ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θεωρία Τελεστών

Ενότητα: Το Φασματικό Θεώρημα: Δεύτερη μορφή

Αριστείδης Κατάβολος

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

7.1 Το Φασματικό Θεώρημα: Δεύτερη μορφή

7.1.1 Εισαγωγή

Το Φασματικό Θεώρημα, που είναι ίσως το βασικότερο αποτέλεσμα στην Θεωρία Τελεστών, αποτελεί γενίκευση του αντίστοιχου θεωρήματος από την Γραμμική Άλγεβρα. Όπως φαίνεται και από την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2, το Θεώρημα αυτό αναδιατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 7.1.1. *Έστω H χώρος Hilbert πεπερασμένης διάστασης και $T \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός. Για κάθε $\lambda \in \sigma(T)$, ονομάζουμε E_λ την ορθή προβολή στον ιδιόχωρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Τότε*

$$I = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} E_\lambda \quad \text{και} \quad T = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} \lambda E_\lambda .$$

Θα δείξουμε ότι, όταν ο H είναι απειροδιάστατος, το άθροισμα αντικαθίσταται με ένα ολοκλήρωμα $T = \int \lambda dE_\lambda$ όπου η ολοκλήρωση γίνεται πάνω στο συμπαγές υποσύνολο $\sigma(T)$ του $\mathbb{C}$, ως προς ένα 'μέτρο' ορισμένο στα Borel υποσύνολα του $\sigma(T)$, με τιμές (όχι αριθμούς αλλά) προβολές στον H.

Στην προηγούμενη παράγραφο δώσαμε την απόδειξη (για την ειδική περίπτωση αυτοσυζυγούς τελεστή) μιας ισοδύναμης μορφής του Φασματικού Θεωρήματος: **Κάθε φυσιολογικός τελεστής T σ'έναν χώρο Hilbert είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με έναν πολλαπλασιαστικό τελεστή στον L^2 ενός κατάλληλου χώρου μέτρου**. Παρατηρούμε ότι ο χώρος μέτρου που κατασκευάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο εξαρτάται, όχι μόνον από τον τελεστή, αλλά και από την επιλογή μιας οικογένειας 'πολύ κάθετων' διανυσμάτων. Αντίθετα, το 'μέτρο' που θα ορίσουμε στη συνέχεια καθορίζεται μονοσήμαντα από τον τελεστή T. Επιπλέον, η αναπαράσταση του τελεστή με την μορφή ολοκληρώματος επιτυγχάνεται στον ίδιο χώρο Hilbert όπου ο T δρα, και όχι σε κάποιον άλλο χώρο (μέσω ορθομοναδιαίας ισοδυναμίας).

Το πρόγραμμά μας είναι το εξής: Θα ορίσουμε πρώτα την κατάλληλη έννοια «μέτρου», το *φασματικό μέτρο*, καθώς και την ολοκλήρωση, ως προς ένα τέτοιο μέτρο, συναρτήσεων με μιγαδικές τιμές. Θα δούμε ότι το ολοκλήρωμα ως προς ένα φασματικό μέτρο ορίζει μία αναπαράσταση μιας C^*-άλγεβρας συναρτήσεων. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι κάθε αναπαράσταση της C^*-άλγεβρας $C(K)$ (όπου K συμπαγής Hausdorff χώρος) που διατηρεί την ενέλιξη ορίζει ένα φασματικό μέτρο. Τέλος, αφού (όπως θα δούμε) κάθε φυσιολογικός τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ ορίζει μία αναπαράσταση $f \longrightarrow f(T)$ της $C(\sigma(T))$, θα οδηγηθούμε στην απόδειξη του Φασματικού Θεωρήματος.

7.1.2 Ολοκλήρωση ως προς φασματικό μέτρο

(i) Φασματικά μέτρα

Ορισμός 7.1.2. *Έστω $(K, \mathcal{S})$ μετρήσιμος χώρος. Μια οικογένεια $\{E(\Omega) : \Omega \in \mathcal{S}\}$ τελεστών σ'έναν χώρο Hilbert H λέγεται* ***φασματικό μέτρο (spectral measure)*** *αν ικανοποιεί τις ιδιότητες*

1. $E(\Omega)^* = E(\Omega)$
2. $E(\Omega_1 \cap \Omega_2) = E(\Omega_1) \cdot E(\Omega_2)$
3. $E(\emptyset) = 0$ *και* $E(K) = I$
4. *Για κάθε $x, y \in H$, η απεικόνιση $\mu_{xy} : \Omega \mapsto \langle E(\Omega)x, y\rangle$ είναι μιγαδικό μέτρο ορισμένο στην $\mathcal{S}$.*

Παρατήρηση 7.1.3. *(α) Από τις (1) και (2) έπεται ότι κάθε $E(\Omega)$ είναι ορθή προβολή, δηλαδή $E(\Omega)^* = E(\Omega)$ και $E(\Omega)^2 = E(\Omega)$. Εφόσον οι ορθές προβολές είναι θετικοί τελεστές*[1]*, έπεται ότι για κάθε $x \in H$ το μέτρο μ_{xx} είναι θετικό (πεπερασμένο) μέτρο. Αντίστροφα, αν κάθε μ_{xx} είναι θετικό μέτρο, τότε κάθε μ_{xy} θα είναι μιγαδικό μέτρο, ως γραμμικός συνδυασμός τεσσάρων μ_{xx}. Πράγματι, για κάθε Ω η απεικόνιση $(x, y) \mapsto \mu_{xy}(\Omega) = \langle E(\Omega)x, y\rangle$ είναι sesquilinear, άρα (από την ταυτότητα πολικότητας) έχουμε*

$$4\mu_{xy}(\Omega) = \mu_{x+y,x+y}(\Omega) - \mu_{x-y,x-y}(\Omega) + i\mu_{x+iy,x+iy}(\Omega) - i\mu_{x-iy,x-iy}(\Omega).$$

