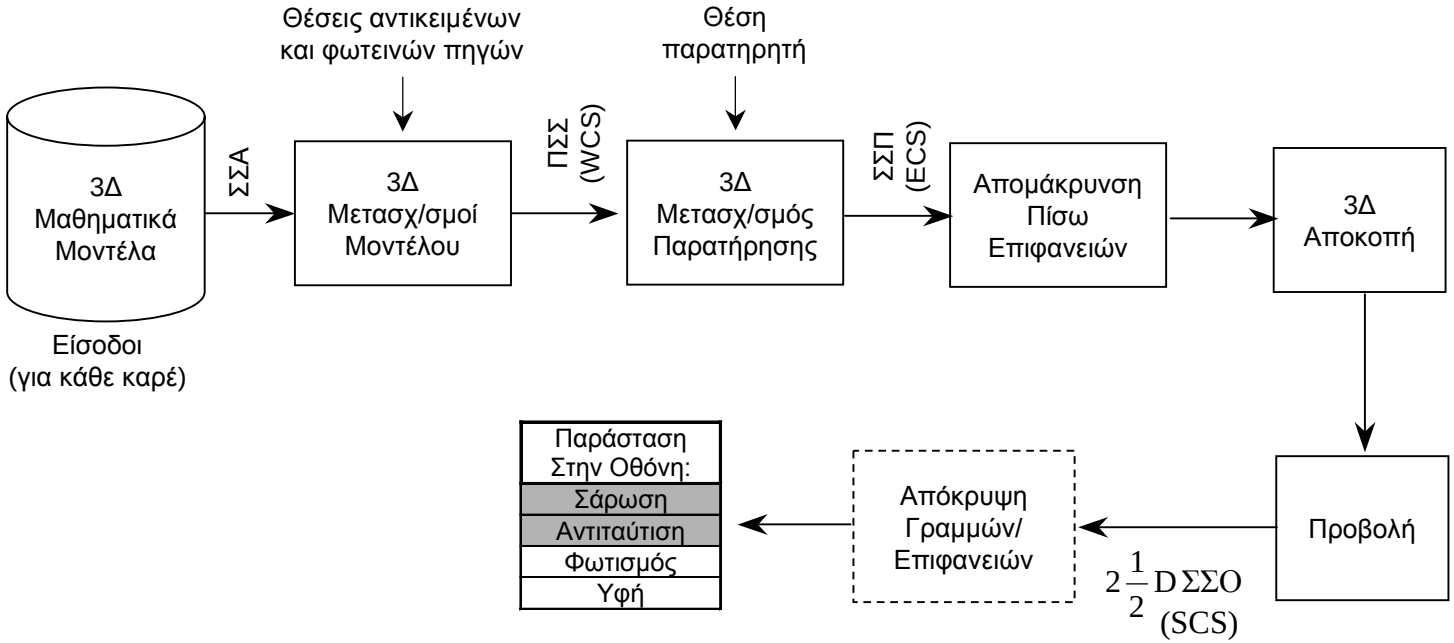
Αλγόριθμοι Παράστασης Βασικών Σχημάτων

- Προσέγγιση μαθηματικών σχημάτων από διακριτά pixels:
  - Ευθύγραμμο τμήμα, κύκλος, κωνικές τομές, πολύγωνο.
  - S/W ή H/W.



Ευθύγραμμο Τμήμα: Αλγόριθμος 1

- Κριτήρια καλού αλγόριθμου ευθύγραμμου τμήματος:
  - Σταθερό πάχος ανεξάρτητο κλίσης, όχι κενά (συνεκτική).
  - Pixels όσο το δυνατόν πλησιέστερα στη μαθηματική πορεία της.
  - Ταχύτητα.
- Εστω ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ P_1 (x_1, y_1) και P_n (x_n, y_n) 1ου οκταμορίου:
  - Για κάθε σημείο $P(x, y)$ του ευθύγραμμου τμήματος ισχύει:

$$y = s \cdot x + b \quad \text{με} \quad s = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{και} \quad b = \frac{y_1 x_n - y_n x_1}{x_n - x_1}$$

```
line1(x1,y1,xn,yn,colour)
int x1,y1,xn,yn,colour;
/*colour η τιμή του χρώματος του ευθύγραμμου τμήματος*/
{float s,b,y; int x;
 s=(yn-y1)/(xn-x1);
 b=(y1*xn-yn*x1)/(xn-x1);
 for (x=x1;x<=xn;x++)
  {y=s*x+b;
   setpixel(x,round(y),colour);}
}
```

