If possible, give reasons for your answer.

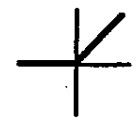
$f_1(x) = x^2$



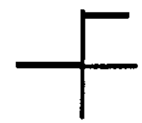
$f_2(x) = 1/x \ (x \neq 0)$



$f_3(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x & \end{cases}$



$f_4(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$



$f_5(x) = \begin{cases} 0 & (\text{rational}) \\ 1 & (\text{irrational}) \end{cases}$

Figure 16 : the concept image of continuity

N=41	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
continuous	41	6	27	1	8
discontinuous	0	35	12	38	26
no response	0	0	2	2	7

- Αν και όλες οι απαντήσεις για τη f1 είναι «σωστές», στην πλειοψηφία τους είναι «σωστές απαντήσεις για λανθασμένους λόγους», όπως η ιδέα ότι η f1 είναι συνεχής «επειδή δίνεται από έναν και μόνο τύπο».

- Η f2 είναι συνεχής, σύμφωνα με τον ε-δ ορισμό στο πεδίο ορισμού της R\{0}.
- Αλλά οι εικόνες έννοιας των μαθητών προτείνουν:

Είναι συνεχής επειδή:

- «η συνάρτηση δίνεται από ένα και μοναδικό τύπο».

Δεν είναι συνεχής επειδή

- «η γραφική παράσταση δεν είναι μονοκόμματη»,
- «η συνάρτηση δεν ορίζεται στην αρχή των αξόνων»,
- «η συνάρτηση απειρίζεται στην αρχή των αξόνων».

- Στα αρχικά στάδια της μάθησης, επομένως, βλέπουμε να προκύπτουν αυθόρμητες αντιλήψεις που έρχονται συχνά σε σύγκρουση με τον τυπικό ορισμό.

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ
ΕΝΝΟΙΩΝ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ
ΣΤΟΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ

Η διδασκαλία των Μαθηματικών πρέπει να γίνεται προσπάθεια να ικανοποιεί, στον βαθμό που αυτό είναι δυνατόν, τις επόμενες απαιτήσεις

1. Να δείχνει στους μαθητές την εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης που οδήγησε στο αποτέλεσμα.
2. Να δίνει στους μαθητές την δυνατότητα να συμμετέχουν ενεργά σε αυτή την εξέλιξη.

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΕΝΝΟΙΩΝ

Όλα τα μαθηματικά αποτελέσματα έχουν αφετηρία τη λύση προβλημάτων.

Συνεπώς το πρώτο στάδιο της διδασκαλίας είναι ένα πρόβλημα που δεν αντιμετωπίζεται με τις υπάρχουσες γνώσεις και που η προσπάθεια για τη λύση του θα οδηγήσει στην ανάγκη εισαγωγής της νέας έννοιας.

Όταν αντιμετωπίζουμε ένα πρόβλημα σκεφτόμαστε πως θα το λύσουμε.

Το δεύτερο στάδιο της διδασκαλίας είναι η συζήτηση και ο προβληματισμός για την επίλυση του προβλήματος.

Από τη συζήτηση αυτή θα προκύψει η ανάγκη εισαγωγής της νέας έννοιας.

Στο τρίτο στάδιο αρχίζει η συζήτηση για την έννοια.

Η έννοια περιγράφεται **συμβολικά, γραφικά, λεκτικά.**

Στο τέταρτο στάδιο δίνονται παραδείγματα για καλύτερη κατανόηση και αποφυγή παρανοήσεων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Συζήτηση για την επίλυση του προβλήματος

ΕΝΝΟΙΑ

(Αριθμητικά, συμβολικά, γραφικά, λεκτικά)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ

- Στο πρώτο στάδιο διατυπώνουμε ένα πρόβλημα.

- Στο δεύτερο στάδιο συζητάμε για την λύση του προβλήματος.
- Η συζήτηση αυτή ανάγει τη λύση του προβλήματος στην απόδειξη μιας εικασίας.

- Στο τρίτο στάδιο διατυπώνεται η εικασία και δημιουργείται προβληματισμός για την ισχύ της.
- Ο προβληματισμός αυτός οδηγεί στην πεποίθηση ότι η εικασία ισχύει.

- Στο τέταρτο στάδιο διατυπώνεται και αποδεικνύεται το Θεώρημα.
- Στο πέμπτο στάδιο διαπιστώνεται, μέσω παραδειγμάτων, η αναγκαιότητα του συνόλου των υποθέσεων καθώς και η ισχύς ή όχι του αντιστρόφου.

- Στο έκτο στάδιο γίνονται ορισμένες εφαρμογές του θεωρήματος και λύνεται, αν είναι εφικτό, το αρχικό πρόβλημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

↓ Συζήτηση για την επίλυση του προβλήματος

ΕΙΚΑΣΙΑ

↓ Συζήτηση για την εικασία

ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

↓

ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

↓

ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ

↓

ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ &

ΑΛΛΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