ΑΓΑ:Ν 13/3/14

Πρόβλημα Ελαχίστων Τετραγώνων

$$\underset{m\times n}{A}\cdot x = \underset{\in \mathbb{R}^m}{b}$$

Δοθέντος A, b να προσδιοριστεί x: $A x = b$

π.χ. διάνυσμα μελλοντικών προβλέψεων

Ορίζουμε υπόλοιπο (residual): $r(x) = Ax - b$

Να προσδιοριστεί x $\|r(x)\|_2$ να ελαχιστοποιείται

Ονομάζεται Γραμμικό Πρόβλημα Ελαχίστων Τετραγώνων (Γ.Π.Ε.Τ)

αν $\underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times 1}{x} = \underset{m\times 1}{b} \Rightarrow A^TA\,x = A^T b$ (Σ) λύνεται

τετραγωνικός θετικά ορισμένος, συμμετρικός

Γ.Π.Ε.Τ

Θεώρημα (Ύπαρξης Λύσης)

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$

Το x είναι λύση του Γ.Π.Ε.Τ. $\Leftrightarrow$ ικανοποιεί το σύστημα (Σ) $A^TAx = A^Tb$

απόδειξη:

Εάν $r(x) = b - Ax$

Έστω τυχαίο $y \in \mathbb{R}^n$, $r(y) = b - Ay = r(x) + Ax - Ay = r(x) + A(x-y)$ ①

$\|r(y)\|_2^2 = r(y)^T r(y) = (r(x) + A(x-y))^T (r(x) + A(x-y))$

$= \|r(x)\|_2^2 + 2(x-y)^T A^T r(x) + \|A(x-y)\|_2^2$ (γιατί;) ②

(Ι) Έστω x λύση του συστήματος $A^TAx = A^Tb \Rightarrow$

$A^T(Ax - b) = 0 \Rightarrow A^T r(x) = 0$

Τότε, όμως, η ② γίνεται: $\|r(y)\|_2^2 = \|r(x)\|_2^2 + \|A(x-y)\| \geq \|r(x)\| \Rightarrow$

x λύση ελαχίστων τετραγώνων

(II) Έστω ότι το x δεν ικανοποιεί το σύστημα

$\Rightarrow A^T \underbrace{r(x)}_{z} \neq 0$

Έστω $y = x + cz$

$c \in \mathbb{R}$

$r(y) \overset{(1)}{=} r(x) + A(x-y) = r(x) + A(x - x - cz) = r(x) + A(-cz) = r(x) - cAz$

Υπολογίζετε $\|r(y)\|_2^2 = (r(x) - cAz)^T (r(x) - cAz) =$

$= \|r(x)\|_2^2 + c^2 \|Az\|_2^2 - 2c \underbrace{z^T \underbrace{A^T r(x)}_{z}}_{\|z\|_2^2}$

$\Rightarrow \|r(y)\|_2^2 = \|r(x)\|_2^2 + c^2 \|Az\|_2^2 - 2c\|z\|_2^2$

Διερεύνηση:

(I) Εάν $Az = 0 \Rightarrow \|r(y)\|_2^2 = \|r(x)\|_2^2 - 2c\|z\|_2^2 < \|r(x)\|_2^2$ για $c > 0$

(II) Εάν $Az \neq 0$

Επιλέγω κατάλληλο c: $0 < c < 2 \dfrac{\|z\|_2^2}{\|Az\|_2^2} \Rightarrow$

$\|r(y)\|_2^2 < \|r(x)\|_2^2 \Rightarrow$

το x δεν είναι λύση ελαχίστων τετραγώνων.

Θεώρημα Μοναδικότητας της λύσης

Το ΠΕΤ έχει μοναδική λύση $\Leftrightarrow rank(A) = n$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m \geq n$ full rank (εάν $rank(A) < n \Rightarrow$ rank deficient)

απόδειξη

Εάν έχω λύση $\Rightarrow$ το x λύση του $A^T A x = A^T b$ (Σ)

Πότε η λύση του (Σ) είναι μοναδική; $\Leftrightarrow rank(A) = n$

$A^T A$ θετικά ορισμένος ($\Rightarrow A^T A$ μη ιδιάζων) $\Leftrightarrow rank(A) = n$

Εάν $rank(A) = n \Rightarrow$ πάντα $Ax \neq 0$

Εάν $y = Ax \neq 0 \Rightarrow x^T A^T A x = y^T y = \|y\|_2^2 > 0 \Rightarrow A^T A$ θετικά ορισμένος

$\Rightarrow$ μη ιδιάζων $\Rightarrow$ το (Σ) έχει μοναδική λύση.