Ευθύγραμμο Τμήμα: Αλγόριθμος 2

- Πολλαπλασιασμός μέσα στο βρόχο μπορεί να αποφευχθεί:
  - Αντικαθίσταται από πρόσθεση αφού ισχύει:

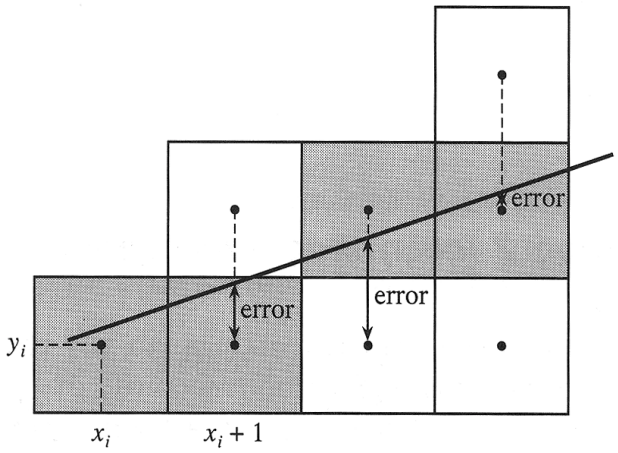
$$x_{i+1} = x_i + 1$$

$$y_{i+1} = sx_{i+1} + b = sx_i + b + s = y_i + s$$

```
line2 (x1,y1,xn,yn,colour)
int x1,y1,xn,yn,colour;
  {float s,y; int x;
    s=(yn-y1)/(xn-x1);
    y=y1;
    for (x=x1;x<=xn;x++)
      {setpixel(x,round(y),colour);
       y=y+s;
      }
  }
```

Ευθύγραμμο Τμήμα: Αλγόριθμος 3

- Στρογγύλευση (y) μέσα στο βρόχο μπορεί να αποφευχθεί:
  - Διαχωρισμός y σε ακέραιο (y) και δεκαδικό (error) μέρος.
  - error είναι η απόσταση του pixel (x_i+1, y_i) από ιδεατή ευθεία:




```
line3 (x1,y1,xn,yn,colour)
int x1,y1,xn,yn,colour;
    {float s,error; int x,y;
     s=(yn-y1)/(xn-x1);
     y=y1;
     error=0;
     for (x=x1;x<=xn;x++)
       {setpixel(x,y,colour);
        error=error+s;
        if (error>=0.5){y++; error--}
       }
    }
```

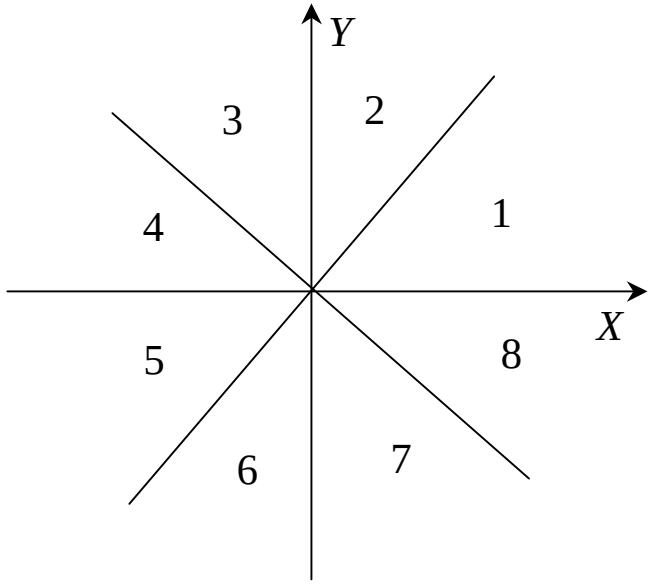
Ευθύγραμμο Τμήμα: Αλγόριθμος 4 (Bresenham)

