Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Μαθηματικών

Ηλεκτρονική Τάξη: http://eclass.uoa.gr

Σημειώσεις Φοιτητών

Χειμερινό Εξάμηνο 2013-2014

Μάθημα:

752. Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

Διδάσκουσα: Μ. Μητρούλη

Ευχαριστούμε για τις σημειώσεις την: Maraki

19/12/13 Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα: Μητρούλη

Αριθμητικοί Μέθοδοι Επίλυσης Προβλημάτων με πίνακες.

Περιεχόμενα:

1) Βασική Αριθμητική Η/Υ ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}_u$)
2) Ανάλυση Σφάλματος (rainding errors)
   Υπολογιζόμενη τιμή πρέπει μικρή διαταραχή της θεωρητικά αναμενόμενης.
   $x \xrightarrow[\text{θεωρ.}]{H/Y} x+\varepsilon$ όπου $|\varepsilon| \leq u$ (ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ)
3) Αριθμητική επίλυση γραμμικών συστημάτων
   $\underset{n\times n}{A} x = b \ (\Sigma)$ ↓δεδομένο στον $\mathbb{R}^n$
   δεδομένα ↓
   μέθοδοι υπολογισμού x.

Ο θεωρητικός τρόπος (π.χ. υποορίζουσες, Cramer → $n!$ πράξεις → $\overset{\text{απαγορευτική}}{\text{εκτέλεση}}$) επίλυσης προβλημάτων δεν είναι πάντοτε υλοποιήσιμος σε Η/Υ.

Αριθμητικός Τρόπος

Παραγοντοποίηση Πινάκων → $A = LU$ κάτω τριγωνικός
vs
→ $A = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ορθογώνιος}}}{Q}R$ άνω τριγωνικός

4) Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων
   (με εφαρμογή της QR)
   $\underset{m\times n}{A} x = \underset{\mathbb{R}^m}{b}$
5) Αριθμητικός Υπολογισμός Ιδιοτιμών Πίνακα

"Εργασία στην LU"

Κεφάλαιο Ι

Βασική Αριθμητική Υπολογισμού

Τα δεδομένα παριστάνονται με λέξεις

$\boxed{0|1|1|1|1|\cdots|1|1|1|} = \text{word} \begin{cases} \to 16 \\ \to 32 \\ \to 64 \end{cases}$ bits

↓ bit (binary digit)

↓ σύνολο από bits πεπερασμένου μήκους

Βάση αριθμητικής $\underline{\beta=2}$

Παράσταση Πραγματικών Αριθμών ≠ Παράσταση Ακέραιων Αριθμών

↓ Υπολογισμοί Κινητής Υποδιαστολής (floating point)

↓ Υπολογισμοί Σταθερής Υποδιαστολής (fixed point)

π.χ.

11,115

$0.11115\cdot 10^5$

π.χ.

11.115 → Symbolic Computation

Παραμένω ως έχει στην αποθήκευση στη λέξη.

π.χ

$976\underbrace{000}\underbrace{000}\underbrace{000}\underbrace{000}$

σε fl point: $9.76\cdot 10^{14}$

$$\underbrace{0.\overset{\neq 0}{9}76}_{\text{κλασματικό μέρος}}\cdot \underset{\text{βάση αριθμητικής}}{10}^{15\ \to\ \text{εκθέτης}}$$

∇ Στο Symbolic Computation σε fixed point αν δω $\frac{10}{3}$ το διατηρώ έτσι και κάνω πράξεις στο τέλος ∇

Υπολογισμοί Κινητής Υποδιαστολής

(∇) Ορισμός:

Κανονικοποιημένος αριθμός κινητής υποδιαστολής:

(floating point number)

$$\boxed{x=\underset{\text{πρόσημο}\ \pm}{\sigma}\cdot\underset{\substack{\text{ψηφία}\\ \text{κλασματικού μέρους}\\ \text{(mantissa)}}}{(.a_1a_2\ldots a_t)_\beta}\cdot\beta^e}$$

Χαρακτηριστικά:

- mantissa t-ψηφίων $(a_1a_2\ldots a_t)$, $0\le a_i\le \beta-1$ με $a_1\neq 0$
- e → exponent (= εκθέτης)

$m\le e\le M$ (αν $m=-M \Rightarrow |e|\le M$)

ΑΓΑ·Μ 19/12/13

Ορισμός:

Το $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ όλων των κανονικοποιημένων αριθμών $x = \sigma \cdot \bar{x} \cdot b^{e}$ καλείται σύστημα κινητής υποδιαστολής και συμβολίζεται $\mathcal{M}(b, t, m, M)$ και αποτελεί το σύνολο των αριθμών μηχανής.