αντίστροφα

Εάν $rank(A) \neq n \Rightarrow$ για κάποιο $x \neq 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x^T A^T A x = 0 \Rightarrow A^T A$ όχι θετικά ορισμένος

ΑΓΑ-Μ 13/3/14

Το Γ.Π.Ε.Τ. έχει μοναδική λύση εάν $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$ και $\text{rank}(A) = n$.

Προσδιορισμός της λύσης

$$A^T A x = A^T b$$

Θεωρητικά: $\boxed{x = (A^T A)^{-1} A^T b}$ αναλυτική λύση

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$

$\downarrow$

ορίζεται ο γενικευμένος αντίστροφος $A^+ = \underbrace{(A^T A)^{-1} A^T}_{\text{Moore Penrose}}$

$\Rightarrow \boxed{x = A^+ b} \xleftrightarrow[\text{του}]{\text{γενίκευση}} x = A^{-1} b$

°ο Moore Penrose για μη τετραγωνικούς πίνακες °

ο $x = A^+ b$ υλοποιείται αριθμητικά;

Όχι γιατί ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι μη ευσταθής

20/3/14. Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα: Μητρούλη

Πρόβλημα Ελαχίστων Τετραγώνων

Γ.Π.Ε.Τ.

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m \geq n$

$\mathrm{rank}(A) = n$

$\exists$ μοναδική λύση που ικανοποιεί το σύστημα $A^T A x = A^T b$

Μέθοδοι Αριθμητικής Επίλυσης

① Απ' ευθείας προσδιορισμός

Σύστημα Κανονικών Εξισώσεων (Normal Equations)

$A^T A x = A^T b$

$\Downarrow$

$x = \underbrace{(A^T A)^{-1} A^T}_{A^+} b$

A^+ Moore Penrose inverse

$\hookrightarrow$ δεν ενδείκνυται για αριθμητική υλοποίηση.

1ο σημαντικό μειονέκτημα:

Για τυχαίο πίνακα A, απαιτεί υπολογισμό του $A^T A$.

Άσκηση

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-4} & 0 \\ 0 & 10^{-4} \end{bmatrix}$, mantissa $t=8$

Να εξεταστεί εάν είναι ευσταθής ο υπολογισμός $fl(A^T A)$

Θεωρητική τιμή: $A^T A = \begin{bmatrix} 1+10^{-8} & 1 \\ 1 & 1+10^{-8} \end{bmatrix}$

Λύση

Πώς υπολογίζεται το $fl(1+10^{-8})$

B1 Εκτέλεση πράξης $fl(1+10^{-8})$

$1 \longrightarrow 0.1 * 10$

$10^{-8} \longrightarrow 0.\underbrace{0000000}_{7}1 \xrightarrow[\text{εκθετών}]{\text{ευθυγράμμιση}} 0.\underbrace{00000000}_{8}1 * 10$

B2 Εκτέλεση πράξης

$0.\underbrace{10000000}_{8}1 * 10$

$fl(1+10^{-8}) = 0.1 * 10 = 1.$

$\Rightarrow fl(A^TA) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ανακριβές σε σχέση με το θεωρητικό

ο $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ είναι ιδιάζων $\Rightarrow$ δεν αντιστρέφεται άρα δημιουργείται πρόβλημα στην εύρεση του $(A^TA)^{-1}$ άρα και του x.

Επομένως, η μέθοδος των κανονικών εξισώσεων δεν ενδείκνυται για αριθμητική υλοποίηση.

Εναλλακτικά, (αν θέλω να μείνω στη μέθοδο κανονικών εξισώσεων)

$A^TA\,x = A^Tb$

$\hookrightarrow$ συμμετρικός κ̧ θετικά ορισμένος $\rightarrow$ παραγοντοποίηση Cholesky

$(R^T\underbrace{Rx}_{z} = y)$

Αλγόριθμος Επίλυσης

B1. Παραγοντοποίηση Cholesky του A^TA.