Επομένως η ιδιότητα (4) μπορεί να αντικατασταθεί από την

4′ *Για κάθε $x \in H$, η απεικόνιση $\mu_{xx} : \Omega \mapsto \langle E(\Omega)x, x\rangle$ είναι (θετικό) μέτρο ορισμένο στην $\mathcal{S}$.*

(β) Όταν ο K είναι (τοπικά) συμπαγής χώρος και $\mathcal{S}$ η σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του, συνήθως απαιτούμε ένα φασματικό μέτρο να είναι ***κανονικό****, δηλαδή όλα τα μ_{xx} να είναι κανονικά μέτρα.*

Παρατήρηση 7.1.4. *Κάθε φασματικό μέτρο είναι βεβαίως πεπερασμένα προσθετικό (αφού κάθε μ_{xy} $(x, y \in H)$ είναι πεπερασμένα προσθετικό), δηλαδή $E(\Omega_1 \cup \Omega_2) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$ όταν τα $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{S}$ είναι ξένα. Δεν είναι όμως (πλην τετριμμένων περιπτώσεων) σ-προσθετικό στην τοπολογία της νόρμας του $\mathcal{B}(H)$. Δηλαδή αν $\{\Omega_n\} \in \mathcal{S}$ είναι ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων και Ω είναι η ένωσή τους, η σειρά $\sum\limits_n E(\Omega_n)$ δεν συγκλίνει, γιατί τα μερικά της αθροίσματα, όταν δεν είναι ίσα, έχουν διαφορά νόρμας 1 (γιατί είναι ορθές προβολές*[2]*).*

Ισχύει όμως μια ασθενέστερη μορφή σ-προσθετικότητας:

Πρόταση 7.1.5. *Για κάθε $x \in H$ η σειρά $\sum E(\Omega_n)x$ συγκλίνει στο $E(\Omega)x$ (ως προς την νόρμα του H).*

Απόδειξη. Επειδή η απεικόνιση $\Omega \mapsto E(\Omega)$ είναι πεπερασμένα προσθετική, αν θέσουμε $V_n = \bigcup\{\Omega_k : k \leq n\}$ τότε

$$E(\Omega) = E(V_n) + E(\Omega \setminus V_n) = \sum_{k=1}^{n} E(\Omega_k) + E(\Omega \setminus V_n).$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\lim\limits_n \|E(\Omega \setminus V_n)x\| = 0$ για κάθε $x \in H$. Αλλά η $E(\Omega \setminus V_n)$ είναι ορθή προβολή, άρα $\|E(\Omega \setminus V_n)x\|^2 = \langle E(\Omega \setminus V_n)x, x\rangle = \mu_{x,x}(\Omega \setminus V_n)$ που τείνει στο 0 αφού το $\mu_{x,x}$ είναι σ-προσθετικό μέτρο. □

Παραδείγματα 7.1.6. *(α) Αν T είναι φυσιολογικός τελεστής σ'έναν χώρο Hilbert H πεπερασμένης διάστασης, θέτουμε $K = \sigma(T)$ και $E(\{\lambda\}) = E_\lambda$, όπου E_λ η προβολή στον ιδιοχώρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Ελέγχεται άμεσα ότι το $E(\cdot)$ είναι φασματικό μέτρο ορισμένο στο δυναμοσύνολο του (πεπερασμένου) συνόλου $\sigma(T)$.*

(β) Έστω $(K, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου και $H = L^2(K, \mu)$. Για κάθε $\Omega \in \mathcal{S}$ ορίζουμε τον τελεστή $E(\Omega) \in \mathcal{B}(H)$ από την σχέση

$$E(\Omega)g = \chi_\Omega g, \quad g \in H.$$

[1] Αν E είναι ορθή προβολή τότε $\langle Ex, x\rangle = \langle E^2x, x\rangle = \langle Ex, E^*x\rangle = \langle Ex, Ex\rangle = \|Ex\|^2$.

[2] Πράγματι, $\sum_{k=n}^{m} E(\Omega_k) = E(\cup_{k=n}^{m}\Omega_k)$

Ελέγχουμε ότι ικανοποιούνται οι απαιτήσεις του ορισμού:

(1) *Αν $g, h \in H$ έχουμε*

$$\langle E(\Omega)g, h\rangle = \int_K \chi_\Omega g\bar{h}d\mu = \int_K g\overline{\chi_\Omega h}d\mu = \langle g, E(\Omega)h\rangle$$

άρα $E(\Omega)^* = E(\Omega)$.

(2) *Επειδή $\chi_{\Omega_1\cap\Omega_2} = \chi_{\Omega_1}\cdot\chi_{\Omega_2}$ έχουμε*

$$E(\Omega_1\cap\Omega_2)g = \chi_{\Omega_1\cap\Omega_2}g = \chi_{\Omega_1}\cdot\chi_{\Omega_2}g = E(\Omega_1)(E(\Omega_2)g).$$

*Η απόδειξη της **(3)** είναι τετριμμένη.*

*Για την **(4)**, αρκεί, όπως είδαμε στην Παρατήρηση 7.1.3, να δείξουμε ότι για κάθε $f \in H$ η απεικόνιση $\Omega \mapsto \langle E(\Omega)f, f\rangle$ είναι (θετικό) μέτρο στον K. Πρώτα-πρώτα, αν τα $V, \Omega \in \mathcal{S}$ είναι ξένα, τότε $\chi_{\Omega\cup V} = \chi_\Omega + \chi_V$, επομένως*

$$E(\Omega\cup V)f = \chi_{\Omega\cup V}f = \chi_\Omega f + \chi_V f = (E(\Omega) + E(V))f$$