Χαρακτηριστικά $\mathcal{M}(b, t, m, M)$

· ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ

$2 \cdot (b-1) b^{t-1} (M-m+1)+1 =$ το πλήθος των διαθέσιμων αριθμών μηχανής

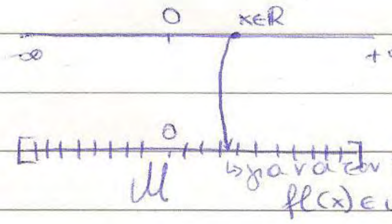
$b-1$: επιλογή του a_1

b^{t-1}: επιλογή υπόλοιπων

$M-m+1$: όλοι οι δυνατοί εκθέτες

2: θετικοί ή αρνητικοί αριθμοί

$+1$: $0 \in \mathcal{M}$



ψάχνω τον δεκτώ πρέπει προσεγγιστικά $fl(x) \in \mathcal{M}$.

· Ιδιότητες Πράξεων:

- Ισχύει η αντιμεταθετικότητα

Εάν $a, b \in \mathcal{M}$

$a+b = b+a$

$ab = ba$

- ΔΕΝ ισχύει η προσεταιριστική ή επιμεριστική ιδιότητα

Εάν $a, b, c \in \mathcal{M}$

$$\text{Ενδέχεται} \quad \left.\begin{aligned} a+(b+c) &\neq (a+b)+c \\ a(b+c) &\neq ab+ac \end{aligned}\right\} \text{Άσκηση}$$

· $\mathcal{M}$ <u>όχι</u> κλειστό ως προς τις αριθμητικές πράξεις

π.χ.

$\mathcal{M}(10, 3, -1, 2)$ και δίνονται $a = 11.2$, $b = 1.13 \in \mathbb{R}$

Να παρασταθούν τα a, b στο $\mathcal{M}$ και να ελεγχθεί αν $ab \in \mathcal{M}$

$11.2 \rightarrow 0.112 \cdot 10^{2} \in \mathcal{M}$

$1.13 \rightarrow 0.113 \cdot 10^1 \in \mathcal{M}$

$c = a \cdot b = 0.12656 \cdot 10^2 \notin \mathcal{M}$
γιατί $t=5$

Λόγω $\mathcal{M}$

t-ψηφίων αριθμητική κινητής υποδιαστολής

Αποθήκευση floating point αριθμού

απλή ακρίβεια (single precision) (1 word)

διπλή ακρίβεια (double precision) (2 words)

IEEE Αριθμητική

Single

word 32 bits

$b=2$

πρόσημο ⇝ 1 bit

εκθέτης ⇝ 8 bits

mantissa ⇝ 23 bits

Single Format

1 bit	8 bits	23 bits
πρόσημο	biased exponent	mantissa

$x = 6 \cdot (.a_1 a_2 \dots a_{23})_2 \cdot 2^e$

$|e| \leq (11111111)_2 = 2^8 - 1 = 255$

εύρος εκθέτη 0-255 αφαιρώ bias=128

παίρνω εύρος εκθέτη $-\overset{\overset{\shortparallel}{m}}{128} - \overset{\overset{\shortparallel}{M}}{127}$

Μέγιστος Αριθμός Μηχανής

$$(.\underbrace{111\dots11}_{23\ \text{ψηφία}})_2 \cdot 2^{127} = (1-2^{-24}) \cdot 2^{127} \approx 10^{38}$$

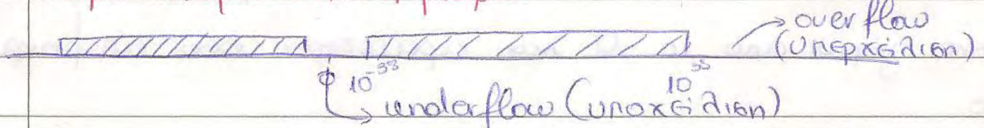
▽ Μεγαλύτερη mantissa ⇝ όλα τα ψηφία 1 ▽

Μικρότερος Αριθμός Μηχανής

$(.100\dots00)_2 \cdot 2^{-128} \approx 10^{-38}$

ΑΓΑ: Μ 19/12/13

Εύρος Παράστασης Αριθμών



Προσοχή στην εμφάνιση underflow κ overflow

Άσκηση:

Να βρεθεί το εύρος παράστασης στο double format IEEE αριθμητικής

word → 64 bits

πρόσημο → 1 bit

biased exp → 11 bits
$\| 1023$

mantissa → 52 bits

Απάντηση 10^{-308} έως 10^{308}

Περιορισμός της ευθείας των αριθμών μηχανής

$M \Rightarrow x = \sigma \cdot \bar{x} \cdot \beta^{e}$

$|e| \le M$

$$\underbrace{(.10\ldots00)_\beta}_{t\text{-ψηφία}} \le \bar{x} \le (.\overbrace{(\beta-1)(\beta-1)\cdots(\beta-1)}^{t\text{-ψηφία}})_\beta$$

$$\| \quad \frac{1}{\beta} \qquad\qquad \| \quad (\beta-1)\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}+\cdots+\frac{1}{\beta^t}\right)=1-\beta^{t}$$

$$\overset{\nabla}{\circ}\ (.a_1a_2\ldots a_t)_\beta \sim \sum_{k=1}^{t} a_k\beta^{-k}\ \overset{\nabla}{\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta} \le \bar{x} \le 1-\beta^{-t} \xrightarrow[\beta^e]{\text{πολ/ζω}} \beta^{e-1} \le \bar{x}\beta^{e} \le \beta^{e}-\beta^{e-t} < \beta^{e}$$

$\Rightarrow \boxed{\beta^{e-1} \le |x| < \beta^{e}}$, $x \in [\beta^{e-1}, \beta^{e})$ ο θετικός

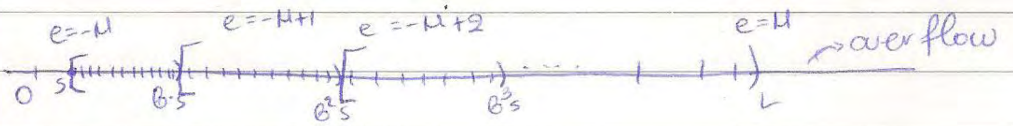
$x \in (-\beta^{e}, -\beta^{e-1}]$ ο αρνητικός

$\forall e = -M, -M+1, \ldots, M-1, M$ υπάρχουν $(\beta-1)\beta^{t-1}$ mantissa

$\Rightarrow$ Στο διάστημα $[\beta^{e-1}, \beta^{e})$ κατανέμονται $(\beta-1)\beta^{t-1}$ αριθμοί x

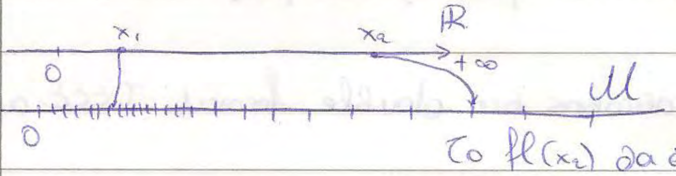
βήμα κατανομής: $\dfrac{\beta^{e}-\beta^{e-1}}{\beta^{t-1}(\beta-1)} = \beta^{e-t}$

Ευθεία Αριθμών Μηχανής



Θέτω $\beta^{-\mu-1} = s$

πιο πυκνοί γύρω από το 0 και αραιότεροι όσο απομακρυνόμαστε απ' αυτό



Το $fl(x_2)$ θα είναι μακριά από το x_2

$|fl(x_1) - x_1|$ μικρή

$|fl(x_2) - x_2|$ μεγάλο σφάλμα

Το x_1 θα πέφτει αρκετά
κοντά σε αριθμό μηχανής
⇓
καλή προσέγγιση

Άσκηση:

Να γίνει η ευθεία των αρνητικών αριθμών μηχανής

mantissa t-ψηφίων vs exponent

↓ πιο πυκνοί οι παραστήσιμοι αριθμοί

↓ αυξάνω το εύρος αναπαράστασης

9/1/14 Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα: Μητράλη

Πέμπτη 23/1 : Εργαστήριο

Βασική Αριθμητική Η/Υ

$x \in \mathbb{R} \longrightarrow fl(x) \in \mathcal{M}$

Βασικό χαρακτηριστικό του $\mathcal{M}$

Υπάρχουν περιοχές στις οποίες δεν περιέχονται παραστάσιμοι αριθμοί

$\Downarrow$

Να κρατάμε τα δεδομένα φραγμένα.

Παράδειγμα:

Να υπολογιστεί η Ευκλείδεια Νόρμα Διανύσματος $x \in \mathbb{R}^n$.

