

Αριθμοί

Γενικές Παρατηρήσεις – Συνθήκες

- Τα ερωτηματολόγια δόθηκαν σε ένα δείγμα 54 πρωτοετών φοιτητών του Τμήματος Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο Αθηνών.
- Οι φοιτητές / φοιτήτριες δεν είχαν ενημερωθεί για την εξέταση.
- Η εξέταση είχε διάρκεια μία ώρα και τρία τέταρτα και πραγματοποιήθηκε στην ώρα του μαθήματος του Απειροστικού Λογισμού.

Γενικά

- Όταν πραγματοποιήθηκε η εξέταση οι φοιτητές / φοιτήτριες είχαν παρακολουθήσει έξι δίωρα εισαγωγικά μαθήματα Απειροστικού Λογισμού.

Υποσύνολα των πραγματικών

- E2. Γράψτε ένα φυσικό αριθμό.
 - Απάντησαν όλοι σωστά
- E3. Γράψτε έναν ακέραιο αριθμό που δεν είναι φυσικός.
 - Δύο παιδιά (9%) απάντησαν λανθασμένα.
 - Οι λανθασμένες απαντήσεις ήταν το μηδέν και το 12. Το μηδέν είναι αλήθεια ότι πολλές φορές (ξεκινώντας μάλιστα από τους αρχαίους χρόνους) δε θεωρείται φυσικός αριθμός, για διάφορους λόγους, ενώ σε κάθε περίπτωση είναι ακέραιος (ως ουδέτερο της προσθετικής ομάδας). Παρόλα αυτά στο σχολείο το μηδέν το θεωρούν φυσικό αριθμό ενώ ασφαλώς δεν αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα ακεραίου που δεν είναι φυσικός.
- E4. Γράψτε ένα ρητό αριθμό που δεν είναι ακέραιος.
 - Όλοι απαντούν σωστά

Υποσύνολα των πραγματικών

- E5. Γράψτε ένα πραγματικό αριθμό που δεν είναι ρητός.
 - 7 (13%) απαντούν λανθασμένα και 1 (2%) δεν απαντά.
 - Ενδεικτικά κάποιες χαρακτηριστικές απαντήσεις είναι οι εξής: «δεν υπάρχει πραγματικός που δεν είναι ρητός, κάθε αριθμός μπορεί να γραφεί στη μορφή ρητού πχ $0 = 0/1$ ». Επίσης: $2/3$, 0.062 , 7 , 4
 - Από τις συνεντεύξεις προέκυψε και μια εσφαλμένη (που όμως συχνά απαντάται) εντύπωση σχετική με το ποιοι αριθμοί είναι ρητοί και ποιοι άρρητοί. Σημειωτέον δε το γεγονός ότι πρόκειται για φοιτητή με ιδιαίτερες ικανότητες. Αυτός υποστήριζε ότι ρητοί λέγονται οι αριθμοί που στο δεκαδικό τους ανάπτυγμα έχουν πεπερασμένο δεκαδικό μέρος, Αυτό βέβαια δικαιολογεί την απάντησή $2/3$ που έδωσε στην E5.
 - 9 παιδιά (17%) δεν απαντούν σωστά σε κάποια από τις E2 – E5!

Διάταξη

Ε6. Να συγκρίνετε τα ζεύγη των επομένων αριθμών συμπληρώνοντας κατάλληλα στο κενό κάπιο από τα σύμβολα $<$, $=$, $>$.

	Για το ζεύγος:		Σωστό	Λάθος	Δε γνωρίζω
1	-600^{37}	-600^{86}	34 (63%)	20 (37%)	0
2	0,999....	0,999	44 (81%)	9 (17%)	1 (2%)
3	1,888...	1,9	53 (98%)	1 (2%)	0
4	$0,4^5$	$0,4^7$	33 (61%)	19 (35%)	2 (4%)
5	$-0,3^{31}$	$-0,3^{56}$	38 (70%)	16 (30%)	0
6	2,999...	3	3 (6%)	51 (94%)	0

Διάταξη

- Κανένας φοιτητής δεν απαντά σε όλα τα υποερωτήματα της Ε6 σωστά.
- Σε όλα εκτός από το 6ο ερώτημα, το οποίο αποτελεί ιδιαίζον ερώτημα, απαντούν σωστά 12 φοιτητές / φοιτήτριες δηλαδή ποσοστό 22%.
- Μόνο 16 φοιτητές / φοιτήτριες δηλαδή το 30% απαντούν σωστά και στις τρεις ερωτήσεις που αφορούν στις εκθετικές συναρτήσεις.
(Συνηθισμένα λάθη: Πρόσημα, όλες οι εκθετικές είναι πάντα αύξουσες)

Πυκνότητα

- Ε7. Δίνονται τα επόμενα ζεύγη αριθμών. Εάν υπάρχει κάποιος αριθμός μεταξύ των αριθμών του ζεύγους σημειώστε τον στο κενό. Εάν δεν υπάρχει, γράψτε στο κενό: “Δεν υπάρχει”.