*οπότε το $\Omega \mapsto \langle E(\Omega)f, f\rangle$ είναι πεπερασμένα προσθετικό. Αν τώρα $(\Omega_n) \subseteq \mathcal{S}$ είναι μια φθίνουσα προς το $\emptyset$ ακολουθία, τότε η αντίστοιχη ακολουθία $(\chi_n)_n$ των χαρακτηριστικών τους φθίνει προς το μηδέν σε κάθε σημείο του K, άρα η ακολουθία $(\chi_n(t)|f(t)|^2)_n$ φθίνει προς το μηδέν (μ-σχεδόν) σε κάθε σημείο $t \in K$. Συνεπώς το **Θεώρημα μονότονης σύγκλισης** δείχνει ότι τα ολοκληρώματα φθίνουν προς το μηδέν, δηλαδή ότι*

$$\langle E(\Omega_n)f, f\rangle = \int_K \chi_n(t)|f(t)|^2 d\mu(t) \longrightarrow 0.$$

Έπεται ότι το $\Omega \longrightarrow \langle E(\Omega)f, f\rangle$ είναι σ-προσθετικό.

(ii) Ολοκλήρωση

Προχωρούμε τώρα στον ορισμό ολοκληρώματος ως προς φασματικό μέτρο. Αν

$$f = \sum_i \lambda_i \chi_{\Omega_i}$$

είναι απλή μετρήσιμη συνάρτηση (όπου $\lambda_i \in \mathbb{C}$ και $\Omega_i \in \mathcal{S}$, τα οποία μπορούμε να υποθέτουμε ξένα ανά δύο και $\bigcup \Omega_i = K$), ορίζουμε

$$\int_K f(\lambda)dE_\lambda = \sum_i \lambda_i E(\Omega_i) \in \mathcal{B}(H).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left\langle \left(\int_K f(\lambda)dE_\lambda\right)x, y\right\rangle = \int_K f d\mu_{x,y}$$

για κάθε $x, y \in H$.

Είναι φανερό ότι η απεικόνιση θ που ορίζεται από την σχέση

$$\theta(f) = \int_K f(\lambda)dE_\lambda$$

είναι γραμμική από τον χώρο των απλών μετρήσιμων συναρτήσεων με τιμές στον $\mathcal{B}(H)$. Επιθυμούμε να την επεκτείνουμε σε μια απεικόνιση ορισμένη στον χώρο $\mathcal{L}^\infty(K)$ όλων των φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων $f : K \to \mathbb{C}$. Κάθε τέτοια συνάρτηση προσεγγίζεται ομοιόμορφα από απλές συναρτήσεις. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι η θ είναι συνεχής ως προς την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης.

Ισχυριζόμαστε ότι $\|\theta(f)\| \le \sup|f|$. Πράγματι: Για κάθε $x \in H$, έχουμε

$$\begin{aligned}\left\|\left(\int f dE\right)x\right\|^2 &= \left\|\sum_i \lambda_i E(\Omega_i)x\right\|^2 = \sum_i |\lambda_i|^2\|E(\Omega_i)x\|^2 \\ &\le (\max|\lambda_i|)^2\sum_i \|E(\Omega_i)x\|^2 = (\sup|f|)^2\|\sum_i E(\Omega_i)x\|^2 \\ &= (\sup|f|)^2\|x\|^2\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε (δύο φορές) το Πυθαγόρειο Θεώρημα, μια και οι $\{E(\Omega_i)\}$ είναι κάθετες ανά δύο και $\sum\limits_i E(\Omega_i) = E(\bigcup \Omega_i) = E(K) = I$.

Δείξαμε λοιπόν ότι

$$\left\|\int f dE\right\| \le \sup|f|$$

δηλαδή $\|\theta(f)\| \le \sup|f|$. Επομένως η θ επεκτείνεται *μοναδικά* σε μια συνεχή γραμμική απεικόνιση, που την συμβολίζουμε επίσης θ, από την C^*-άλγεβρα $\mathcal{L}^\infty(K)$ στον $\mathcal{B}(H)$.

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι η θ είναι *-μορφισμός. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η θ είναι *-μορφισμός στις απλές συναρτήσεις, γιατί ο πολλαπλασιασμός και η ενέλιξη είναι συνεχείς στην $\mathcal{L}^\infty(K)$ και στον $\mathcal{B}(H)$).

Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$, έχουμε

$$\theta(\chi_{\Omega_1}\chi_{\Omega_2}) = \theta(\chi_\Omega) = E(\Omega) = E(\Omega_1)\cdot E(\Omega_2) = \theta(\chi_{\Omega_1})\cdot\theta(\chi_{\Omega_2})$$

επομένως, λόγω γραμμικότητας της θ, αν f_1, f_2 είναι απλές, έχουμε

$$\theta(f_1 f_2) = \theta(f_1)\theta(f_2).$$

Όμοια, από το γεγονός ότι $E(\Omega)^* = E(\Omega)$ βρίσκουμε ότι

$$\theta(\bar{f}) = (\theta(f))^*$$

όταν η f είναι απλή.

Έτσι έχουμε ορίσει το ολοκλήρωμα $\int f dE \in \mathcal{B}(H)$ για κάθε $f \in \mathcal{L}^\infty(K)$, και έχουμε δείξει ότι η απεικόνιση $f \mapsto \int f dE$ είναι συνεχής *-μορφισμός.