Ποιος είναι ο βέλτιστος τρόπος υπολογισμού της;

$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

Λύση

$\downarrow$

Αλγόριθμος 1: θεωρητική formula

Εάν υποθέσαμε ότι δουλεύαμε σε IEEE single και έστω

$x = (10^{30}, 10^{20}, 10^{10}) \in \mathbb{R}^3$

$\Downarrow$

x_1^2: overflow

Αλγόριθμος 2:

Έστω $m = max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$

$y_i = \frac{x_i}{m}, i = 1, 2, \dots, n$

$\|x\|_2 = m\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$

$\downarrow$

IEEE simple

$\|x\|_2 = 10^{30}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10^2}\right)^2}$

Συμπέρασμα: Ασφαλής η διαδικασία εάν έχουμε δεδομένα ≤ 1.

Σφάλματα:

→ Απόλυτο Σφάλμα (absolute error): $abs = |x - fl(x)|$

→ Σχετικό Σφάλμα (relative error): $Rel = \frac{|x - fl(x)|}{|x|}$ πρέπει πολύ μικρό

$$Rel = \frac{|\text{θεωρητική τιμή} - \text{υπολογισμένη τιμή}|}{|\text{θεωρητική τιμή}|}$$

Παράδειγμα:

$x_1 = 1.31$, $\hat{x}_1 = 1.30$

$x_2 = 0.12$, $\hat{x}_2 = 0.11$

Ποια προσέγγιση είναι η καλύτερη;

α) Το $\hat{x}_1$ του x_1 ή β) Το $\hat{x}_2$ του x_2

Λύση

$|\hat{x}_1 - x_1| = |\hat{x}_2 - x_2| = 0.01 \approx 10^{-2}$

$$Rel\, x_1 = \frac{|\hat{x}_1 - x_1|}{|x_1|} = 0.0076$$

$$Rel\, x_2 = \frac{|\hat{x}_2 - x_2|}{|x_2|} = 0.0833$$

Άρα το α) η καλύτερη προσέγγιση.

(*) Θεώρημα: Σχετικό Σφάλμα στην αναπαράσταση $fl(x)$

Έστω $fl(x)$ η floating point αναπαράσταση ενός $x \in \mathbb{R}$. Το σχετικό σφάλμα δίνεται από τη σχέση

$$Rel = \left| \frac{fl(x) - x}{x} \right| \leq \mu = \begin{cases} \frac{1}{2} \beta^{1-t}, & \text{στρογγύλευση} \\ \beta^{1-t}, & \text{αποκοπή} \end{cases}$$

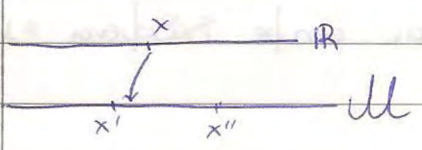
απόδειξη

Έστω $x \in \mathbb{R}$

$$x = \sigma \cdot (.a_1 a_2 \dots a_t a_{t+1} \dots)_\beta \cdot \beta^e$$

$\downarrow$ στρογγύλευση (rounding)

$$fl(x) = \begin{cases} x' = \sigma (.a_1 a_2 \dots a_t)_\beta \cdot \beta^e, & 0 \leq a_{t+1} \leq \frac{\beta}{2} \\ x'' = \sigma \cdot \left[(.a_1 a_2 \dots a_t)_\beta + \beta^{-t} \right] \cdot \beta^e, & \frac{\beta}{2} < a_{t+1} < \beta \end{cases}$$



$x', x'' \in \mathcal{M}$, ισοκατανεμημένα (βήμα: β^{e-t})

Έστω ότι επιλέγουμε $fl(x) = x'$

$$Rel = \left| \frac{x - x'}{x} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{|x' - x''| = \beta^{e-t}}{(.10 \dots 0)_\beta \cdot \beta^e} = \frac{1}{2} \frac{\beta^{-t}}{\frac{1}{\beta}} = \frac{1}{2} \beta^{1-t}$$

$$\Rightarrow (*) \boxed{Rel_{fl(x)} \leq \frac{1}{2} \beta^{1-t}}$$

ΑΓΑ.Μ 9/1/14

Ομοίως για x''

Αποκοπή (Chopping)

Επειδή αποκοπή στα t-ψηφία

$|x-x'| \le |x'-x''| = b^{e-t}$ κλπ.

$\frac{1}{2} b^{1-t} = u \to$ μονάδα μέτρησης σφάλματος

unit round off error

π.χ. error, $\le 50u$ ή $\le n \cdot u$ ή $\le n^2 u$ ή...