- Αντικατάσταση πραγματικών μεταβλητών από ακέραιες με κατάλληλη κλιμάκωση s, error & συνθήκης επιλογής:
  - πολλαπλασιάζουμε με $dx = x_n - x_1$, $s \rightarrow dy$, error ακέραιο.
  - συνθήκη error $\geq dx/2 \Leftrightarrow$ error $\geq \lfloor dx/2 \rfloor \Leftrightarrow$ error ≥ 0 & αρχική αφαίρεση $\lfloor dx/2 \rfloor$ από error (/2 με ολίσθηση).

```
line4 (x1,y1,xn,yn,colour)
int x1,y1,xn,yn,colour;
    {int error,x,y,dx,dy;
     dx=xn-x1; dy=yn-y1;
     error=-dx/2; y=y1;
     for (x=x1; x<=xn; x++)
       {setpixel(x,y,colour);
        error=error+dy;
        if (error>=0){y++; error=error-dx}
       }
    }
```

Ευθύγραμμο Τμήμα: Αλγόριθμος Bresenham

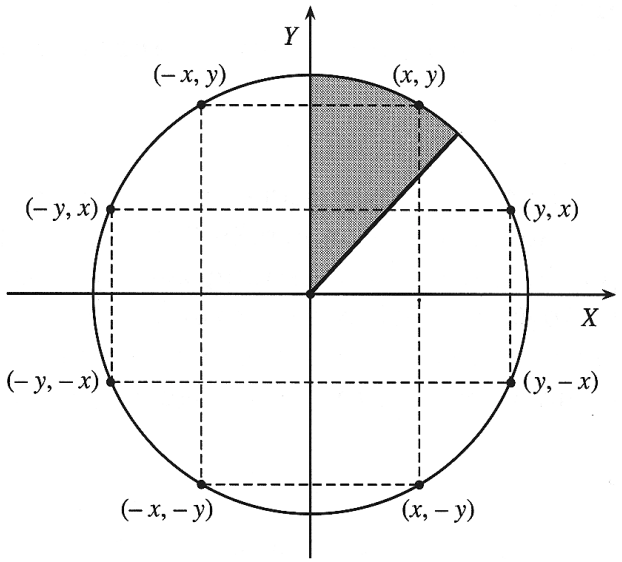
- Παραπάνω λειτουργεί μόνο στο 1ο οκταμόριο (αλλά συμμετρικά):
  - μεταφορά (x_1, y_1) ώστε να συμπέσει με αρχή αξόνων.



Οκταμόριο	Άξονας ταχυτ. Κίνησης	Άλλος άξονας
1	x	Αυξάνεται
2	y	»
3	y	Μειώνεται
4	x	»
5	x	Αυξάνεται
6	y	»
7	y	Μειώνεται
8	x	»

Κύκλος

- 8-πλή συμμετρία, δημιουργούμε ένα οκταμόριο (έστω 2ο)




```
circle_symmetry (x,y,colour)
int x,y,colour;
    {setpixel(x,y,colour);
     setpixel(y,x,colour);
     setpixel(y,-x,colour);
     setpixel(x,-y,colour);
     setpixel(-x,-y,colour);
     setpixel(-y,-x,colour);
     setpixel(-y,x,colour);
     setpixel(-x,y,colour);
    }
```

Κύκλος: Αλγόριθμος Bresenham

- Εστω (x_i, y_i) επελέγη. Επόμενο βήμα (x_i+1, y_i) ή (x_i+1, y_i-1)

- Μεταβλητή απόφασης:

  $e_i=d_1-d_2$ όπου $d_1 = y_i^2 - y^2$ και $d_2 = y^2 - (y_i - 1)^2$

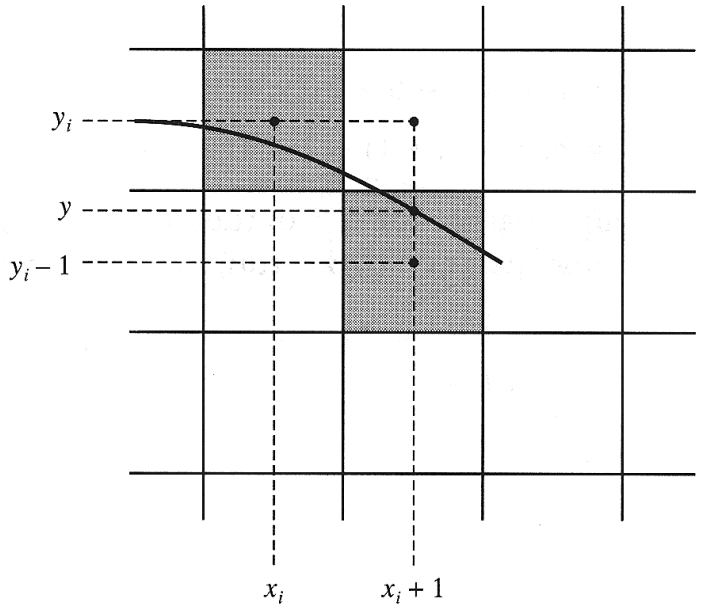
  Αν $e_i \geq 0$ επιλέγεται το σημείο (x_i+1, y_i-1)

  διαφορετικά » » » (x_i+1, y_i)

  Επειδή για $x=x_i+1$ ισχύει $y^2=r^2-(x_i+1)^2$ έχουμε:

$$e_i = y_i^2 - r^2 + (x_i+1)^2 + (y_i-1)^2 - r^2 + (x_i+1)^2$$

$$= 2(x_i+1)^2 + y_i^2 + (y_i-1)^2 - 2r^2$$




```
circle (r,colour)
int r,colour;
    {int x,y,e;
     x=0; y=r;
     e=3-2*r;
     while (x<=y)
         {circle_symmetry(x,y,colour);
          x++;
          if (e>=0) {y--; e=e-4*y}
          e=e+4*x+2;}
    }
```

Κύκλος: Αλγόριθμος Bresenham

Η τιμή e_{i+1} υπολογίζεται επαναληπτικά ως εξής:

$$\begin{aligned}
e_{i+1} &= 2(x_{i+1}+1)^2 + y_{i+1}^2 + (y_{i+1}-1)^2 - 2r^2 \\
&= 2(x_i+2)^2 + y_{i+1}^2 + (y_{i+1}-1)^2 - 2r^2 \\
&= 2x_i^2 + 8x_i + 8 + y_{i+1}^2 + y_{i+1}^2 - 2y_{i+1} + 1 - 2r^2 \\
&= 2(x_i+1)^2 + 4x_i + 6 + 2y_{i+1}^2 - 2y_{i+1} + 1 - 2r^2 \\
&= e_i - y_i^2 - y_i^2 + 2y_i - 1 + 4x_i + 6 + 2y_{i+1}^2 - 2y_{i+1} + 1 \\
&= e_i + 4x_i + 6 + 2\left(y_{i+1}^2 - y_i^2\right) - 2\left(y_{i+1} - y_i\right)
\end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό του e_{i+1} χρησιμοποείται το εξής τέχνασμα:

Αν $e_i < 0 \Rightarrow y_{i+1} = y_i \Rightarrow e_{i+1} = e_i + 4(x_i+1) + 2$

Αν $e_i \geq 0 \Rightarrow y_{i+1} = y_i - 1$

$$\Rightarrow e_{i+1} = e_i + 4x_i + 6 + 2\left((y_i-1)^2 - y_i^2\right) - 2(y_i - 1 - y_i)$$

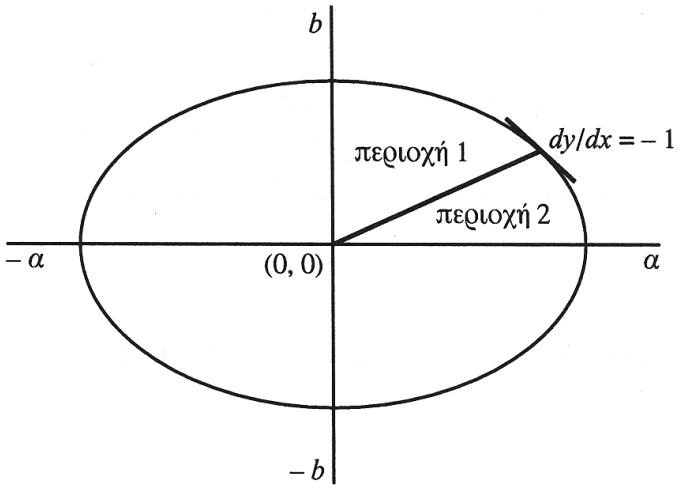
ή $e_{i+1} = e_i + 4(x_i+1) + 2 - 4(y_i - 1)$

