

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εργασία

1. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Να κατασκευάσετε ρουτίνα GECP σε Matlab, η οποία μετατρέπει τον A σε άνω τριγωνικό εφαρμόζοντας απαλοιφή Gauss με ολική οδήγηση.
2. Να κατασκευάσετε ρουτίνα Matlab η οποία ελέγχει αν ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι ολικά οδηγημένος (CP - completely pivoted).
3. α) Να εκτελεστεί η ρουτίνα GECP για ικανό αριθμό Η-ισοδυνάμων πινάκων στάθμησης $W(12, 11)$. Να καταγραφούν οι σχεδόν καλές δομές οδηγών στοιχείων (almost good pivot patterns) και οι πίνακες που τις έδωσαν.

β) Να εντοπιστεί (με χρήση μετασχηματισμών Η-ισοδυναμίας) CP πίνακας $W(12,11)$ με σχεδόν καλά οδηγά στοιχεία.

γ) Να τροποποιηθεί με χρήση μετασχηματισμών Η-ισοδυναμίας ο πίνακας που βρήκατε στο β) έτσι ώστε να ληφθεί **CP πίνακας ο οποίος δε θα έχει σχεδόν καλά οδηγά στοιχεία.**

Δίνεται ο ακόλουθος πίνακας στάθμησης $W \equiv W(12, 11)$, όπου $+$ \equiv 1 και $-$ \equiv -1:

$$W = \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & 0 & + & + & - & - \\ + & - & + & - & - & - & - & - & + & + & - & 0 \\ + & - & - & + & + & + & - & - & 0 & - & - & + \\ + & + & - & - & + & - & 0 & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & - & + & + & - & - & + & 0 & + \\ + & - & - & + & 0 & - & + & + & + & + & + & + \\ 0 & + & + & + & + & - & - & - & - & + & + & + \\ - & + & 0 & + & - & - & + & - & + & - & - & + \\ - & - & - & 0 & + & - & + & - & - & + & - & - \\ + & - & + & + & - & 0 & + & - & - & - & + & - \\ - & 0 & - & + & - & + & - & - & + & + & + & - \end{bmatrix}$$

Ορισμός:

Ένας $n \times n$ πίνακας $W \equiv W(n, n - k)$ με στοιχεία $0, \pm 1$, για $k = 0, 1, 2, \dots$, που ικανοποιεί τη σχέση

$$WW^T = W^TW = (n - k)I_n$$

καλείται **πίνακας στάθμισης τάξης n και βάρους $n - k$** .

Ορισμός:

Ένας πίνακας καλείται **ολικά οδηγημένος (CP - completely pivoted)** αν κατά τη διάρκεια της απαλοιφής Gauss με ολική οδήγηση δεν απαιτούνται εναλλαγές γραμμών και στηλών.

Παρατήρηση: Ισοδύναμα, για CP πίνακες οι εναλλαγές γραμμών ή/και στηλών έχουν εκτελεσθεί εκ των προτέρων έτσι ώστε κατά τη διάρκεια της απαλοιφής Gauss με ολική οδήγηση να μην απαιτούνται εναλλαγές γραμμών και στηλών.

Ορισμός:

Δύο πίνακες λέγονται **H-ισοδύναμοι** αν ο ένας προκύπτει από τον άλλον με μια ακολουθία μετασχηματισμών, οι οποίοι περιλαμβάνουν:

1. εναλλαγές δύο γραμμών ή/και στηλών
2. πολλαπλασιασμούς γραμμών ή/και στηλών με -1 .

Ορισμός:

Μία δομή οδηγών στοιχείων $[p_1, p_2, \dots, p_n]$ καλείται **σχεδόν καλή (almost good pivot pattern)** αν μετά από εφαρμογή απαλοιφής Gauss τα οδηγά στοιχεία ικανοποιούν

$$p_i p_{n-i+1} = n - k, \quad i = 1, \dots, n,$$

όπου n η διάσταση του τετραγωνικού και $k = 0, 1, 2, \dots$

Παρατήρηση: Μία σχεδόν καλή δομή οδηγών στοιχείων είναι της μορφής

$$\left[p_1, p_2, \dots, p_{\frac{n}{2}}, \frac{n-k}{p_{\frac{n}{2}}}, \dots, \frac{n-k}{p_2}, \frac{n-k}{p_1} \right].$$