στην IEEE single

Παρατήρηση 1:

Η αποκοπή έχει διπλάσιο σφάλμα από τη στρογγύλευση (γι' αυτό δεν προτιμάται)

Εάν θέσουμε $\varepsilon = \frac{fl(x)-x}{x} \Rightarrow \boxed{fl(x) = x(1+\varepsilon),\ |\varepsilon| \le \frac{1}{2} b^{1-t}}$ ⊛

⊛ Είναι η θεμελιώδης αρχή της ανάλυσης σφάλματος:

Η υπολογιζόμενη τιμή θα πρέπει να είναι μικρή διατάραξη της θεωρητικά αναμενόμενης. $\Downarrow$

Ευσταθής Αλγόριθμος (Stable)

$$\underbrace{fl(x)}_{\text{υπολογιζόμενη τιμή}} = \underbrace{x}_{\text{θεωρητική τιμή}} \underbrace{(1+\varepsilon)}_{\text{διατάραξη}},\ |\varepsilon| \le u.$$

$\Downarrow$

Η floating point αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών είναι ευσταθής διαδικασία $\overset{δλδ}{\Rightarrow}$ μικρό, ελεγχόμενο σφάλμα

Εκτέλεση Πράξεων σε floating point

$$\begin{cases} x = x_s \cdot b^{x_\varepsilon}, & x_\varepsilon \le y_\varepsilon \\ y = y_s\, b^{y_\varepsilon} \end{cases}$$

$\hookrightarrow x \cdot y = (x_s y_s)\, b^{x_\varepsilon + y_\varepsilon}$

$\frac{x}{y} = \frac{x_s}{y_s}\, b^{x_\varepsilon - y_\varepsilon}$

$\rangle$ ανακατανομή στον εκθέτη

Πολ/μός - Διαίρεση:

1) Εκτέλεση πράξεων σε mantissa και ανακατανομή εκθετών
σε διπλή ακρίβεια
double precision accumulator (στη CPU) → διατίθενται 2t-ψηφία

2) Κανονικοποίηση και rounding στη mantissa

Πρόσθεση:

Επιπλέον ευθυγράμμιση των εκθετών (δηλ. ίδιος εκθέτης)

Άσκηση:

Έστω $b=10$, $t=3$, $u=0.005$

Εάν $x=0.101\cdot10^2$

$y=-0.994\cdot10^1$

Να υπολογιστεί $fl(x+y)$ με double precision accumulator. Τι συμβαίνει διαφορετικά;

Θεωρητική τιμή $x+y=0.16$

Λύση

Εκτέλεση της πρόσθεσης.

B1 Ευθυγράμμιση των εκθετών (ο μικρότερος προς το μεγαλύτερο)

$x=0.101\overbrace{000}^{2t-\text{ψηφία}}\cdot10^2$

$y=-0.099\overbrace{400}^{2t-\text{ψηφία}}\cdot10^2$

B2 Εκτέλεση Πράξης

$x+y=0.001600\cdot10^2$

B3. Κανονικοποίηση και Rounding

$fl(x+y)=0.160\cdot10^0$

$fl(x+y)=(x+y)(1+\delta)$, $\delta=0$

$\Downarrow$

υπολογιζόμενη τιμή = Θεωρητική τιμή

Εάν δεν έχουμε double precision accumulator

$$\begin{cases} x=0.101\cdot10^2 \\ y=0.099\cdot10^2 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$fl(x+y)=0.002\cdot10^2 (=0.2\cdot10^{-2}\cdot10^2)=0.2$

ΑΓΑ: Μ 9/1/14

$\Rightarrow fl(x+y) = (x+y)(1+\sigma)$, $\sigma = 0.25 = 50u$

$0.2 = 0.16 \cdot 1.25$

άσκηση: Βελτιώνονται τα 50u με single και rounding;

$u = \frac{1}{2} b^{1-t}$

↳ unit round off

Εκτίμηση του "μηδέν της μηχανής"

Άσκηση:

Εντοπισμός x έτσι ώστε $fl(1+x)=1$

$b=10$, $t=6$

$\overset{\nabla}{o}$ Όταν $t=6$ και προσθέσω το 1, δηλ 10^{-7} τότε ισχύει το ζητούμενο $\overset{\nabla}{o}$

Εάν $x=10^{-7}$ να υπολογίσετε το $fl(1+x)$

B1 Ευθυγράμμιση Εκθετών

$1 \rightsquigarrow 0.1 \cdot 10^1$

$\overset{\nabla}{o}$ Επειδή πρέπει $10^{-7} \rightsquigarrow$ προσθέτω πολλά 0 → μεγάλη μετακίνηση δεξιά του 1 άρα χάνεται $\overset{\nabla}{o}$

