ΘΕΩΡΙΑ

Θεωρία Ανάλυσης Σφάλματος (Error Analysis)

Μελέτη των εμφανιζόμενων σφαλμάτων στρογγύλευσης και έλεγχός τους

↓

κατάλληλα φράγματα

⇓

ΕΥΣΤΑΘΗΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ (Stable)

Υπολογιζόμενη τιμή = μικρή διατάραξη του θεωρητικά αναμενόμενου αποτελέσματος (Backward Error Analysis)

ΑΓΑ:Μ 16/1/14

π.χ. (κλασικό)

$fl(x) = \overbrace{x(1+\varepsilon)}^{\text{διατάραξη}}, \ |\varepsilon| \leq u.$

$fl(x)$ → υπολογιζόμενη τιμή μετά από στρογγύλευση

x → θεωρητική τιμή ↳ μικρή διατάραξη

Στρογγύλευση ⇒ ευσταθής διαδικασία.

Βασικό Αξίωμα Ανάλυσης Σφάλματος

$fl(x_1 \square x_2) = (x_1 \square x_2)(1+\varepsilon), \ |\varepsilon| \leq u.$

$\square$ πράξεις $\in \{+, -, *, /\}$

Η πράξη μεταξύ δύο όρων είναι ευσταθής.

Γινόμενο n-όρων

π.χ. $fl(x_1 x_2 x_3) = fl(fl(x_1 x_2) \cdot x_3) = x_1 x_2 x_3 (1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3), \ |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3| \leq u.$

$fl(x_1 x_2) = x_1 x_2 (1+\varepsilon_2), \ |\varepsilon_2| \leq u$

$= x_1 x_2 x_3 (1+\varepsilon), \ (1-u)^2 \leq 1+\varepsilon \leq (1+u)^2$

$P_n = fl(x_1 x_2 \cdots x_n)$

Αλγόριθμος Υπολογισμού

$P_1 = x_1$

$P_r = fl(P_{r-1} x_r) = P_{r-1} x_r (1+\varepsilon_r), \ |\varepsilon_r| \leq u, \ r = 2, 3, \dots, n$

Προκύπτει το αποτέλεσμα → Propagation of error (διάδοση)

$P_n = x_1 x_2 \cdots x_n \overbrace{(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) \cdots (1+\varepsilon_n)}, \ |\varepsilon_i| \leq u, \ i = 2, 3, \dots, n$

$\prod_{i=2}^{n} (1+\varepsilon_i) = 1+\varepsilon, \ 1-u \leq 1+\varepsilon_i \leq 1+u$

Τελικά, $\underbrace{fl(x_1 x_2 \cdots x_n)}_{\text{υπολογιζόμενη τιμή}} = \underbrace{x_1 x_2 \cdots x_n}_{\text{αρχική τιμή}} \underbrace{(1+\varepsilon)}_{\text{διατάραξη}}, \ (1-u)^{n-1} \leq 1+\varepsilon \leq (1+u)^{n-1}$

Λήμμα 1:

Εάν $0 \leq u < 1$ τότε $(1-nu) \leq (1-u)^n, \ n = 1, 2, 3, \dots$

απόδειξη (ως άσκηση)

Έστω $f(u) = (1-u)^n$, Ανάπτυγμα Taylor

Λήμμα 2

Εάν $0 \le nu < 0.01$ τότε $(1+u)^n \le 1 + 1.01nu$, $n = 1, 2, \ldots$

απόδειξη (ως άσκηση)

$1 + x \le e^x$, $\forall x > 0$ και $e^x \le 1 + 1.01x$, $0 \le x < 0.01$

Από Λήμματα 1 και 2 προκύπτει ότι

$$\left.\begin{array}{l} (1-u)^n \le 1+\varepsilon \le (1+u)^n \\ \Downarrow |\varepsilon| \le nu_1, \; u_1 = 1.01u \end{array}\right\} \text{άσκηση}$$

$\downarrow$ αποδεκτές τιμές: nu, n^2u, n^3u

Γινόμενο

$fl(x_1 x_2 \cdots x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n (1+\varepsilon)$, $|\varepsilon| \le (n-1)u_1$