δηλαδή $A^TA = \underbrace{R^T R}_{} \sim \frac{n^3}{6}$ flops.

$\hookrightarrow$ άνω τριγωνικός

B2 Διαμόρφωση του παράγοντα $\overset{\text{matrix-vector}}{c} = A^Tb \sim \left.\begin{matrix} A_{m\times n} \\ A^T_{n\times m} \\ b_{m\times 1} \end{matrix}\right\}$ m·n flops

B3 Επίλυση των συστημάτων $\left\{\begin{matrix} R^Tz = c \text{ ως προς } z \\ Rx = y \text{ ως προς } x \end{matrix}\right\}$ $2\frac{n^2}{2} = n^2$ flops.

Προσδιορισμός Πολυπλοκότητας: όταν ζητηθεί εξηγώ πώς βγαίνουν π.χ. $\frac{n^3}{6}$.

∇ ip $\sim$ n flops (εσωτερικό γινόμενο)

matrix-vector $\sim n^2$ (πίνακας-διάνυσμα)

matrix-matrix $\sim n^3$ (πίνακας-πίνακας) ∇

Παράδειγμα:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2}$, rank(A) = 2, $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$.

Να προσδιορισθεί η λύση του Γ.Π.Ε.Τ. με μέθοδο κανονικών εξισώσεων.

ΑΓΑ.Η 20/3/14

Λύση

Εφαρμογή Αλγορίθμου

B1 $A^TA = R^TR$, $R^T = \begin{bmatrix} 3.7417 & 0 \\ 5.3452 & 0.6547 \end{bmatrix}$

B2 $c = A^Tb = \begin{bmatrix} 40 \\ 57 \end{bmatrix}$

B3 Επιλύσεις των τριγωνικών συστημάτων $z = \begin{bmatrix} 10.6904 \\ -0.2182 \end{bmatrix}$,

$$x = \begin{bmatrix} \overset{=\frac{10}{3}}{0.3333} \\ \underset{=-\frac{10}{3}}{-0.3333} \end{bmatrix}$$

Βέλτιστος Τρόπος: Προσδιορισμός λύσης με παραγοντοποίηση QR

$A_{m\times n}, m\geq n$

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση:

Να προσδιοριστεί η QR στον $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Άσκηση.

Να δοθεί ο αλγόριθμος της QR παραγοντοποίησης πίνακα $A_{m\times n}, m\geq n$, $\mathrm{rank}(A)=n$. Να εκτιμηθεί η πολυπλοκότητα)
(Για $m=n$, η πολυπλοκότητα είναι $2\frac{n^3}{3}$).

Γ.Π.Ε.Τ. με QR

Έστω $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $m\geq n$, $\mathrm{rank}(A)=n$

$$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times n}{Q}\cdot R \qquad \hookrightarrow = \begin{bmatrix} R_1 \\ --- \\ 0 \end{bmatrix}, \ R_1 : n\times n$$

$r(x) = Ax - b$

$\min \| \underset{\underset{\text{ορθογώνιος}}{\downarrow}}{\underset{Q^T R}{\overset{\shortparallel}{A}}} x - b \|_2^2$

∇ Η ευκλείδεια νόρμα είναι ορθογώνια αναλλοίωτη ∇

$\|x\|_2^2 = \|Qx\|_2^2$

$\|Ax - b\|_2^2 = \|Q^T(Ax - b)\|_2^2 = \min \| \underbrace{Q^T A}_{R} x - \underbrace{Q^T b}_{c} \|_2^2 = \min \left\| \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \right\|_2^2 =$

Το x που θα είναι λύση ελαχίστων τετραγώνων θα ικανοποιεί το σύστημα $\boxed{R_1 x = c_1}$

Το υπόλοιπο θα είναι το $\|c_2\|_2^2$

Αλγόριθμος Επίλυσης Ελαχίστων Τετραγώνων με QR

B1. Υπολόγισε την παραγοντοποίηση $\underset{m \times m}{A = Q}\underset{m \times n}{R}$

B2. Διαμόρφωσε τον παράγοντα $Q^T b = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} n \times 1 \\ (m-n) \times 1 \end{matrix}$

B3. Να επιλυθεί το άνω τριγωνικό σύστημα $R_1 x = c_1$.