Θεωρώντας σαν πρώτο σημείο του 2ου οκταμορίου το σημείο $(x,y)=(0,r)$

$$e_1 = 2 + r^2 + (r-1)^2 - 2r^2 = 3 - 2r$$

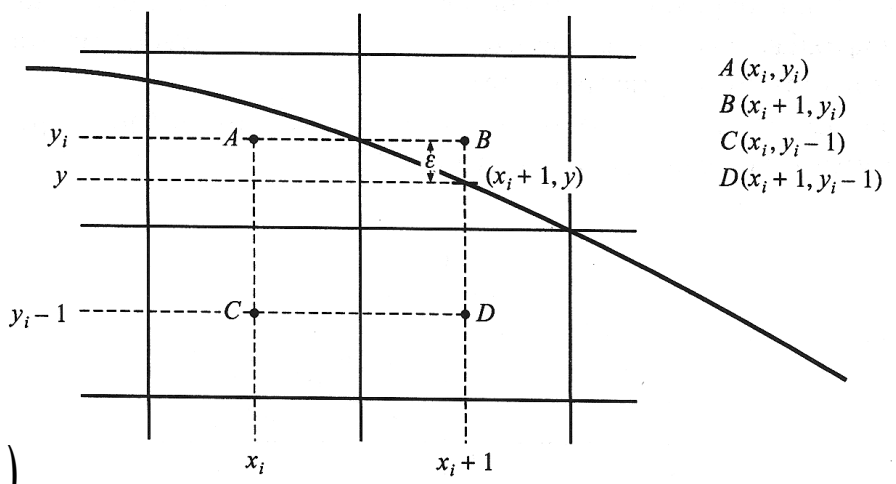
Ελλειψη

- Πολλοί αλγόριθμοι για κωνικές τομές:
  - Εδώ αλγόριθμος Αγάθου-Θεοχάρη-Μπεμ (1998).
  - Γρήγορος, μικρή απαίτηση ακρίβειας ακεραίων, σωστή μετάβασης περιοχής.
- Εξίσωση έλλειψης με κέντρο (0,0): $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$
  - Τετραπλή συμμετρία: δημιουργούμε μόνο περιοχές 1, 2



Ελλειψη

- Περιοχή 1: άξονας κύριας κίνησης ο X
  - Εκκίνηση από $(0, b)$
  - Τέλος περιοχής όταν $dy/dx = -1$



Ορίζουμε:

$$d1 = y_i^2 - y^2$$

$$d2 = y^2 - (y_i - 1)^2$$

και θέτουμε:

$$d = d1 - d2 = \left(y_i^2 - y^2\right) - \left(y^2 - (y_i - 1)^2\right)$$

- Θέτουμε $e = y_i - y$ οπότε:

$$d(\varepsilon) = -2\varepsilon^2 + 4y_i\varepsilon + 1 - 2y_i$$

Ελλειψη

- Τιμή απόφασης: $d(1/2) = 1/2$ δηλαδή για $\varepsilon = 1/2$
  Αν $d \leq 1/2$ επιλέγουμε pixel B
  διαφορετικά επιλέγουμε pixel D
- Διευκολύνουμε περαιτέρω αυξητικό υπολογισμό παίρνοντας $d = a^2$ ($d1$-$d2$)

$$d(\varepsilon) = -2a^2\varepsilon^2 + 4a^2 y_i \varepsilon + a^2 - 2a^2 y_i \quad (2.3)$$ οπότε:

Αν $d \leq a^2/2$ επιλέγουμε pixel B (2.4)
διαφορετικά επιλέγουμε pixel D

Ελλειψη

- Αυξητικός υπολογισμός d

$$d_{1,i} = a^2(d1 - d2)$$
$$= a^2 y_i^2 + a^2(y_i - 1)^2 - 2a^2 y^2 \qquad (2.5)$$