$x \rightsquigarrow 0.00000001 \cdot 10$

B2 Πρόσθεση

$1+x \rightsquigarrow 0.10000001 \cdot 10$

$\downarrow$

$fl(1+x) = 0.100000 \cdot 10 = 1$

Άρα ισχύει ότι $fl(1+x) = 1 \; \forall x \leq 10^{-7}$

Η Εκτίμηση του "μηδέν της μηχανής"

```
↓
x = 1
while (1+x≠1)
    x = x/2
x ≈ 10^-16
```

Βασικά Χαρακτηριστικά ενός Αλγορίθμου

↓

Αριθμητικά Αποτελεσματικός

1. Γενικού Σκοπού (General Purpose)
2. Αξιόπιστος (Reliable)
   ↓ Εμφάνιση κατάλληλων διαγνωστικών μηνυμάτων (π.χ. overflow, underflow, διαίρεση με 0)

!! 3. Ευσταθής (Stable)
↓
Η υπολογιζόμενη ποσότητα αποτελεί μικρή διαταραχή της θεωρητικά αναφερόμενης.

π.χ. $fl(x)=x(1+\varepsilon)$, $|\varepsilon|\le u$
⇓
στρογγύλευση = ευσταθής αλγόριθμος

π.χ.

$Ax=b$, υπολογίζω ένα $\hat{x}$

Το $\hat{x}$ ικανοποιεί το (Σ): $(A+E)\hat{x}=b$, $\|E\| \le \overset{\text{unction}}{f}(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{διάσταση}}}{n}, \overset{\text{round off}}{u})$

!! 4. Πολυπλοκότητα (Complexity)

Αποδεκτές Αριθμητικές Πράξεις

Λιγότερες αριθμητικές πράξεις συντελούν σε δύο πράγματα:
- μεγαλύτερη ταχύτητα
- μικρότερα σφάλματα

Ορισμός

flop (floating point operation)

1 flop = ο χρόνος που απαιτείται για την εκτέλεση της πράξης.

$\boxed{x=c\cdot a+b}$ → 1 πολλ/μός + 1 πρόσθεση

π.χ. Αλγόριθμος $A_{n\times n}$

Εκτίμηση πράξεων f(n, flops), n^2 flops ή $5n$ flops ή ...

$O(n)$ = της τάξης του n

Εάν απαιτούνται $5n+10$ flops $\approx O(n)$

Αποδεκτή πολυπλοκότητα έως $O(n^3)$

Εάν $O(n^4)$ → μη αποτελεσματικό ούτε $O(n!)$

! Έλεγχος οπωσδήποτε Stability + Complexity !

ΑΓΑ:Μ 9/1/14

5. Οικονομικός στη μνήμη

n^2-θέσεις

$A, B, C \quad n\times n$

$\underset{+n^2}{K} = A * B * C$

$A = A * B * C$

δηλ. Επικάλυψη των ήδη υπαρχουσών θέσεων μνήμης

Παράδειγμα 1: Inner Product

Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

$x, y \in \mathbb{R}^n$

$(x,y) = x^t \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Αλγόριθμος

```
z = 0
for i = 1, 2, ..., n
    $z = \underbrace{z + x_i y_i}_{1\ flop}$
end
```

Πολυπλοκότητα: n flops

Εσωτερικό γινόμενο 2 διανυσμάτων: $O(n)$

Όχι ευσταθής

Παράδειγμα 2: Γινόμενο Matrix-vector
(Πίνακας - Διάνυσμα)

$y = \underset{m\times n}{A}\ \underset{n\times 1}{x}$

```
for i = 1, 2, ..., n
    sum = 0
    for j = 1, 2, ..., n
        $y_i = sum + a_{ij} x_j$ → core (πυρήνας) 1 flop
    end
end
```

Πολυπλοκότητα: n^2 flops

Παράδειγμα 3:

Γινόμενο δύο άνω τριγωνικών πινάκων

$U, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C=U\cdot V$

```
for $i=1,2,\dots,n$
    for $j=i,i+1,\dots,n$
        $c_{ij}=\underbrace{\sum_{k=i}^{j} u_{ik}v_{kj}}_{C=U\cdot V \text{ εξίσωση πινάκων}}$ → εξίσωση συντεταγμένων
                                     → τοτε εκτελείται j-i+1 flops (γιατί;)
    end
end
```

Πολυπλοκότητα: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(j-i+1)$ flops $=\sum_{i=1}^{n}(1+2+\dots+(n-i+1))=$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-i+1)(n-i+2)}{2}\approx O\left(\frac{n^3}{6}\right)$$ (γιατί;)