Παρατήρηση 7.1.7. *Η απεικόνιση αυτή δεν είναι εν γένει 1-1 (επομένως δεν είναι ισομετρία). Πράγματι, αν το σύνολο $\Omega = \{t \in K : f(t) \neq 0\}$ έχει μέτρο μηδέν, αν δηλαδή $E(\Omega) = 0$, τότε $\int f dE = 0$.*

Συνοψίζουμε τα παραπάνω με την

Πρόταση 7.1.8. *Αν $\{E(\Omega) : \Omega \in \mathcal{S}\}$ είναι ένα φασματικό μέτρο ορισμένο σ΄έναν μετρήσιμο χώρο $(K, \mathcal{S})$ με τιμές προβολές σ΄έναν χώρο Hilbert H, τότε η απεικόνιση $\chi_\Omega \mapsto E(\Omega)$ ορίζει έναν *-μορφισμό*

$$\mathcal{L}^\infty(K) \to \mathcal{B}(H) :\ f \mapsto \int f dE$$

*από την *-άλγεβρα $\mathcal{L}^\infty(K)$ των φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$ με τιμές στον $\mathcal{B}(H)$ που ικανοποιεί*

$$\left\| \int f dE \right\| \leq \sup |f|$$

και

$$\left\langle \left(\int f dE \right) x, y \right\rangle = \int f d\mu_{xy} \qquad (x, y \in H)$$

όπου $\mu_{xy}(\Omega) = \langle E(\Omega)x, y \rangle$.

(Η τελευταία ισότητα ισχύει, όπως παρατηρήσαμε, για απλές συναρτήσεις. Η γενική περίπτωση έπεται προσεγγίζοντας την $f \in \mathcal{L}^\infty(K)$ ομοιόμορφα από μια ακολουθία απλών συναρτήσεων.)

7.1.3 Μέτρα και Αναπαραστάσεις

Έστω K συμπαγής χώρος Hausdorff. Τότε η $C(K)$ είναι μία μεταθετική C^*-άλγεβρα. Μια ***-αναπαράσταση (*-representation)** της $C(K)$ σ'έναν χώρο Hilbert H είναι ένας *-μορφισμός π της C^*-άλγεβρας $C(K)$ στην $\mathcal{B}(H)$. Θα υποθέτουμε επίσης, όπως γίνεται συνήθως[3], ότι η εικόνα της σταθερής συνάρτησης $\mathbf{1} \in C(K)$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής I.

Παραδείγματος χάριν, αν $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι αυτοσυζυγής τελεστής, η απεικόνιση $f \mapsto f(T) : C(\sigma(T)) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ είναι μια αναπαράσταση της C^*-άλγεβρας $C(\sigma(T))$ στον H. ('Οπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, το ίδιο ισχύει και όταν ο T είναι φυσιολογικός.)

Λήμμα 7.1.9. *Κάθε *-αναπαράσταση π της $C(K)$ είναι αυτομάτως συνεχής, μάλιστα $\|\pi(f)\| \leq \|f\|_\infty$ για κάθε $f \in C(K)$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι η π διατηρεί την διάταξη, δηλαδή αν μια $f \in C(K)$ είναι μη αρνητική, τότε ο $\pi(f)$ είναι θετικός τελεστής. Πράγματι, αν $g = \sqrt{f}$ τότε $\pi(g)^* = \pi(\bar{g}) = \pi(g)$ άρα $\pi(f) = \pi(g^2) = \pi(g)^2 = \pi(g)^*\pi(g) \geq 0$.

Έστω τώρα $f \in C(K)$ με $\|f\|_\infty \leq 1$. Τότε η συνάρτηση $\mathbf{1} - f^*f = \mathbf{1} - |f|^2$ είναι μη αρνητική, και συνεπώς $\pi(\mathbf{1} - f^*f) \geq 0$, άρα για κάθε $x \in H$ έχουμε $\langle (I - \pi(f^*f))x, x \rangle \geq 0$, οπότε

$$\|\pi(f)x\|^2 = \langle \pi(f)x, \pi(f)x \rangle = \langle \pi(f^*f)x, x \rangle \leq \|x\|^2,$$

πράγμα που δείχνει ότι $\|\pi(f)\| \leq 1$. □

Από την Πρόταση 7.1.8 έπεται ότι κάθε φασματικό μέτρο $\{E(\Omega) : \Omega \subseteq K \text{ Borel}\} \subseteq \mathcal{B}(H)$ ορίζει έναν *-μορφισμό $\pi : C(K) \to \mathcal{B}(H)$ από την σχέση

$$\pi(f) = \int_K f dE \qquad (f \in C(K)).$$

[3] Εν γένει ο τελεστής $P := \pi(\mathbf{1})$ είναι ορθή προβολή. Αν $H_o = P(H)$ είναι το σύνολο τιμών της, τότε ο H_o ανάγει κάθε $\pi(f)$ $(f \in C(K))$ και ο $\pi(f)$ μηδενίζεται στον $H_o^\perp$. Επομένως, περιοριζόμενοι στον H_o, μπορούμε να υποθέτουμε ότι $\pi(\mathbf{1}) = I$.

Αντίστροφα,

Θεώρημα 7.1.10. *Έστω K συμπαγής χώρος Hausdorff. Κάθε *-αναπαράσταση π της $C(K)$ σ'έναν χώρο Hilbert H ορίζει ένα* ***μοναδικό*** *κανονικό φασματικό μέτρο $E(\cdot)$ ορισμένο στα Borel υποσύνολα του K ώστε*

$$\int_K f dE = \pi(f) \qquad (f \in C(K)).$$

Η απόδειξη στηρίζεται σε δύο θεμελιώδη θεωρήματα, που ονομάζονται και τα δύο «Θεωρήματα Αναπαράστασης του Riesz»:

Θεώρημα 7.1.11. *Για κάθε συνεχή γραμμική μορφή $\phi : C(K) \longrightarrow \mathbb{C}$ υπάρχει* ***μοναδικό*** *κανονικό μιγαδικό μέτρο Borel μ στο K ώστε*

$$\int_K f d\mu = \phi(f) \qquad (f \in C(K))$$

και $\|\phi\| = \|\mu\|$, όπου $\|\mu\| = |\mu|(K)$ η ολική κύμανση του μ.