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -0.2673 & 0.8724 & 0.4082 \\ -0.5345 & 0.2182 & -0.8165 \\ -0.8018 & -0.4364 & 0.4082 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} -3.7417 & -0.5432 \\ 0 & 0.6547 \\ \hline 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \equiv R_1$$

ΑΓΑ: Μ 20/3/14

Επίλυση $R_1 x = c_1 \Rightarrow x = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$\|r\|_2 = 0.8165$ (γιατί;)

~ ΤΕΛΟΣ ΥΛΗΣ ~

Θέματα Φεβρουαρίου 2013

ΘΕΜΑ 1: (35 Μονάδες)

a) Έστω $\mathcal{M}(b, t, -1, 2)$. Πόσοι κανονικοποιημένοι αριθμοί κινητής υποδιαστολής ανήκουν σ' αυτό; Είναι κλειστό ως προς την πράξη της διαίρεσης; Τεκμηριώστε πλήρως την απάντησή σας. (10 Μονάδες)

Λύση

$8(b-1)b^{t-1}+1$

Δεν είναι κλειστό αν $b=10$, $t=3$, $m=-1$, $M=2$

$a = 11.2 \rightsquigarrow 0.112 * 10^2$

$b = 1.13 \rightsquigarrow 0.113 * 10$

$c = a/b = 0.\underbrace{9911504425}_{t>3} * 10 \notin \mathcal{M}(10, 3, -1, 2)$

(10 Μονάδες) b) Έστω $b=10$, $t=6$, $x=1$, $y=0.999999$. Χρησιμοποιώντας επεξεργαστή διπλής ακρίβειας. Να αποδείξετε ότι $fl(x-y) = (x-y)(1+\delta)$, όπου το δ φράσσεται κατάλληλα. Τι παρατηρείτε για το σχετικό σφάλμα.

Λύση

B1 Ευθυγράμμιση Εκθετών (γίνεται ΜΟΝΟ σε πρόσθεση ή αφαίρεση)

$x = 0.1 * 10^1$

$y = 0.0999999 * 10^1$

B2 Εκτέλεση πράξης στον επεξεργαστή με $t=12$ (αφού διπλής ακρίβειας)

$x - y = 0.\underbrace{000000}_{6}1 * 10^1$

B3 Κανονικοποίηση και Στρογγύλευση

$fl(x-y) = 0.1 * 10^{-6} * 10^1 = 0.1 * 10^{-5} = 10^{-6}$

Rel = 0 άρα ακρίβεια

Εάν $t=3$ τότε θα έβγαινε σφάλμα

(15 Μονάδες) γ) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 15 \\ 6 & 15 & 46 \end{bmatrix}$. Να υπολογίσετε τον A^{-1}

με την καταλληλότερη αριθμητική μέθοδο. Να εκτιμηθεί η πολυπλοκότητα των απαιτούμενων πράξεων.

Λύση

με Gauss-Jordan

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 10 & -3 \\ -2 & 10 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Θεωρητικά με τον αλγόριθμο περιμένω τόσες (συνάρτηση του n), εδώ αφού $n=3$ θα είναι τόσες.

ΘΕΜΑ 2 (40 Μονάδες)

(15 Μονάδες) α) Τι ρόλο παίζει ο συντελεστής μεγέθυνσης στην ευστάθεια της μεθόδου απαλοιφής Gauss; Να υπολογίσετε τον ρ των παρακάτω πινάκων.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$ με μερική οδήγηση.

$\rho = 8$ $\qquad$ $\rho = 4$

Ερώτημα: Ποιος πίνακας Α ή Β είναι πιο ευσταθής αν εφαρμοστεί απαλοιφή Gauss με μερική οδήγηση; ο Β γιατί $\rho = 4$.

