ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εργασία

1. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Να κατασκευάσετε ρουτίνα GECP σε Matlab, η οποία μετατρέπει τον A σε άνω τριγωνικό εφαρμόζοντας απαλοιφή Gauss με ολική οδήγηση.

2. Να κατασκευάσετε ρουτίνα Matlab η οποία ελέγχει αν ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι ολικά οδηγημένος (CP - completely pivoted).

3. α) Να εκτελεστεί η ρουτίνα GECP για ικανό αριθμό Η-ισοδυνάμων πινάκων στάθμισης $W(14, 13)$. Να καταγραφούν οι σχεδόν καλές δομές οδηγών στοιχείων (almost good pivot patterns) και οι πίνακες που τις έδωσαν.

   β) Να εντοπιστεί (με χρήση μετασχηματισμών Η-ισοδυναμίας) CP πίνακας W(14,13) με σχεδόν καλά οδηγά στοιχεία.

   γ) Να τροποποιηθεί με χρήση μετασχηματισμών Η-ισοδυναμίας ο πίνακες που βρήκατε στο β) έτσι ώστε να ληφθεί **CP πίνακας ο οποίος δε θα έχει σχεδόν καλά οδηγά στοιχεία**.

Δίνεται ο ακόλουθος πίνακας στάθμισης $W \equiv W(14, 13)$, όπου $+ \equiv 1$ και $- \equiv -1$:

$$W = \begin{bmatrix}
0 & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + \\
+ & 0 & - & - & - & + & + & - & + & - & + & - & + & + \\
+ & - & 0 & + & - & - & - & + & - & + & + & - & + & + \\
+ & - & + & 0 & + & - & + & - & - & - & + & + & - & + \\
+ & - & - & + & 0 & - & + & + & + & - & - & + & + & - \\
+ & + & - & - & - & 0 & + & + & - & + & + & + & - & - \\
+ & + & - & + & + & + & 0 & + & - & - & - & - & - & + \\
+ & - & + & - & + & + & + & 0 & - & + & - & - & + & - \\
+ & + & - & - & + & - & - & - & 0 & + & - & + & + & + \\
+ & - & + & - & - & + & - & + & + & 0 & - & + & - & + \\
+ & + & + & + & - & + & - & - & - & - & 0 & + & + & - \\
+ & - & - & + & + & + & - & - & + & + & + & 0 & - & - \\
+ & + & + & - & + & - & - & + & + & - & + & - & 0 & - \\
+ & + & + & + & - & - & + & - & + & + & - & - & - & 0
\end{bmatrix}$$

Ορισμός:

Ένας $n \times n$ πίνακας $W \equiv W(n, n-k)$ με στοιχεία $0, \pm 1$, για $k = 0, 1, 2, \ldots$, που ικανοποιεί τη σχέση

$$WW^T = W^T W = (n-k) I_n$$

καλείται **πίνακας στάθμισης τάξης** n **και βάρους** $n-k$.

Ορισμός:

Ένας πίνακας καλείται **ολικά οδηγημένος (CP - completely pivoted)** αν κατά τη διάρκεια της απαλοιφής Gauss με ολική οδήγηση δεν απαιτούνται εναλλαγές γραμμών και στηλών.

Παρατήρηση: Ισοδύναμα, για CP πίνακες οι εναλλαγές γραμμών ή/και στηλών έχουν εκτελεσθεί εκ των προτέρων έτσι ώστε κατά τη διάρκεια της απαλοιφής Gauss με ολικκή οδήγηση να μην απαιτούνται εναλλαγές γραμμών και στηλών.

Ορισμός:

Δύο πίνακες λέγονται **H-ισοδύναμοι** αν ο ένας προκύπτει από τον άλλον με μια ακολουθία μετασχηματισμών, οι οποίοι περιλαμβάνουν:

1. εναλλαγές δύο γραμμών ή/και στηλών
2. πολλαπλασιασμούς γραμμών ή/και στηλών με -1.

Ορισμός:

Μία δομή οδηγών στοιχείων $[p_1, p_2, \ldots, p_n]$ καλείται **σχεδόν καλή (almost good pivot pattern)** αν μετά από εφαρμογή απαλοιφής Gauss τα οδηγά στοιχεία ικανοποιούν

$$p_i p_{n-i+1} = n-k, \ i = 1, \ldots, n,$$

όπου n η διάσταση του τετραγωνικού και $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Παρατήρηση: Μία σχεδόν καλή δομή οδηγών στοιχείων είναι της μορφής

$$\left[p_1, p_2, \ldots, p_{\frac{n}{2}}, \frac{n-k}{p_{\frac{n}{2}}}, \ldots, \frac{n-k}{p_2}, \frac{n-k}{p_1} \right].$$