$\overset{\nabla}{\circ}$ Χρήσιμες Πρόοδοι

$$1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$ $\overset{\nabla}{\circ}$

Παράδειγμα 4: Γινόμενο Πινάκων

$\underset{m\times n}{A}, \underset{n\times p}{B}$

$\underset{m\times p}{C}=\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times p}{B}$ τι πολυπλοκότητα έχει;

```
for $i=1,2,\dots,n$
    for $j=1,2,\dots,p$
        $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$
    end
end
```

Πολυπλοκότητα: $O(m\cdot p\cdot n)$ και για $m=n=p$: $O(n^3)$ μέγιστη επιτρεπτή

16/1/14 Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα: Μητρούλη

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

SOS ① Να υπολογίσετε το γινόμενο $H\cdot A$, όπου ο H είναι πίνακας Householder, $A_{m\times n}$

Λύση

$\overset{\nabla}{\circ}$ $H = I - \frac{2uu^T}{u^Tu}$ ($m\times n$ πίνακας) ($\frac{2}{u^Tu}$ πραγματικός αριθμός), όπου I ταυτοτικός, $u\in\mathbb{R}^m$ $\overset{\nabla}{\circ}$

1ος τρόπος:

Υπολογίζουμε τον πίνακα H απευθείας και μετά το γινόμενο $H\cdot A$

$\overset{\nabla}{\circ}$ $A, B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\overset{\to O(n^3)\text{ flops}}{A\cdot B}$ $\overset{\nabla}{\circ}$

Απαιτούνται: $O(m^2n)$ flops

$\underset{A}{\underset{\downarrow}{m\cdot n}} + \underset{H}{\underset{\downarrow}{m^2}} + \underset{u.}{\underset{\downarrow}{m}}$ θέσεις μνήμης

2ος τρόπος:

$$H\cdot A = \left(I - 2\frac{uu^T}{u^Tu}\right)A = A - 2\frac{uu^T}{\underbrace{u^Tu}_{\|u\|^2}}A$$

Έστω $b = \frac{2}{u^Tu}$, τότε $HA = A - buu^TA$

Το (i,j) στοιχείο του πίνακα $H\cdot A = A - buu^TA$ θα είναι

$a_{ij} - b(u_1a_{1j} + u_2a_{2j} + \cdots + u_ma_{mj})u_i$

Αλγόριθμος

$b = \frac{2}{u^Tu} \to \underset{\text{διαίρεση}}{\underset{\downarrow}{1}}$ flop + $\underset{u^Tu = m \text{ αθροίσματα}}{\underset{\downarrow}{m}}$ flops

```
for $j = 1, 2, \dots, n$
    $a = u_1a_{1j} + \cdots + u_ma_{mj}$ $\to m$ flops  } $(m+1)n$ flops.
    $a = ba.$ $\to 1$ flop                          }
    for $i = 1, 2, \dots, m$
        $a_{ij} = a_{ij} - au_i \to 1$ flop, δηλ m flops αφού m-φορές η for
    end                                            άρα m·n flops
end
```

Άρα, συνολικά $2mn + n + (m+1)$ flops

$O(2mn) \sim 2$

② Να υπολογίσετε το γινόμενο $\underset{m\times n}{A}\cdot H$, H: Householder

$\overset{\nabla}{\circ}$ Ο Householder <u>πάντα</u> τετραγωνικός $\overset{\nabla}{\circ}$

<u>Λύση</u>

H: Householder n×n

$$H = I - 2\frac{uu^T}{u^Tu}$$

$$AH = A\Big(I - \underbrace{2\frac{uu^T}{u^Tu}}_{\beta}\Big) = A - 2A\frac{uu^T}{u^Tu}$$

(i,j) στοιχειο → $a_{ij} - \beta(a_{i1}u_1 + \dots + a_{in}u_n)u_j$

<u>Αλγόριθμος</u>

$\beta = \frac{2}{u^Tu}$ → m+1 flops

```
for $i = 1, 2, \dots, m$
    $a = a_{i1}u_1 + \dots + a_{in}u_n$ → n flops   }  (n+1)m flops
    $a = \beta \cdot a$ → 1 flop                     }
    for $j = 1, 2, \dots, n$                          }  n flops
        $a_{ij} = a_{ij} - au_j$ → 1 flop            }
    end
end
```

Συνολικά $2mn + m + (m+1)$ flops.