(ΠΑΝΤΑ αλγόριθμος με συντεταγμένες εκτός αν ζητηθεί άλλος)

(15 Μονάδες) β) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ με ποιον αριθμητικά ευσταθή αλγόριθμο μπορείτε να εξετάσετε εάν είναι θετικά ορισμένος;

Λύση

Ο παράγοντας Cholesky είναι

ΑΓΑ:Μ 20/3/14

$A = R^T R$

$\hookrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1/2 \\ & \sqrt{3} & \sqrt{3}/2 \\ 0 & & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ άρα είναι δεξιά ορισμένος

(10 Μονάδες) γ) Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ μη ιδιάζων, $b \in \mathbb{R}^n$ μη μηδενικό διάνυσμα. Έστω ΔA, δx οι μεταβολές στον A και x του γραμμικού συστήματος $Ax = b$. Να αποδειχθεί η ανισότητα $\frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|} \le \kappa(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$

¤ Θεώρημα Αριστερής Διαταραχής ¤

απόδειξη

$\left.\begin{array}{l} Ax = b \\ (A+\Delta A)(x+\delta x) = b \end{array}\right\} \Rightarrow \delta x = -A^{-1}\Delta A(x+\delta x) \cdot \frac{A}{A}$ και βάζω νόρμα και βγαίνει το ζητούμενο.

ΛΜ Gauss QR → ΘΕΜΑ 3 (Άλλης εξεταστικής)

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τριδιαγώνιος. Δώστε τον αλγόριθμο μετασχηματισμού του σε άνω τριγωνικό με Gauss μερικής οδήγησης. Να εκτιμηθεί η υπολογιστική πολυπλοκότητα και να γίνει εφαρμογή του για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

¤ ΛΑΘΟΣ να πάρω αμέσως τον αλγόριθμο γιατί κάνει πολλές πράξεις και μπορεί πρώτα να απλοποιηθεί ¤

Λύση

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \\ & 0 & & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ & & & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$

for $k=1,2,\dots,n-1$

B1 (μερική οδήγηση)

if $|a_{k,k}|<|a_{k+1,k}|$

Εναλλαγή γραμμών $k, k+1$

B2 $a_{k+1,k}=\dfrac{-a_{k+1,k}}{a_{k,k}}$ ~ 1 flop (ορισμός πολ/τη)

B3 (συμπλήρωση εισόδων) συμπληρώνονται μόνο 2 είσοδοι

$a_{k+1,j}=a_{k+1,j}+\underbrace{a_{k+1,k}}_{m_{k+1,k}}a_{kj},\ j=k+1,k+2$

↳ 2 flops αφού έχω δύο j

Πολυπλοκότητα: $\sum_{k=1}^{n-1}3=3n$.

Ερώτημα: Έστω A τριδιαγώνιος, να δοθεί ο άνω τριγωνικός με παραγοντοποίηση QR, να εκτιμηθεί η πολυπλοκότητα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

Νόρμες Πινάκων

Ορισμός

Έστω $\|\cdot\|$ διανυσματική. Τότε η φυσική νόρμα πίνακα που παράγεται από τη διανυσματική νόρμα είναι $\|\cdot\|:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$ τ.ώ. $\|A\|=\sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ \|x\|\le 1}}\|Ax\|$.

Ιδιότητες:

1) $\|A\|=0 \Leftrightarrow A=\mathbb{O}$, $\|A\|\ge 0$

2) $\|\lambda A\|=|\lambda|\cdot\|A\|$, $\forall \lambda\in\mathbb{R}$

3) $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$

4) $\|AB\|\le\|A\|\cdot\|B\|$

5) $\|Ax\|\le\|A\|\cdot\|x\|$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$

6) $\|I\|=1$.

SOS ① Έστω $\|\cdot\|$ μία νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και $\|\cdot\|$ είναι η επαγόμενη νόρμα στον $\mathbb{R}^{n\times n}$ που παράγεται απ' αυτήν. Αν $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ με $\|A\|<1$, νδο ο (I_n-A) είναι αντιστρέψιμος και ότι ισχύει $\dfrac{1}{1+\|A\|}\le\|(I_n-A)^{-1}\|\le\dfrac{1}{1-\|A\|}$.