Για την απόδειξη, βλέπε π.χ. Γ. Κουμουλλής, Σ. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μέτρου*, Εκδ. Συμμετρία, 1988, Θεώρημα 12.38.

Σημείωση Για μια απόδειξη που χρησιμοποιεί μόνον θετικά μέτρα, δες το Παράρτημα 7.1.3.

Θεώρημα 7.1.12 (Πρόταση 2.1.2). *Για κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή $\psi : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ υπάρχει* ***μοναδικός*** *$T \in \mathcal{B}(H)$ ώστε*

$$\psi(x, y) = \langle Tx, y \rangle \quad (x, y \in H)$$

και

$$\|T\| = \sup\{|\psi(x, y)| : \|x\| \le 1, \|y\| \le 1\}.$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.10 :

Μοναδικότητα : Αν δύο **κανονικά** φασματικά μέτρα Borel $E(\cdot)$ και $F(\cdot)$ ικανοποιούν

$$\int_K f dE = \pi(f) = \int_K f dF$$

για κάθε $f \in C(K)$, τότε θέτοντας $\mu_{x,y}(\Omega) = \langle E(\Omega)x, y \rangle$ και $\nu_{x,y}(\Omega) = \langle F(\Omega)x, y \rangle$, έχουμε

$$\int_K f d\mu_{x,y} = \int_K f d\nu_{x,y}$$

για κάθε $f \in C(K)$. Από την μοναδικότητα στο Θεώρημα 7.1.11 έπεται ότι $\mu_{x,y}(\Omega) = \nu_{x,y}(\Omega)$, δηλαδή $\langle E(\Omega)x, y \rangle = \langle F(\Omega)x, y \rangle$ για κάθε Borel $\Omega \subseteq K$. Αφού η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε $x, y \in H$, συμπεραίνουμε ότι $E(\Omega) = F(\Omega)$.

Ύπαρξη : (i) Αν σταθεροποιήσουμε δύο διανύσματα $x, y \in H$, η απεικόνιση

$$C(K) \longrightarrow \mathbb{C} : f \mapsto \langle \pi(f)x, y \rangle$$

είναι γραμμική μορφή, και φράσσεται από $\|x\| \cdot \|y\|$, διότι

$$|\langle \pi(f)x, y \rangle| \le \|\pi(f)\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| \le \|f\|_\infty \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

από το Λήμμα 7.1.9. Από το Θεώρημα 7.1.11, υπάρχει **μοναδικό** κανονικό μιγαδικό μέτρο Borel $\mu_{x,y}$ στο K ώστε

(7.1.3.1) $$\int_K f d\mu_{x,y} = \langle \pi(f)x, y\rangle \qquad \text{για κάθε } f \in C(K)$$

και τέτοιο ώστε

$$\|\mu_{x,y}\| \leq \|x\|.\|y\|.$$

(ii) Σταθεροποιούμε τώρα ένα Borel υποσύνολο $\Omega \subseteq K$ και θεωρούμε την απεικόνιση

$$H \times H \longrightarrow \mathbb{C} : \ (x, y) \mapsto \mu_{x,y}(\Omega).$$

Παρατηρούμε ότι είναι sesquilinear και φράσσεται από 1, δηλαδή

$$\begin{aligned} \mu_{x_1+\lambda x_2,y}(\Omega) &= \mu_{x_1,y}(\Omega) + \lambda\mu_{x_2,y}(\Omega) \\ \mu_{x,y_1+\lambda y_2}(\Omega) &= \mu_{x,y_1}(\Omega) + \overline{\lambda}\mu_{x,y_2}(\Omega) \\ |\mu_{x,y}(\Omega)| &\leq \|\mu_{x,y}\| \leq \|x\|.\|y\|. \end{aligned}$$

Πράγματι: η ανισότητα $|\mu_{x,y}(\Omega)| \leq \|\mu_{x,y}\|$ έπεται από τον ορισμό της κύμανσης (Γ. Κουμουλλής, Σ. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μέτρου*, Εκδ. Συμμετρία, 1988, Ορισμός 10.21). Επίσης, για κάθε $f \in C(K)$,

$$\begin{aligned} \int f d\mu_{x,y_1+\lambda y_2} &= \langle \pi(f)x, y_1 + \lambda y_2\rangle = \langle \pi(f)x, y_1\rangle + \overline{\lambda}\langle \pi(f)x, y_2\rangle \\ &= \int f d\mu_{x,y_1} + \overline{\lambda}\int f d\mu_{x,y_2} \end{aligned}$$

συνεπώς τα μέτρα $\Omega \longrightarrow \mu_{x,y_1+\lambda y_2}(\Omega)$ και $\Omega \longrightarrow \mu_{x,y_1}(\Omega) + \overline{\lambda}\mu_{xy_2}(\Omega)$ ορίζουν την ίδια γραμμική μορφή στον $C(K)$ άρα, από την μοναδικότητα στο Θεώρημα 7.1.11, είναι ίσα. Ομοίως αποδεικνύεται η πρώτη ισότητα.

Από το Θεώρημα 7.1.12, υπάρχει **μοναδικός** τελεστής $E(\Omega) \in \mathcal{B}(H)$ ώστε

(7.1.3.2) $$\langle E(\Omega)x, y\rangle = \mu_{x,y}(\Omega) \qquad \text{για κάθε } x, y \in H.$$

(iii) Πρέπει να δειχθεί ότι το $E(\cdot)$ είναι φασματικό μέτρο. Είναι φανερό από τον ορισμό ότι $E(\emptyset) = 0$, ότι $E(K) = I$ και, φυσικά, ότι το $\Omega \longrightarrow \langle E(\Omega)x, y\rangle \ (= \mu_{x,y}(\Omega))$ είναι σ-προσθετικό μέτρο για κάθε x, y.

(α) Ισχυρισμός : $E(\Omega)^* = E(\Omega)$.