Ομως από την εξίσωση της έλλειψης για το σημείο (x_i+1, y) έχουμε $a^2y^2=a^2b^2-b^2(x_i+1)^2$ οπότε:

$$d_{1,i} = -2a^2b^2 + 2b^2(x_i + 1)^2 + a^2 y_i^2 + a^2(y_i - 1)^2 \qquad (2.6)$$

Στη συνέχεια ορίζουμε το $d_{1,i+1}$ ως προς το $d_{1,i}$:

$$d_{1,i+1} = -2a^2b^2 + 2b^2(x_{i+1} + 1)^2 + a^2 y_{i+1}^2 + a^2(y_{i+1} - 1)^2$$
$$= -2a^2b^2 + 2b^2((x_i + 1) + 1)^2 + a^2 y_{i+1}^2 + a^2(y_{i+1} - 1)^2 \{x_{i+1} = x_i + 1\}$$
$$= -2a^2b^2 + 2b^2(x_i + 1)^2 + 2b^2 + 4b^2(x_i + 1) + a^2 y_{i+1}^2 + a^2(y_{i+1} - 1)^2$$

Ελλειψη

Αλλά από την (2.6) έχουμε $-2a^2b^2+2b^2(x_i+1)^2=d_{1,i}-a^2y_i^2-a^2(y_i-1)^2$,
οπότε:

$$d_{1,i+1}=d_{1,i}+a^2y_{i+1}^2+a^2(y_{i+1}-1)^2-a^2y_i^2-a^2(y_i-1)^2+2b^2+4b^2(x_i+1)$$

Αν $d_{1,i}>a^2/2$ τότε $y_{i+1}=y_i$ -1 από την (2.4), οπότε:

$$d_{1,i+1}=d_{1,i}+2b^2+4b^2(x_i+1)-4a^2(y_i-1)$$

Αν $d_{1,i}\le a^2/2$ τότε $y_{i+1}=y_i$ από την (2.4), οπότε:

$$d_{1,i+1}=d_{1,i}+2b^2+4b^2(x_i+1)$$

Η αρχική τιμή $d_{1,0}$ βρίσκεται αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του πρώτου pixel της περιοχής 1 $(0,b)$ για τα (x_i,y_i) στην (2.6):

$$d_{1,0}=2b^2+a^2(1-2b)$$

Ελλειψη

- Μετάβαση περιοχής:
  - Στηρίζεται στην τιμή του d για το σημείο $(x_i+1, y_i - 3/2)$
  - Αν πραγματική έλλειψη περνάει κάτω από αυτό $\Rightarrow$ αλλαγή περιοχής
- θέτοντας $\varepsilon = 3/2$ στην (2.3)

$$d\left(3/2\right) = -2a^2\left(3/2\right)^2 + 4a^2 y_i\left(3/2\right) + a^2 - 2a^2 y_i = 4a^2\left(y_i - 1\right) + a^2/2$$

Αν $d \le 4a^2(y_i - 1) + a^2/2$ τότε παραμένουμε στην περιοχή 1

διαφορετικά μεταβαίνουμε στην περιοχή 2.

- Παρομοίως βρίσκουμε μεταβλητή απόφαση περιοχής 2 $d_{2,i}$
- Αρχική τιμή μεταβλητής απόφασης περιοχής 2: $d_{2,i}$ λαμβάνεται από τελική τιμή $d_{1,i}$: $d_{2,i} = d_{1,i} + (d_{2,i} - d_{1,i})$