Λύση

Αγγ. Μ   20/3/14

για να $\exists A^{-1}$: $Ax=b \Rightarrow \exists!$ λύση $\Leftrightarrow Ax=0 \Rightarrow x=0$ μοναδική λύση

° Για να δείξω αντιστρέψιμο δοθέντος ανισότητας με νόρμες, δημιουργώ άτοπο °

Έστω ότι ο $(I_n - A)$ δεν είναι αντιστρέψιμος

$\exists x \neq 0$ τ.ώ. $(I_n - A)x = 0 \Leftrightarrow x - Ax = 0 \Leftrightarrow x = Ax \Rightarrow$

$\|x\| = \|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\| \xrightarrow[\text{διαιρώ με } \|x\|]{x \neq 0} 1 \le \|A\|$ Άτοπο από υπόθεση

$\Rightarrow \exists (I_n - A)^{-1}$

$(I_n - A)(I_n - A)^{-1} = I_n \Rightarrow \|I_n\| = \|(I_n - A)(I_n - A)^{-1}\| \Rightarrow 1 \le \|I_n - A\| \cdot \|(I_n - A)^{-1}\| \Rightarrow$

$$1 \le (\|I_n\| + \|A\|)\|(I_n - A)^{-1}\| = (1 + \|A\|)\|(I_n - A)^{-1}\| \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1 + \|A\|} \le \|(I_n - A)^{-1}\|.$$

$(I_n - A)(I_n - A)^{-1} = I_n \Rightarrow I_n (I_n - A)^{-1} - A(I_n - A)^{-1} = I_n \Rightarrow$

$(I_n - A)^{-1} - A(I_n - A)^{-1} = I_n \Rightarrow (I_n - A)^{-1} = I_n + A(I_n - A)^{-1} \Rightarrow$

$\|(I_n - A)^{-1}\| = \|I_n + A(I_n - A)^{-1}\| \le 1 + \|A(I_n - A)^{-1}\|$

$\le 1 + \|A\| \cdot \|(I_n - A)^{-1}\| \Rightarrow$

$\|(I_n - A)^{-1}\| - \|A\| \cdot \|(I_n - A)^{-1}\| \le 1 \Rightarrow$

$\|(I_n - A)^{-1}\| (1 - \|A\|) \le 1 \xrightarrow{\|A\| < 1} \|(I_n - A)^{-1}\| \le \dfrac{1}{1 - \|A\|}$

Εφαρμογή

Δείξτε ότι ο $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 4 \end{pmatrix}$ αντιστρέφεται και ότι

$k_\infty(B) = \|B\|_\infty \cdot \|B^{-1}\|_\infty \le 3.$

Λύση

$$B = 4 \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & & 0 \\ \frac{1}{4} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \frac{1}{4} \\ 0 & & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} = 4 \left(I_n - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{1}{4} \\ 0 & & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}}_{A} \right)$$

Από προηγούμενη άσκηση $\exists (I_n - A)^{-1}$ αν $\|A\|<1$

Εδώ, $\|A\|_\infty = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2} <1 \Rightarrow \exists B^{-1}$

$\|B\|_\infty = 1+4+1=6$

από προηγ. άσκηση

$\|B^{-1}\|_\infty = \| \frac{1}{4}(I_n-A)^{-1}\|_\infty = \frac{1}{4}\|(I_n-A)^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{4}\frac{1}{1-\|A\|_\infty} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$

άρα $K_\infty(B) \leq 6\cdot\frac{1}{2} = 3 \Rightarrow K_\infty(B)\leq 3.$

② α) Οι ποσότητες $\left\{\begin{array}{l}\|A\|_{max}\\ \|A\|_E = \left(\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij})^2\right)^{1/2}\end{array}\right.$ ορίζουν φυσικές νόρμες πινάκων;

β) Νδο. $\forall x \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_E\cdot\|x\|_2$

Λύση

α) $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$, $AB=\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}$

$\|A\|_{max}=1$

$\|B\|_{max}=1$

$\|AB\|_{max}=2$

$\|AB\|_{max}\leq\|A\|_{max}\|B\|_{max}$ Άτοπο

άρα $\|\cdot\|_{max}$ όχι φυσική νόρμα.