Απόδειξη : Για κάθε $f \in C(K)$ έχουμε $\pi(\bar{f}) = \pi(f)^*$, άρα, αν θέσουμε $\overline{\mu_{y,x}}(\Omega) = \overline{\mu_{y,x}(\Omega)}$,

$$\int f d\mu_{x,y} = \langle \pi(f)x, y\rangle = \overline{\langle \pi(f)^*y, x\rangle} = \overline{\int \bar{f} d\mu_{y,x}} = \int f d\overline{\mu_{y,x}},$$

πράγμα που δείχνει ότι τα μέτρα $\mu_{x,y}$ και $\overline{\mu_{y,x}}$ ταυτίζονται, δηλαδή ότι

$$\langle E(\Omega)x, y\rangle = \overline{\langle E(\Omega)y, x\rangle} = \langle x, E(\Omega)y\rangle. \qquad \square$$

(β) Ισχυρισμός : $E(\Omega_1 \cap \Omega_2) = E(\Omega_1) \cdot E(\Omega_2)$ για κάθε ζεύγος Borel υποσυνόλων Ω_1, Ω_2 του K.

Απόδειξη : Για κάθε $f, g \in C(K)$ έχουμε

$$\langle \pi(fg)x, y\rangle = \langle \pi(f)\pi(g)x, y\rangle = \langle \pi(f)(\pi(g)x), y\rangle$$

και συνεπώς, χρησιμοποιώντας την (7.1.3.1) για τα διανύσματα $\pi(g)x$ και y,

$$\int fg d\mu_{x,y} = \int f d\mu_{\pi(g)x,y} \,.$$

Αφού η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $f \in C(K)$, τα αντίστοιχα μέτρα ταυτίζονται, δηλαδή

$$\int_{\Omega_1} g d\mu_{x,y} = \int_{\Omega_1} d\mu_{\pi(g)x,y} = \mu_{\pi(g)x,y}(\Omega_1)$$

για κάθε Borel $\Omega_1 \subseteq K$. Από την (7.1.3.2), η σχέση αυτή γράφεται

$$\int_{\Omega_1} g d\mu_{x,y} = \langle E(\Omega_1)\pi(g)x, y\rangle.$$

Αλλά

$$\langle E(\Omega_1)\pi(g)x, y\rangle = \langle \pi(g)x, E(\Omega_1)^* y\rangle$$

και από την (7.1.3.1) έχουμε

$$\langle \pi(g)x, E(\Omega_1)^* y\rangle = \int g d\mu_{x,E(\Omega_1)^* y}$$

οπότε

$$\int_{\Omega_1} g d\mu_{x,y} = \int g d\mu_{x,E(\Omega_1)^* y}.$$

Αφού η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $g \in C(K)$, τα αντίστοιχα μέτρα ταυτίζονται, δηλαδή

$$\int_{\Omega_1} \chi_{\Omega_2} d\mu_{x,y} = \int \chi_{\Omega_2} d\mu_{x,E(\Omega_1)^* y}$$

για κάθε Borel $\Omega_2 \subseteq K$. Αλλά

$$\int_{\Omega_1} \chi_{\Omega_2} d\mu_{x,y} = \mu_{x,y}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \quad \text{και} \quad \int \chi_{\Omega_2} d\mu_{x,E(\Omega_1)^* y} = \mu_{x,E(\Omega_1)^* y}(\Omega_2)$$

και συνεπώς από την (7.1.3.2)

$$\langle E(\Omega_1 \cap \Omega_2)x, y\rangle = \langle E(\Omega_2)x, E(\Omega_1)^* y\rangle = \langle E(\Omega_1)E(\Omega_2)x, y\rangle.$$

Αφού αυτή η σχέση ισχύει για κάθε $x, y \in H$, δείξαμε ότι $E(\Omega_1 \cap \Omega_2) = E((\Omega_1) \cdot E(\Omega_2)$, πράγμα που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατήρηση 7.1.13. *Οι προβολές $E(\Omega)$ ($\Omega \subseteq K$ Borel) δεν ανήκουν, εν γένει, στην C^*-άλγεβρα $\mathcal{B} = \{\pi(f) : f \in C(K)\}$. Ανήκουν όμως στην (εν γένει) μεγαλύτερη άλγεβρα $\mathcal{B}''$, τον* ***δεύτερο μεταθέτη*** *της $\mathcal{B}$, δηλαδή μετατίθενται με κάθε φραγμένο τελεστή που μετατίθεται με την $\mathcal{B}$.*

Μάλιστα, ένας τελεστής $X \in \mathcal{B}(H)$ μετατίθεται με κάθε στοιχείο $\pi(f)$ της $\mathcal{B}$ αν και μόνον αν μετατίθεται με κάθε $E(\Omega)$. Πράγματι, η σχέση $X\pi(f) = \pi(f)X$ ισχύει αν και μόνον αν για κάθε $x, y \in H$ έχουμε

$$\begin{aligned} \langle X\pi(f)x, y\rangle = \langle \pi(f)Xx, y\rangle \quad &\iff \quad \langle \pi(f)x, X^* y\rangle = \langle \pi(f)Xx, y\rangle \\ &\iff \quad \int f d\mu_{x,X^* y} = \int f d\mu_{Xx,y} \,. \end{aligned}$$

Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $f \in C(K)$ αν και μόνον αν τα μέτρα $\mu_{x,X^* y}$ και $\mu_{Xx,y}$ είναι ίσα, δηλαδή αν και μόνον αν

$$\langle E(\Omega)x, X^* y\rangle = \langle E(\Omega)Xx, y\rangle$$

για κάθε $\Omega \subseteq K$ *Borel δηλαδή*

$$\langle XE(\Omega)x, y\rangle = \langle E(\Omega)Xx, y\rangle$$

για κάθε $\Omega \subseteq K$ *Borel.*

Δείξαμε λοιπόν ότι $X\pi(f) = \pi(f)X$ *για κάθε* $f \in C(K)$ *αν και μόνον αν* $XE(\Omega) = E(\Omega)X$ *για κάθε* $\Omega \subseteq K$ *Borel. Δηλαδή οι μεταθέτες*

$$\mathcal{B}' \quad \text{και} \quad \{E(\Omega) : \Omega \subseteq K \text{ Borel }\}'$$

ταυτίζονται, άρα και οι δεύτεροι μεταθέτες ταυτίζονται:

$$\{\pi(f) : f \in C(K)\}'' = \{E(\Omega) : \Omega \subseteq K \text{ Borel }\}''.$$

Οι αυτοσυζυγείς άλγεβρες της μορφής $\mathcal{B}''$ *ονομάζονται* ***άλγεβρες von Neumann*** *(δες και την παράγραφο 9.1).*

Παράρτημα: Εναλλακτική προσέγγιση στο Θεώρημα 7.1.10

Θα αποφύγουμε τα μιγαδικά μέτρα, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz για *θετικά* μόνο μέτρα:

Θεώρημα 7.1.14. *Έστω* K *συμπαγής χώρος Hausdorff. Για κάθε* ***θετική***[4] *γραμμική μορφή* $\phi : C(K) \longrightarrow \mathbb{C}$ *υπάρχει* ***μοναδικό*** *κανονικό θετικό μέτρο Borel* μ *στο* K *ώστε*

$$\int_K f d\mu = \phi(f) \qquad (f \in C(K)).$$

Για την απόδειξη, βλ. π.χ. Γ. Κουμουλλής, Σ. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μέτρου*, Εκδ. Συμμετρία, 1988, Θεώρημα 12.26.

Παρατήρηση 7.1.15. *Η μοναδικότητα στο Θεώρημα 7.1.14 μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:*

Αν δύο κανονικά (θετικά) μέτρα Borel μ *και* ν *στο* K *δίνουν το ίδιο ολοκλήρωμα σε κάθε συνεχή συνάρτηση, τότε είναι ίσα, οπότε δίνουν το ίδιο ολοκλήρωμα σε κάθε φραγμένη Borel μετρήσιμη συνάρτηση.*

Θα χρειασθούμε το παρακάτω Λήμμα:

Λήμμα 7.1.16. *Αν* M *είναι μια* ***πεπερασμένη*** *οικογένεια από* ***κανονικά*** *θετικά μέτρα Borel στο* K, *τότε για κάθε Borel φραγμένη συνάρτηση* $h : K \to \mathbb{C}$ *υπάρχει ακολουθία* (f_n) *συνεχών συναρτήσεων με* $\|f_n\|_\infty \leq \|h\|_\infty$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *ώστε*

$$\int h d\mu = \lim_n \int f_n d\mu \quad \text{για κάθε} \quad \mu \in M.$$

Απόδειξη. (Γ. Ελευθεράκης): Θέτουμε $\mu_o = \sum_{\mu \in M} \mu$ (πεπερασμένο άθροισμα). Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι το μ_o είναι κανονικό μέτρο. Άρα, από το Θεώρημα Lusin (Γ. Κουμουλλής, Σ. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μέτρου*, Εκδ. Συμμετρία, 1988, Θεώρημα 12.2 (ii)), για κάθε Borel φραγμένη συνάρτηση h και

[4] δηλ. $f \geq 0 \Rightarrow \phi(f) \geq 0$.

κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $f_n \in C(K)$ με $\|f_n\|_\infty \leq \|h\|_\infty$ώστε το σύνολο $K_n := \{t \in K : f_n(t) \neq h(t)\}$ να έχει $\mu_o(K_n) < \frac{1}{n}$, οπότε $\mu(K_n) < \frac{1}{n}$ για κάθε $\mu \in M$. Έχουμε λοιπόν

$$\left|\int h d\mu - \int f_n d\mu\right| \leq \int |h - f_n| d\mu \leq \|h - f_n\|_\infty \mu(K_n) < 2\|h\|_\infty \frac{1}{n}. \quad \square$$

Σημείωση : Η μοναδικότητα στο Θεώρημα 7.1.14 έπεται και από το Λήμμα: Αν μ, ν είναι δύο **κανονικά** θετικά μέτρα Borel και $\int f d\mu = \int f d\nu$ για κάθε $f \in C(K)$, τότε $\mu = \nu$.

Δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.10

Μοναδικότητα : Αν δύο **κανονικά** φασματικά μέτρα Borel $E(\cdot)$ και $F(\cdot)$ ικανοποιούν

$$\int_K f dE = \pi(f) = \int_K f dF$$

για κάθε $f \in C(K)$, τότε θέτοντας $\mu_x(\Omega) = \langle E(\Omega)x, x\rangle$ και $\nu_x(\Omega) = \langle F(\Omega)x, x\rangle$, έχουμε

$$\int_K f d\mu_x = \int_K f d\nu_x$$

για κάθε $f \in C(K)$. Επειδή τα δύο μέτρα είναι κανονικά, συμπεραίνουμε ότι κατ' ανάγκη θα ταυτίζονται: $\mu_x(\Omega) = \nu_x(\Omega)$, δηλαδή $\langle E(\Omega)x, x\rangle = \langle F(\Omega)x, x\rangle$ για κάθε Borel $\Omega \subseteq K$. Αφού η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε $x \in H$, συμπεραίνουμε (από την ταυτότητα πολικότητας) ότι $E(\Omega) = F(\Omega)$.