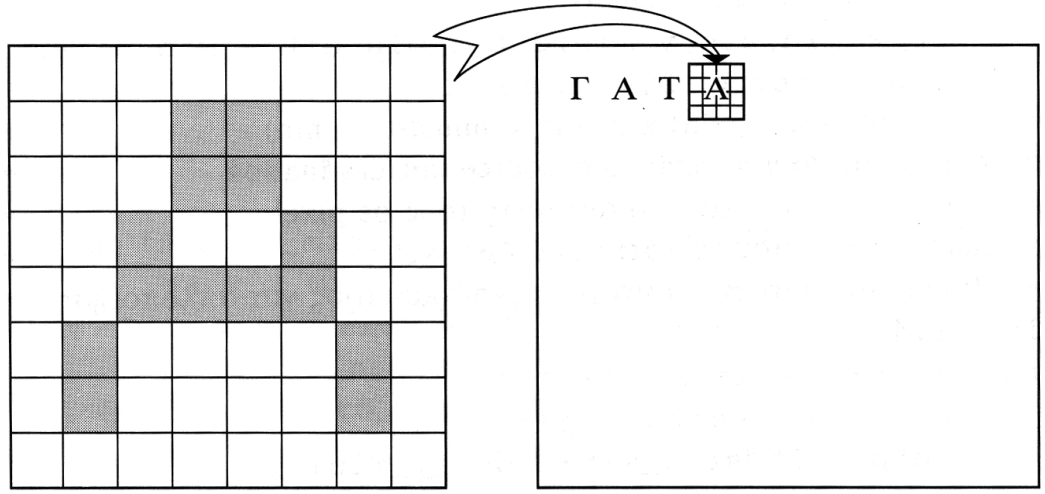
$$d_{2,i} = d_{1,i} - a^2\left(2y_i - 1\right) - b^2\left(2x_i + 1\right)$$

Ελλειψη

```
Ellipse (a,b,colour)
int a,b,colour;
{int a_sqr,b_sqr,a22,b22,a42,b42,x_slope,y_slope,d,mida,midb,x,y;
 x=0; y=b;
 a_sqr=a*a; b_sqr=b*b;
 a22=a_sqr+a_sqr; b22=b_sqr+b_sqr;
 a42=a22+a22; b42=b22+b22;
 x_slope=b42; /*x_slope==(4*b^2)*(x+1) πάντα */
 y_slope=a42*(y-1); /*y_slope==(4*a^2)*(y-1) πάντα */
 mida=a_sqr>>1;
 midb=b_sqr>>1;
 d=b22-a_sqr-(y_slope>>1)-mida; /* αφαιρούμε a^2/2 για βελτιστοποίηση */
 /* περιοχή 1 */
 while (d<=y_slope)
    {setpixel(x,y,colour);
     if (d>0)
        {d=d-y_slope;
         y--;
         y_slope=y_slope-a42;}
     d=d+b22+x_slope;
     x++;
     x_slope=x_slope+b42;}
 /*Αλλαγή περιοχής*/
 d=d-(x_slope+y_slope)>>1+(b_sqr-a_sqr)+(mida-midb);
 /* περιοχή 2 */
 while (y>=0)
    {setpixel (x,y,colour);
     if (d<=0)
        {d=d+x_slope;
         x++;
         x_slope=x_slope+b42;}
     d=d+a22-y_slope; y--;
     y_slope=y_slope-a42;}
}
```

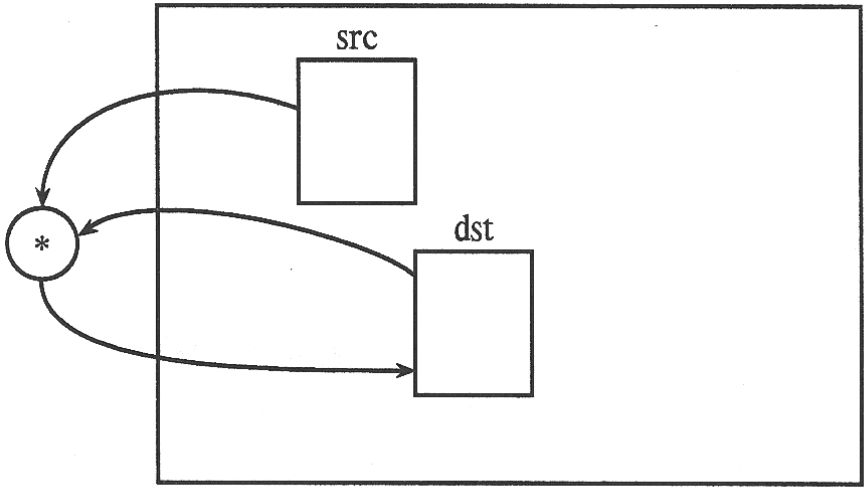
RasterOp

- Πλεγματική οθόνη: εικόνα παριστάνεται στην μνήμη οθόνης
  - Πολλές λειτουργίες υλοποιούνται με μετακινήσεις ή/και συνδυασμούς στην μνήμη οθόνης.
  - π.χ. Επεξεργαστής κειμένου, παραθυρικές εφαρμογές:



RasterOp

- RasterOp: γενική ρουτίνα μετακίνησης/συνδυασμού ορθογώνιων παραλληλόγραμμων τμημάτων εικόνας, ταχέως υλοποιημένη



RasterOp

```
RasterOp(src_x_min,src_y_min,dst_x_min,dst_y_min,sizex,sizey,function)
int src_x_min,src_y_min,dst_x_min,dst_y_min,sizex,sizey;
        ftype function)
/*  (src_x_min, src_y_min) και (dst_x_min, dst_y_min)          */
/*  ή κάτω αριστερή γωνία των source και destination           */
/*  sizex, sizey οι x και y διαστάσεις σε pixel                */
/*  function κάποιος τελεστής μεταξύ pixel                     */
/*  (θεωρείται δυνατή η συνάρτηση – παράμετρος για απλοποίηση) */
{int i,j;
 for (i=0; i<sizex; i++)
   for (j=0; j<sizey; j++)
         set_pixel(dst_x_min+i,dst_y_min+j,
           function(read_pixel(dst_x_min+i,dst_y_min+j)
             read_pixel(dst_x_min+i,dst_y_min+j)));
}
```

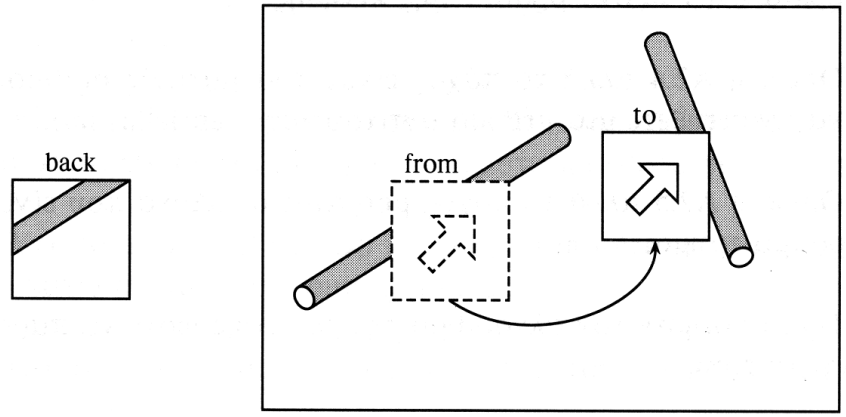
RasterOp

- Ασπρόμαυρες εικόνες: function από τα 16 δυνατά
  - XOR ιδιαίτερα χρήσιμη για αντιμετάθεση source & destination χωρίς χρήση βοηθητικού χώρου:

```
exchange (src_x_min,src_y_min,dst_x_min,dst_y_min,sizex,sizey)
int src_x_min,src_y_min,dst_x_min,dst_y_min,sizex,sizey;
  {RasterOp (src_x_min,src_y_min,dst_x_min,
             dst_y_min,sizex,sizey,XOR);
   RasterOp (dst_x_min,dst_y_min,src_x_min,
             src_y_min,sizex,sizey,XOR);
   RasterOp (src_x_min,src_y_min,dst_x_min,
             dst_y_min,sizex,sizey,XOR);
  }
```

RasterOp

- exchange ιδιαίτερη χρήσιμη για διαδοχικές μετακινήσεις αντικειμένου (π.χ. Cursor)




```
move (from_x_min,from_y_min,to_x_min,to_y_min,
      back_x_min,back_y_min,sizex,sizey)
int from_x_min,from_y_min,to_x_min,to_y_min,
      back_x_min,back_y_min,sizex,sizey;
    {exchange (to_x_min,to_y_min,
               back_x_min,back_y_min,
               sizex,sizey);
    {exchange (from_x_min,from_y_min,
               to_x_min,to_y_min,
               sizex,sizey);
    }
```