$\|I\|_E = \left(\sum_{i,j}|I_{ij}|^2\right)^{1/2} = (1+1+\dots+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}\neq 1,\ n>1$

Άρα $\|\cdot\|_E$ όχι φυσική νόρμα

β) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}(Ax)_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)^2 \overset{C-S}{\leq} \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})^2\right)\sum_{j=1}^{n}(x_j)^2\right]$$

$$= \sum_i\sum_j(a_{ij})^2\cdot\sum_j(x_j)^2 = \|A\|_E^2\cdot\|x\|_2^2 \Rightarrow \|Ax\|_2\leq\|A\|_E\,\|x\|_2$$

③ Έστω $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, A αντιστρέψιμος

(i) Αν $\|\cdot\|$ είναι φυσική νόρμα πινάκων και $\|A-B\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, να δείξετε ότι $\exists B^{-1}$.

(ii) Αν $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ όχι αντιστρέψιμος $\Rightarrow \frac{1}{K(A)}\leq\frac{\|A-B\|}{\|A\|}$.

Λύση

(i) Έστω ότι $\nexists B^{-1}$. Τότε $\exists x\in\mathbb{R}^n$, $x\neq 0$ τ.ώ $Bx=0\Rightarrow$

$(A-B)x = Ax - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{Bx}} = Ax \Rightarrow A^{-1}(A-B)x = x\Rightarrow$

ΑΓΑ: Η 20/3/14

$\|x\| = \|A^{-1}(A-B)x\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|A-B\| \cdot \|x\| \Rightarrow \underbrace{\|A-B\| \ge \frac{1}{\|A^{-1}\|}}$ Άτοπο από υπόθεση

$\Rightarrow \exists B^{-1}$

(ii) $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \Rightarrow \frac{1}{\kappa(A)} = \frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \le \frac{\|A-B\|}{\|A\|}$

Παρατήρηση

λ ιδιοτιμή του A

$\|\ \|$ οποιαδήποτε νόρμα πίνακα $\Big\} \Rightarrow |\lambda| \le \|A\|$

απόδειξη

$Ax = \lambda x, \quad x \ne 0$

$\Rightarrow \|\lambda x\| = \|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$

$|\lambda| \cdot \|x\| \le \|A\| \cdot \|x\| \xrightarrow{x \ne 0} |\lambda| \le \|A\|$.

Εφαρμογή

Αν $\|A\| < 1 \Rightarrow I \pm A$ αντιστρέψιμος

1^{os} τρόπος: Με άτοπο: Έστω ότι $\nexists (I \pm A)^{-1}$

2^{os} τρόπος: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και την παρατήρηση $|\lambda| \le \|A\|$.

④ α) Έστω ότι $\exists A^{-1}$, άνω (ή κάτω) τριγωνικός $(n \times n)$. Να δείξετε ότι

$K_\infty(A) \ge \frac{\|A\|_\infty}{\min\limits_{1 \le i \le n} |a_{ii}|}$

β) Χωρίς να υπολογίσουμε τον A^{-1}, να δείξετε ότι για τον

$A = \begin{pmatrix} 1.01 & 0.99 \\ 0.99 & 1.01 \end{pmatrix}$ ισχύει ότι $K_\infty(A) \ge 100$.

Λύση

α) Ο A^{-1} θα είναι άνω τριγωνικός και $(A^{-1})_{ii} = \frac{1}{a_{ii}}, \ 1 \le i \le n$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$

$K_\infty(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$

Είναι $\|A^{-1}\|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |A_{ij}| = \max\limits_i \left| \frac{1}{a_{ii}} + \cdots + * \right| \ge \max\limits_i \frac{1}{|a_{ii}|} = \frac{1}{\min\limits_{1 \le i \le n} |a_{ii}|}$

β) από προηγούμενη άσκηση: $\frac{1}{\kappa(A)} \le \frac{\|A-B\|}{\|A\|}$, $\nexists B^{-1}$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 \end{pmatrix}$$

$\|A\|_\infty = 2$, $\|A-B\|_\infty = 0.02$

Άρα, $\frac{1}{\kappa_\infty(A)} \le \frac{\|A-B\|_\infty}{\|A\|_\infty} \Rightarrow \frac{1}{\kappa_\infty(A)} \le \frac{0.02}{2} = \frac{1}{100} \Rightarrow \kappa_\infty(A) \ge 100$

⑤ (i) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός. Δείξτε ότι $\|A\|_2 = \max|\lambda_i(A)|$, $\lambda_i(A)$: ιδιοτιμές του A.
(ii) Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος, συμμετρικός πίνακας, δείξτε ότι
$\kappa_2(A) = \frac{\max_i |\lambda_i(A)|}{\min_i |\lambda_i(A)|}$, $\lambda_i(A)$: ιδιοτιμές του A.