$\downarrow$ μικρή διαταραχή $\Rightarrow$ Ευσταθής διαδικασία

Συμπεράσματα:

1) Τα σφάλματα στο γινόμενο είναι ανεξάρτητα της σειράς εκτέλεσης των πράξεων

2) Είναι ευσταθής διαδικασία (Stable)

3) $Rel = \dfrac{|fl(x_1 \cdots x_n) - x_1 x_2 \cdots x_n|}{|x_1 x_2 \cdots x_n|} = \dfrac{|x_1 \cdots x_n \varepsilon|}{|x_1 \cdots x_n|} = |\varepsilon| \le (n-1)u_1$

$\Rightarrow Rel \le (n-1)u_1 \Rightarrow$ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

Υπολογισμός αθροίσματος n-όρων

$S_n = fl(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$

π.χ. $fl(x_1 + x_2 + x_3) = fl(\underbrace{fl(x_1+x_2)}_{(x_1+x_2)(1+\varepsilon_2)} + x_3) = ((x_1+x_2)(1+\varepsilon_2) + x_3)(1+\varepsilon_3)$, $|\varepsilon_2|, |\varepsilon_3| \le u$

$= (x_1+x_2)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) + x_3(1+\varepsilon_3) =$

$= x_1(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) + x_2(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) + x_3(1+\varepsilon_3)$

$\Rightarrow$ μικρότερο σφάλμα εάν $x_1 < x_2 < x_3$.

Αλγόριθμος

$S_1 = x_1$

$S_r = fl(S_{r-1} + x_r) = (S_{r-1} + x_r)(1+\varepsilon_r)$, $|\varepsilon_r| \le u$, $r = 2, 3, \ldots, n$

Τελικά προκύπτει:

$$S_n = x_1 \underbrace{\prod_{i=2}^{n}(1+\varepsilon_i)}_{\substack{1+n_1 \\ |n_1| \le (n-1)u_1}} + \sum_{r=2}^{n}\left\{x_r \underbrace{\prod_{i=r}^{n}(1+\varepsilon_i)}_{\substack{1+n_r \\ |n_r| \le (n-r+1)u_1}}\right\}, \; |\varepsilon_i| \le u$$

ΑΓΑ:Μ 16/1/14

$$fl(x_1+x_2+\dots+x_n)=x_1(1+n_1)+x_2(1+n_2)+\dots+x_n(1+n_n),$$
$$|n_i|\le(n-i+1)u_1,\ i=1,2,\dots,n,\ u_1=1.01u$$

$$Rel=\frac{|fl(x_1+\dots+x_n)-(x_1+\dots+x_n)|}{|x_1+\dots+x_n|}=$$

$$=\frac{|x_1n_1+x_2n_2+\dots+x_nn_n|}{|x_1+\dots+x_n|}\le nu_1\underbrace{\frac{|x_1|+\dots+|x_n|}{|x_1+\dots+x_n|}}_{\text{συνθήκη υπό έλεγχο, δείκτης κατάστασης του αθροίσματος.}}$$

Εάν $\sum_{i=1}^{n}|x_i|\gg\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|$, τότε ενδέχεται να έχουμε μεγάλο σφάλμα

Εάν τα x_i είναι ετερόσημα, ενδέχεται να εμφανιστεί σφάλμα στην πρόσθεση.

Συμπεράσματα:

1) Παίζει ρόλο η διάταξη των προσθετέων

Μικρότερο σφάλμα αν είναι διατεταγμένα σε αύξουσα σειρά.

2) Το άθροισμα ευσταθές υπό συνθήκη.