<u>Κανονικοποιημένος αριθμός</u>:

$$x = \sigma(0.\underbrace{a_1a_2\dots a_t}_{t})_{\underset{\text{συνήθως } 2}{\beta}} \cdot \beta^e$$

$a_1 \neq 0$

Σύνολο κανονικοποιημένων αριθμών $\mathcal{M}(\beta, t, m, M)$, $m \le e \le M$

Πλήθος κανονικοποιημένων mantissa

$$\underset{a_1}{(\beta-1)}\ \underset{a_2,\dots,a_t}{\beta^{t-1}}$$

Στο διάστημα $[\beta^{e-1}, \beta^e)$ θα κατανεμηθούν $(\beta-1)\beta^{t-1}$ αριθμοί x

ΑΓΑ:Μ 16/1/14

Βήμα κατανομής = $\frac{\text{μήκος διαστήματος}}{\text{πλήθος αριθμών}} = \frac{b^e - b^{e-1}}{(b-1)b^{t-1}} = \frac{b^{e-1}\cancel{(b-1)}}{\cancel{(b-1)}\, b^{t-1}} = b^{e-t}$

Θέτουμε $s = b^{-\mu-1}$

Παράδειγμα

Δίνεται το σύστημα $\mathcal{M}(2,3,-1,3)$. Να προσδιοριστούν οι μη-αρνητικοί αριθμοί μηχανής που ανήκουν στο $\mathcal{M}$ και να παρασταθούν γραφικά.

Λύση

$b=2,\ t=3,\ m=-1,\ \mu=3 \quad (m=-\mu)$

Θέταμε $s = b^{-\mu-1} = 2^{-2} = \frac{1}{4} = 0.25$

$b_k \to$ βήμα κατανομής

$b_k = b^{e-t}$ = # αριθμών σε κάθε διάστημα είναι $(b-1)b^{t-1} = 4$

Διάστημα $[b^{e+1}s, b^{e+2}s)$

Για $e=-1$

Διάστημα $[s, bs) = [0.25, 0.5]$

$b_k = \frac{1}{16} = 0.0625$

Αριθμοί μηχανής

0.25

$0.25 + \frac{1}{16} = 0.3125$

$0.3125 + \frac{1}{16} = 0.375$

$0.375 + \frac{1}{16} = 0.4375$

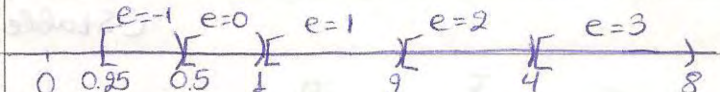
Για $e=0$

Διάστημα $[bs, b^2] = [0.5, 1]$

$b_k = 0.125$

Αριθμοί μηχανής

Όμοια για $e=1$, $e=2$, $e=3$



③ Να δειχθεί ότι $fl(x) = \frac{x}{1+\delta}$, $|\delta| \le u$.

Λύση

Εξετάζουμε την ποσότητα

$$\left|\frac{x-fl(x)}{fl(x)}\right| \le \frac{1/2 \cdot b^{e-t}}{\sigma(0.10\ldots0)_b\, b^{e}} = \frac{1/2 \cdot b^{-t}}{1/b} = \underset{\substack{\shortparallel \\ u}}{\frac{1}{2}\, b^{1-t}}$$

Θέτω $\delta = \frac{x-fl(x)}{fl(x)} \Rightarrow \delta\, fl(x) + fl(x) = x \Rightarrow fl(x) = \frac{x}{1+\delta}$, $|\delta| \le u$.

$\overset{\nabla}{\circ}$ $(.100\ldots0)_b = \sum_{k=1}^{\infty} b^{-k} = \frac{1}{b}$ $\overset{\nabla}{\circ}$

④ Να υπολογίσετε το $c = \sqrt{a^2+b^2}$ όταν $a = 10^{60}$, $b = 1$, $t = 4$

Λύση

1ος τρόπος:

$a^2 = (10^{60})^2 = 10^{120} = 0.1 \cdot 10^{121}$

$b^2 = 1^2 = 1 = 0.0\ldots01 \cdot 10^{121}$

$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{0.1 \cdot 10^{121}} = 10^{60}$.

2ος τρόπος:

Να κάνουμε scaling

$c = s\sqrt{\left(\frac{a}{s}\right)^2 + \left(\frac{b}{s}\right)^2}$, $s = \max\{|a|, |b|\}$

Εδώ, $s = 10^{60}$

$$c = 10^{60}\sqrt{1^2 + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\left(\frac{1}{10^{60}}\right)^2}} = 10^{60}$$

[redacted]

[redacted]