	Για το ζεύγος		Σωστό	Λάθος	Δε γνωρίζω
1	0,1	0,11	42 (78%)	12 (22%)	0
2	0,777...	0,7778	44 (81%)	9 (17%)	1 (2%)
3	2,999...	3	49 (91%)	3 (6%)	2 (4%)
4			46 (85%)	5 (9%)	3 (6%)

31 φοιτητές / φοιτήτριες (57%) απαντούν σε όλα τα υποερωτήματα της Ε7 σωστά.

Ο «ΕΠΟΜΕΝΟΣ»

Γνωστό επιστημολογικό εμπόδιο.

Μια γνώση που ισχύει στους φυσικούς και δίνει τα ουσιαστικότερα αποτελέσματα, δεν ισχύει στους πραγματικούς αλλά επιμένει στον τρόπο σκέψης των φοιτητών !!!

Πχ.

-Ο 3 είναι ο επόμενος του 2,999...

-Ο 5/6 είναι ο επόμενος του 4/6

- Ο 1,9 είναι ο επόμενος του 1,888...

Πυκνότητα

- Ε8. Υπάρχει ρητός που είναι μεγαλύτερος του $\frac{3}{5}$ και τέτοιος, ώστε να μην υπάρχει κανένας άλλος αριθμός ανάμεσα σ' αυτόν και τον $\frac{3}{5}$; Αν ναι, τότε γράψτε ποιος είναι. Αν δεν υπάρχει, γράψτε: "Δεν υπάρχει"

Σωστό	42	78%
Λάθος	7	13%
Δε γνωρίζω	5	9%

- Ε9. Μπορείτε να βρείτε δύο πραγματικούς αριθμούς τέτοιους, ώστε μεταξύ τους να μην υπάρχει κανένας άλλος πραγματικός αριθμός; Αν ναι, τότε γράψτε τους. Αν όχι, γράψτε: "Δεν υπάρχουν"

Σωστό	32	59%
Λάθος	22	41%
Δε γνωρίζω	0	0%

Πυκνότητα

- Οι 26 από τους 54 φοιτητές / φοιτήτριες (δηλαδή σε ποσοστό 48%) πέφτουν σε λογική αντίφαση μέσω των απαντήσεών τους ως εξής:

Απαντούν ότι $2,999... < 3$ (οπότε ο $2,999...$ και ο 3 είναι διαφορετικοί μεταξύ τους αριθμοί)

Ανάμεσά τους δεν υπάρχει κανένας πραγματικός αριθμός

Ενώ στην προηγούμενη ερώτηση απαντούν σωστά, ισχυριζόμενοι ότι τέτοιο ζεύγος αριθμών δεν υπάρχει

E10.		Σωστό	Λάθος	Δεν ξέρω
1	Ο $\sqrt{2}$ είναι πραγματικός αριθμός.	50 (93%)	4 (7,41)	0
2	Ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός αριθμός.	51 (94%)	3 (6%)	0
3	Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός.	51 (94%)	2 (4%)	1 (2%)
4	Ο $\sqrt{2}$ γράφεται σε δεκαδική μορφή με άπειρα δεκαδικά ψηφία.	47 (87%)	7 (13%)	0
5	Ο $\sqrt{2}$ γράφεται σε δεκαδική μορφή με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία.	45 (83%)	8 (15%)	1 (2%)
6	Ο $\sqrt{2}$ δε γράφεται σε δεκαδική μορφή.	50 (93%)	4 (7%)	0

Σε ολόκληρη την E10 απαντούν σωστά 39 φοιτητές / φοιτήτριες δηλαδή το 72% του δείγματος.

Ένας φοιτητής υποστηρίζει ότι: ο ρίζα 2 δεν είναι πραγματικός αριθμός, αλλά είναι ρητός και είναι άρρητος.

E11.		Σωστό	Λάθος	Δεν ξέρω
1	Ο 3,46 είναι πραγματικός αριθμός.	54 (100%)	0	0
2	Ο 3,46 είναι ρητός αριθμός.	46 (85%)	8 (15%)	0
3	Ο 3,46 είναι άρρητος αριθμός.	46 (85%)	8 (15%)	0

Στην 11 (παρόλο που δεν είναι εμφανές στην ανάλυση) υπάρχουν δυο φοιτητές / φοιτήτριες από τους οποίους ο ένας θεωρεί το 3,46 ταυτόχρονα και ρητό και άρρητο ενώ ο άλλος ούτε ρητό ούτε άρρητο.