Υπολογισμός Εσωτερικού Γινομένου

ip_n = inner product = εσωτερικό γινόμενο n-διανυσμάτων

$$ip_n=fl(a_1b_1+\dots+a_nb_n),\quad a,b\in\mathbb{R}^n,\quad (a,b)=a^t b$$

πόσα ip έχει, είναι ευσταθές;

Αλγόριθμος

$$t_r=fl(a_rb_r)=a_rb_r(1+\xi_r),\quad |\xi_r|\le u$$

(error στο γινόμενο)

$$ip_1=t_1$$

$$ip_r=fl(ip_{r-1}+t_r)=(ip_{r-1}+t_r)(1+n_r),\quad |n_r|\le u$$

(σφάλμα αθροίσματος)

Τελικά προκύπτει

$$ip_n=a_1b_1(1+\varepsilon_1)+a_2b_2(1+\varepsilon_2)+\dots+a_nb_n(1+\varepsilon_n),\quad |\varepsilon_1|\le nu_1$$

$$(1+\xi_1)(1+n_2)\cdots(1+n_n)$$

Κάθε $\underset{i=2,\dots,n}{(1+\varepsilon_i)}=(1+\xi_i)(1+n_i)\cdots(1+n_n),\quad |\varepsilon_i|\le(n-i+2)u_1$

$$Rel=\frac{|fl(a_1b_1+\dots+a_nb_n)-(a_1b_1+\dots+a_nb_n)|}{|a_1b_1+\dots+a_nb_n|}=$$

$$= \frac{|a_1 b_1 \varepsilon_1 + \cdots + a_n b_n \varepsilon_n|}{|a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n|} \le (n+1)u_1 \underbrace{\frac{|a^t|\cdot|b|}{|a^t b|}}_{\text{Συνθήκη εσωτερικού γινομένου}}$$

>> εσωτερικό γινόμενο

Εάν $\frac{|a^t|\cdot|b|}{|a^t b|} >> 1$, τότε ενδέχεται να εμφανιστεί σφάλμα.

! αν έχω θετικές ποσότητες ⇒ ευστάθεια !

Συμπέρασμα:
Το εσωτερικό γινόμενο είναι υπό συνθήκη ευσταθές

Άσκηση (Παλιό θέμα)
Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Να εξετάσετε την ευστάθεια του υπολογισμού του τετραγώνου της Ευκλείδειας Νόρμας.

Σημ: $fl(\|x\|_2^2) = fl(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) = fl(x^t x)$

απάντηση
Είναι ευσταθής αφού x^t, x τα ίδια
στη νόρμα $\|x\|_2^2$

→ ευστάθεια

→ διαφορετικός αλγόριθμος για αποφυγή overflow

→ πολυπλοκότητα

Στο $fl(\sqrt{x}) = \sqrt{x}(1+\varepsilon)$, $|\varepsilon| < 1.00001u$.

Άσκηση:
$fl\left(\frac{x_1}{x_1+x_2}\right)$

Β1. $fl(x_1+x_2) = a = (x_1+x_2)(1+\varepsilon)$, $|\varepsilon| \le u_1$

Β2. $fl\left(\frac{x_1}{a}\right) = \frac{x_1}{(x_1+x_2)(1+\varepsilon)}(1+n)$, $|n| \le u_1$, $\frac{1+n}{1+\varepsilon} = (1+k)$

$$fl\left(\frac{x_1}{x_1+x_2}\right) = \frac{x_1}{x_1+x_2}(1+k),\ |k| = \left|\frac{1+n}{1+\varepsilon} - 1\right| = \left|\frac{n-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right| \le \frac{2u_1}{1-u_1}.$$

Έστω $\frac{1}{1-u} < 1.01 \Rightarrow |k| \le 1.01 \cdot 2u_1 = 2.02u_1$ (βλ. Άσκηση 4 σημερινή)

23/1/14 Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα: Μητρούλη

Θεωρία Ανάλυσης Σφάλματος

Βασική Αριθμητική Πράξεις

(Γινόμενο n-όρων → Πάντα ευσταθές

Άθροισμα n-όρων → Υπό συνθήκη ευσταθές: $\sum_{i=1}^{n}|x_i| \gg |\sum_{i=1}^{n} x_i|$

Εσωτερικό γινόμενο → Υπό συνθήκη ευσταθές: $|a^t|\cdot|b| \gg |a^t b|$, $a,b\in R^n$

Άσκηση:

$b=10$, $t=4$

Έστω $s_1 = 0.8134*10^3$

$s_2 = 0.3547*10^3$

$s_3 = -0.1168*10^4$

Να υπολογιστεί το $fl(s_1+s_2+s_3)$

Θεωρητική τιμή: $s_1+s_2+s_3 = 0.1$

Λύση

Έλεγχος συνθήκης

$$\left.\begin{array}{l}|s_1|+|s_2|+|s_3| = 0.23361*10^4 \\ |s_1+s_2+s_3| = 0.1\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Πιθανή αστάθεια της πράξης}$$

$fl(s_1+s_2+s_3) = fl(fl(s_1+s_2)+s_3)$

$fl(s_1+s_2) = 1.1681*10^3 \xrightarrow{\text{κανονικοποίηση}} 0.11681*10^4 \xrightarrow{\text{στρογγύλευση}} 0.1168*10^4$

$fl(s_1+s_2+s_3) = 0$

Καταστροφική Διαγραφή (της μονάδας) (Catastrophic Cancellation)

|| απαιτείται

Αφαίρεση "περίπου ίσων" αριθμών

(Εδώ στο $fl(s_1+s_2) = 0.1168|1$ → διαγραφή του 1)

⇓ μεγάλη απώλεια ακρίβειας.

Άσκηση

Να εκτελεστεί ο παρακάτω υπολογισμός με διπλή mantissa, $t=8$

(απαντ: βγαίνει ο ίδιος αριθμός με τον θεωρητικό με $Rel=0$)

Συμπέρασμα

Πάντα ελέγχουμε τα δεδομένα μας και προσπαθούμε να αποφεύγουμε τυχόν αφαιρέσεις περίπου ίσων όρων.

Άσκηση:

Εάν διαταχθούν τα δεδομένα (s_1, s_2, s_3) κατά αύξουσα σειρά, αλλάζει το αποτέλεσμα;
(απαντ: όχι)

Πράξεις με πίνακες:

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$fl(A) = fl(a_{ij}) = a_{ij}(1+\varepsilon_{ij})$, $|\varepsilon_{ij}| \leq u$.

$fl(a_{ij}) = a_{ij} + \underbrace{a_{ij}\varepsilon_{ij}}_{\varepsilon'_{ij}}$, $|\varepsilon_{ij}| \leq u \Rightarrow$

$fl(a_{ij}) = a_{ij} + \varepsilon'_{ij}$, $|\varepsilon'_{ij}| \leq u|a_{ij}|$ (επίπεδο συντεταγμένων)

$fl(A) = \underbrace{A+\varepsilon'}$, ε': πίνακας σφάλματος

υπολογισμένη τιμή $\hookrightarrow$ διαταραχή της αρχικής τιμής

$$\varepsilon' = \begin{bmatrix} \overset{=\varepsilon_{11}a_{11}}{\varepsilon'_{11}} & \overset{=\varepsilon_{12}a_{12}}{\varepsilon'_{12}} & \cdots & \varepsilon'_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon'_{n1} & \varepsilon'_{n2} & \cdots & \varepsilon'_{nn} \end{bmatrix}$$

άρα $\boxed{|\varepsilon'| \leq u|A|}$

$Rel \leq u \Rightarrow$ Ανάγνωση πίνακα είναι ευσταθής αλγόριθμος

Ασκήσεις:

① Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Να ελεγχθεί η ευστάθεια της πράξης $fl(\kappa A)$
(απαντ. Είναι ευσταθής)

② Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$fl(\underbrace{A+B}_{C}) = fl(C)$ ευσταθές;

$fl(c_{ij}) = fl(a_{ij} + b_{ij})$

(απαντ: είναι ευσταθές και Rel υπό συνθήκη)

$$= \frac{|A|+|B|}{|A+B|}$$

ΑΓΑ:Μ 23/1/14

Ισχύει πάντα $\|A\|_p = \| |A| \|_p$?