Λύση

→ Φασματική Νόρμα: $\|A\|_2 = \max_i \sqrt{\lambda_i(A^TA)}$

(i) $\|A\|_2 = \max\sqrt{\lambda_i(A^TA)} = \max_i \sqrt{\lambda_i(A^2)} = \max_i \sqrt{\lambda_i^2(A)} = \max_i |\lambda_i(A)|$

$Ax = \lambda x \Rightarrow A^2x = \lambda Ax = \lambda\lambda x = \lambda^2 x$

$A^2 \rightsquigarrow \lambda^2$

(ii) $A \rightsquigarrow \lambda$

$A^{-1} \rightsquigarrow \frac{1}{\lambda}$, $\lambda \ne 0$ γιατί A αντιστρέψιμος

$\kappa_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 \overset{(i)}{=} \max_i |\lambda_i(A)| \cdot \|A^{-1}\|_2$

$\|A^{-1}\|_2 = \max_i \sqrt{\lambda_i((A^{-1})^T(A^{-1}))} = \max_i \sqrt{\lambda_i(A^{-1})^2} = \max_i \sqrt{\frac{1}{\lambda_i^2(A)}} = \frac{1}{\min|\lambda_i(A)|}$

άρα $\kappa_2(A) = \frac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$

⑥ Έστω $0 \ne x \in \mathbb{R}^n$ ακριβής λύση του $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος και $b \in \mathbb{R}^n$. Αν $\tilde{x}$ προσέγγιση της x, $r = A\tilde{x} - b$ το υπόλοιπο της $\tilde{x}$. Να δείξετε ότι $\forall \|\cdot\| \in \mathbb{R}^n$ ισχύει: $\frac{\|\tilde{x}-x\|}{\|x\|} \le \kappa(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$

Λύση

$Ax = b \Rightarrow \|b\| \le \|A\|\cdot\|x\| \Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \le \frac{\|A\|}{\|b\|}$

$r = A\tilde{x} - b = A\tilde{x} - Ax = A(\tilde{x} - x) \Rightarrow A^{-1}r = (\tilde{x} - x) \Rightarrow \|\tilde{x} - x\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|r\|$

άρα $\frac{\|\tilde{x}-x\|}{\|x\|} \le \underbrace{\|A\|\cdot\|A^{-1}\|}_{= \kappa_2(A)} \frac{\|r\|}{\|b\|}$

ΑΓΑ: Μ 20/3/14

7) $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, αντιστρέψιμος, $b\in\mathbb{R}^n$. Οικονομικότερα να υπολογιστούν τα: $A^{-4}\cdot b$, $A^{-1}BA^{-1}b$.

Λύση

$$\left.A^{-4}b = \underbrace{A^{-1}\underbrace{A^{-1}\underbrace{A^{-1}\underbrace{A^{-1}b}_{x}}_{y}}_{z}}_{w}\right\} \text{Η παραγοντοποίηση αυτή: } \frac{n^3}{3} \text{ flops.}$$

$A^{-1}b = x \Rightarrow Ax = b \rightarrow n^2$ flops

$A^{-1}x = y \Rightarrow Ay = x \rightarrow n^2$ flops

$A^{-1}y = z \Rightarrow Az = y \rightarrow n^2$ flops

$A^{-1}z = w \Rightarrow Aw = z \rightarrow n^2$ flops.

άρα $O(\frac{n^3}{3})$ flops

$$\left.\begin{array}{l} A \rightarrow n^2 \\ b \rightarrow n \end{array}\right\} \text{θέσεις μνήμης.}$$

για το $\underbrace{A^{-1}\underbrace{B\underbrace{A^{-1}b}_{x}}_{y}}_{z}$

$x = A^{-1}b \Rightarrow Ax = b$

$Bx = y$

$A^{-1}y = z \Rightarrow Az = y$

$O(\frac{n^3}{3})$ flops.

$$\left.\begin{array}{l} A \rightarrow n^2 \\ B \rightarrow n^2 \\ b \rightarrow n \end{array}\right\} \text{θέσεις μνήμης.}$$