Συνολικά δηλαδή 9 (17%) φοιτητές / φοιτήτριες απαντούν λάθος σε τουλάχιστον μια από τις E11

E12.		Σωστό	Λάθος	Δεν ξέρω
1	Ο 0,78634... είναι πραγματικός αριθμός.	53 (98%)	1 (2%)	0
2	Ο 0,78634... είναι ρητός αριθμός.	41 (76%)	13 (24%)	0
3	Ο 0,78634... είναι άρρητος αριθμός.	39 (72%)	15 (28%)	0

■ Σε ολόκληρη την E12 απαντούν σωστά 38 φοιτητές / φοιτήτριες δηλαδή το 70% του δείγματος.

E13.		Σωστό	Λάθος	Δεν ξέρω
1	Ο 0,7777... είναι πραγματικός αριθμός.	52 (96%)	2 (4%)	0
2	Ο 0,7777... είναι ρητός αριθμός.	23 (43%)	31 (57%)	0
3	Ο 0,7777... είναι άρρητος αριθμός.	23 (43%)	31 (57%)	0

Σε ολόκληρη την E13 απαντούν σωστά 20 φοιτητές / φοιτήτριες δηλαδή το 37% του δείγματος.

0,777... Είναι άρρητος

Θεωρούν ως ρητούς εκείνους των οποίων το δεκαδικό μέρος - στη δεκαδική τους αναπαράσταση - γίνεται τελικά ίσο με μηδέν. Αυτό έχει σαν συνέπεια να θεωρούν άρρητο τον αριθμό 0,777... (σε ποσοστό 57%). Παράλληλα αυτό δεν σημαίνει ότι δεν γνωρίζουν πως τα κλάσματα ακεραίων είναι ρητοί.

Αυτό φάνηκε πολύ καθαρά και από τη συνέντευξη ενός φοιτητή.

- Θεωρούσε άρρητο τον 0,777... και ρητό τον $2/3$, και γενικότερα ήταν συνεπής στην πεποίθηση ότι κάθε κλάσμα είναι ρητός αλλά κάθε δεκαδικός με άπειρα (όχι τελικά μηδέν) ψηφία είναι άρρητος.
- Στην ερώτηση πώς διέκρινε ότι ο 0,777... είναι άρρητος απαντά:
Έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία. Αν ήταν ρητός κάπου θα τελείωνε.

Του ζητείται να κάνει τη διαίρεση 2 δια 3 όπου συνειδητοποιεί πως ο $2/3$ σύμφωνα με την πεποίθησή του είναι ταυτόχρονα και ρητός και άρρητος. Παρόλη τη γνωστική σύγκρουση δεν θυμήθηκε την ορθή διάκριση ρητών-αρρήτων.

0,777... Είναι άρρητος

Πολλαπλές αναπαραστάσεις μιας έννοιας
όχι αρμονικά συνδεδεμένες μεταξύ τους.
(E15)

Πχ ρητός αριθμός:

- Κλάσμα ακεραίων
- Περιοδικό δεκαδικό ανάπτυγμα

E14.		Σωστό	Λάθος	Δεν ξέρω
1	0 είναι πραγματικός αριθμός.	51 (94%)	1 (2%)	2 (4%)
2	0 είναι ρητός αριθμός.	46 (85%)	7 (13%)	1 (2%)
3	0 είναι άρρητος αριθμός.	46 (85%)	6 (11%)	2 (4%)
4	0 γράφεται σε δεκαδική μορφή με άπειρα δεκαδικά ψηφία.	49 (91%)	4 (7%)	1 (2%)
5	0 γράφεται σε δεκαδική μορφή με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία.	48 (89%)	5 (9%)	1 (2%)
6	0 δε γράφεται σε δεκαδική μορφή.	53 (98%)	1 (2%)	0

Σε ολόκληρη την E14 απαντούν σωστά 37 φοιτητές / φοιτήτριες δηλαδή το 69% του δείγματος.

E15.		Σωστό	Λάθος	Δεν ξέρω
1	Κάθε πραγματικός αριθμός γράφεται με δεκαδική μορφή.	38 (70%)	15 (28%)	1 (2%)
2	Κάθε αριθμός που γράφεται με δεκαδική μορφή είναι πραγματικός	36 (67%)	16 (30%)	2 (4%)

- Σε ολόκληρη την E15 απαντούν σωστά 24 φοιτητές / φοιτήτριες δηλαδή το 44% του δείγματος.
- Στην ομάδα των E10 – E14 απαντούν σε όλες σωστά μόνο 6 φοιτητές / φοιτήτριες (11%)
- Ενώ στην ομάδα των E10 – E15 απαντούν σωστά μόνο 3 φοιτητές / φοιτήτριες (6%)
- Κανένας φοιτητής δεν απάντησε σωστά σε όλες τις ερωτήσεις E1 – E15 (ακόμη και εξαιρουμένων εκείνων που σχετίζονται με τα 2,999... και 3).