Επαγόμενες Νόρμες Πινάκων $\rightsquigarrow \|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|A\|}$

(Εάν $A = I \Rightarrow \|I\| = 1$)

$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (άθροισμα στηλών)

$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (άθροισμα γραμμών)

$\|A\|_2 = [\max (\text{ιδιοτιμή } A^T A)]^{\frac{1}{2}}$ (φασματική νόρμα)

Νόρμες Πίνακα:

$\|A\|_E = \|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Ευκλείδεια νόρμα, Frobenius

Ερώτημα

Η ευκλείδεια νόρμα είναι επαγόμενη; ΟΧΙ

γιατί: $\|I\|_E = \sqrt{n}$.

Η $\|A\|_p = \| |A| \|_p$ ισχύει ισότητα για επαγόμενες $1, \infty$.

Όμως $\underbrace{\|A\|_2 \neq \| |A| \|_2}$

Να αποιστούν παραδείγματα και για ποιον A ισχύει η ισότητα;

Η Ευκλείδεια $\|A\|_E = \| |A| \|_E$.

Ισχύει ότι:

- $\|A\|_2 \leq \|A\|_E \leq \sqrt{n} \cdot \|A\|_2$
- $\| |A| \|_2 \leq \| |A| \|_E = \|A\|_E \leq \sqrt{n} \cdot \|A\|_2$

+ απόδειξη

Γινόμενο Πίνακα-Διάνυσμα:

$$\underset{\in\mathbb{R}^n}{y} = \underset{\in\mathbb{R}^{n\times n}}{A}\ \underset{\in\mathbb{R}^n}{x}$$

Επίπεδο πινάκων $fl(y) = fl(Ax)$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

εσωτερικό γινόμενο

Επίπεδο συντεταγμένων $fl(y_i) = fl\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) = fl(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n)$

$fl(y_i) \xrightarrow[\text{εσωτ. γιν.}]{\text{εφαρμογή}} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + \varepsilon_i$, όπου

$|\varepsilon_i| \le u_1\left[n|a_{i1}||x_1| + n|a_{i2}||x_2| + \dots + 2|a_{in}||x_n|\right]$

$\downarrow$ Επίπεδο πινάκων

$fl(y) = Ax + \mathcal{E}$, $\mathcal{E}\in\mathbb{R}^n$ (διάνυσμα σφάλματος)

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}, \quad |\mathcal{E}| \le u_1 |D|\cdot|A|\cdot|x| \qquad D = \begin{bmatrix} n & & & & \\ & n & & O & \\ & & n-1 & & \\ & O & & \ddots & \\ & & & & 2 \end{bmatrix} \text{ (πίνακας συντελεστών)}$$

βάλε νόρμα

$$\Rightarrow \|\mathcal{E}\|_\infty \le u_1 \underbrace{\|D\|_\infty}_{n} \cdot \|A\|_\infty \|x\|_\infty \Rightarrow \boxed{\|\mathcal{E}\|_\infty \le n u_1 \|A\|_\infty \|x\|_\infty}$$

$$Rel = \frac{\|fl(Ax) - Ax\|}{\|Ax\|} \le n u_1 \underbrace{\frac{\|A\|_\infty \|x\|_\infty}{\|Ax\|_\infty}}_{\text{συνθήκη ελέγχου}}$$

Εάν $\frac{\|A\|_\infty \cdot \|x\|_\infty}{\|Ax\|_\infty} \gg 1$, τότε ενδέχεται να εμφανιστεί αστάθεια

Όταν $\mathcal{E}$ διάνυσμα $\Rightarrow \|\mathcal{E}\|_E = \|\mathcal{E}\|_2$

Εάν βάλουμε φασματική νόρμα:

$$\|\mathcal{E}\|_2 \le u_1 \underset{\le \sqrt{n}\underbrace{\|D\|_2}_{n}}{\||D|\|_2}\ \underset{\le \sqrt{n}\|A\|_2}{\||A|\|_2}\ \|x\|_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\mathcal{E}\|_2 \le n^2 u_1 \|A\|_2 \|x\|_2}$$

$$Rel \le n^2 u_1 \frac{\|A\|_2 \|x\|_2}{\|Ax\|_2}$$

Γινόμενο Πινάκων

$A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$fl(\underbrace{AB}_{C}) = fl(C)$

ΑΓΑ.Η 23/1/14

Γινόμενο $AB \rightsquigarrow O(n^3)$
$\Downarrow$
"Ακριβή" πράξη

Δείξτε ότι αποδεικνύεται ότι $fl(AB) = AB + E$

$\|E\|_\infty \le n u_1 \|A\|_\infty \|B\|_\infty$

Υπόδειξη:

$B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n]$ υπό μορφή στηλών

$AB = [Ab_1 \ Ab_2 \ \dots \ Ab_n]$

$fl(AB) = [\underbrace{fl(Ab_1)}_{c_1} \ \underbrace{fl(Ab_2)}_{c_2} \ \dots \ \underbrace{fl(Ab_n)}_{c_n}]$

για φασματική νόρμα έχω: $\|E\|_2 \le n^2 u_1 \|A\|_2 \|B\|_2$

$Rel = \dfrac{\|fl(AB) - AB\|}{\|AB\|} \le n u_1 \dfrac{\|A\|_\infty \|B\|_\infty}{\|AB\|_\infty}$ ή $\le n^2 u_1 \dfrac{\|A\|_2 \|B\|_2}{\|AB\|_2}$

$\Rightarrow$ ΕΥΣΤΑΘΕΣ υπό συνθήκη

Ερώτημα:

Υπάρχει ευσταθές γινόμενο πινάκων;

Εμφανίζεται ευστάθεια εάν υπάρξουν γινόμενα με ορθογώνιους πίνακες.

Ορισμός:

$U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογώνιος (orthogonal) εάν $\boxed{UU^T = U^T U = I}$

$\Downarrow$

1. $U^T = U^{-1}$

2. $\|U\|_2 = 1$

3. Γινόμενο ορθογωνίων = ορθογώνιος

Θεώρημα:

Εάν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογώνιοι

1. $\|PA\|_2 = \|A\|_2 \Rightarrow$ Ο A είναι ορθογώνια αναλλοίωτος

2. $\|A\|_2 = \|AQ\|_2$

3. $\|PAQ\|_2 = \|A\|_2$

απόδειξη:

1. $\|PA\|_2 = \sqrt{\text{ιδιοτιμών}\,(A^T \underbrace{P^T P}_{I} A)} = \|A\|_2$

2. $\|AQ\|_2 = \sqrt{\text{ιδιοτιμών}\,(\underbrace{Q^T}_{=Q^{-1}} A^T A Q)} = \|A\|_2$

ίδιες ιδιοτιμές με A^TA

$Q^{-1}A^TAQ \Rightarrow$ μετασχηματισμός ομοιότητας

※ Όμοιοι πίνακες $\Rightarrow$ ίδιες ιδιοτιμές ※

3. Συνδυασμός των 1, 2

$fl(AB) = AB + E$

$\|E\|_2 \le n^2 u_1 \dfrac{\|A\|_2 \|B\|_2}{\|AB\|_2}$

1. Μελέτη γινομένου ορθογωνίων πινάκων

$P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογώνιοι

$fl(PQ)$ είναι ευσταθές;

$fl(PQ) = PQ + E$

$\|E\|_2 \le n^2 u_1 \dfrac{\underbrace{\|P\|_2}_{=1} \cdot \underbrace{\|Q\|_2}_{=1}}{\underbrace{\|PQ\|_2}_{=1}} = n^2 u_1$

Συμπέρασμα

Γινόμενο ορθογωνίων πινάκων = Ευσταθής πράξη

$(Rel \le n^2 u_1)$

Γινόμενο ορθογώνιου πίνακα με $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: ευσταθής πράξη

$fl(\underbrace{PA}_{\in \mathbb{R}^{n\times n}\ \text{ορθ.}}) = PA + E$

$\|E\|_2 \le n^2 u_1 \dfrac{\overbrace{\|P\|_2}^{=1} \|A\|_2}{\|PA\|_2} = n^2 u_1 \Rightarrow Rel \le n^2 u_1$

$\underbrace{P_2(P, \underbrace{A}_{\text{ευσταθές}})}_{\text{ευσταθές}}$