Ύπαρξη : (i) Αν σταθεροποιήσουμε ένα $x \in H$, η απεικόνιση

$$C(K) \longrightarrow \mathbb{C} : \ f \longrightarrow \langle \pi(f)x, x\rangle$$

είναι γραμμική μορφή, και είναι θετική, διότι αν $f \geq 0$, τότε $f = g^*g$ όπου $g = \sqrt{f}$, οπότε

$$\langle \pi(f)x, x\rangle = \langle \pi(g)^*\pi(g)x, x\rangle = \|\pi(g)x\|^2 \geq 0.$$

Από το Θεώρημα 7.1.14, υπάρχει **μοναδικό** κανονικό θετικό μέτρο Borel μ_x στο K ώστε

(7.1.3.3) $$\int_K f d\mu_x = \langle \pi(f)x, x\rangle \qquad \text{για κάθε } f \in C(K).$$

Μάλιστα

$$\mu_x(K) = \int \mathbf{1} d\mu_x = \langle \pi(\mathbf{1})x, x\rangle = \|x\|^2.$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα φασματικό μέτρο $E(\cdot)$ που «γεννάει» όλα τα μ_x με την έννοια ότι

$$\mu_x(\Omega) = \langle E(\Omega)x, x\rangle \qquad \text{για κάθε } x \in H \text{ και } \Omega \subseteq K \text{ Borel.}$$

Τότε, αν $f \in C(K)$, από τον ορισμό του $\int f dE$ θα έχουμε

$$\left\langle \left(\int f dE\right)x, x\right\rangle = \int f d\mu_x$$

για κάθε $x \in H$ οπότε

$$\int f dE = \pi(f)$$

λόγω της (7.1.3.3).

(ii) Αν εφαρμόσουμε την ταυτότητα πολικότητας στη σχέση (7.1.3.3) έχουμε, για κάθε $x, y \in H$,

$$\begin{aligned}\langle \pi(f)x, y\rangle &= \frac{1}{4}\left(\langle \pi(f)(x+y), x+y\rangle - \langle \pi(f)(x-y), x-y\rangle\right)\\ &+ \frac{i}{4}\left(\langle \pi(f)(x+iy), x+iy\rangle - \langle \pi(f)(x-iy), x-iy\rangle\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\int f d\mu_{x+y} - \int f d\mu_{x-y}\right) + \frac{i}{4}\left(\int f d\mu_{x+iy} - \int f d\mu_{x-iy}\right).\end{aligned}$$

Σταθεροποιούμε τώρα μία φραγμένη συνάρτηση Borel $h : K \to \mathbb{C}$ και ορίζουμε την απεικόνιση

$$\phi_h : H \times H \to \mathbb{C}$$

από την σχέση

$$\phi_h(x, y) = \frac{1}{4}\left(\int h d\mu_{x+y} - \int h d\mu_{x-y}\right) + \frac{i}{4}\left(\int h d\mu_{x+iy} - \int h d\mu_{x-iy}\right) \tag{7.1.3.4}$$

(οπότε $\phi_h(x, y) = \langle \pi(h)x, y\rangle$ όταν η h είναι συνεχής).

Ισχυρισμός 1. Για κάθε πεπερασμένη οικογένεια $X := \{(x_k, y_k) \in H \times H : k = 1, \ldots, m\}$ υπάρχει ακολουθία (f_n) συνεχών συναρτήσεων με $\|f_n\|_\infty \le \|h\|_\infty$ ώστε

$$\phi_h(x_k, y_k) = \lim_{n\to\infty} \langle \pi(f_n)x_k, y_k\rangle, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Απόδειξη : Εφαρμόζουμε το Λήμμα στο πεπερασμένο σύνολο μέτρων

$$M = \{\mu_{x_k+y_k}, \mu_{x_k-y_k}, \mu_{x_k+iy_k}, \mu_{x_k-iy_k}, \quad k = 1, \ldots, m\}.$$

Υπάρχει ακολουθία (f_n) συνεχών συναρτήσεων με $\|f_n\|_\infty \le \|h\|_\infty$ ώστε

$$\int h d\mu = \lim_n \int f_n d\mu \quad \text{για κάθε} \quad \mu \in M$$

άρα, από την (7.1.3.4),

$$\begin{aligned}\phi_h(x_k, y_k) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(\int f_n d\mu_{x_k+y_k} - \int f_n d\mu_{x_k-y_k}\right)\\ &+ \lim_{n\to\infty} \frac{i}{4}\left(\int f_n d\mu_{x_k+iy_k} - \int f_n d\mu_{x_k-iy_k}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \langle \pi(f_n)x_k, y_k\rangle, \quad k = 1, \ldots, m. \qquad \square\end{aligned}$$

Ισχυρισμός 2. Η ϕ_h είναι sequilinear και φραγμένη. Μάλιστα $|\phi_h(x, y)| \le \|x\| \|y\| \|h\|_\infty$ για κάθε $x, y \in H$.

Απόδειξη : Αν $x, y \in H$, απο τον Ισχυρισμό 1 υπάρχει ακολουθία (f_n) συνεχών συναρτήσεων με $\|f_n\|_\infty \le \|h\|_\infty$ ώστε $\phi_h(x, y) = \lim_{n\to\infty} \langle \pi(f_n)x, y\rangle$. Εφόσον $|\langle \pi(f_n)x, y\rangle| \le \|x\| \|y\| \|f_n\|_\infty \le \|x\| \|y\| \|h\|_\infty$ για κάθε n, έχουμε

$$|\phi_h(x, y)| = \lim_{n\to\infty} |\langle \pi(f_n)x, y\rangle| \le \|x\| \|y\| \|h\|_\infty$$

και επομένως, αφού τα x, y ήταν τυχόντα, η ϕ_h είναι φραγμένη από $\|h\|_\infty$.

Θέλουμε τώρα να δείξουμε ότι

$$\phi_h(x + \lambda x', y) = \phi_h(x, y) + \lambda\phi_h(x', y)$$

για κάθε $x, x', y \in H$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Εφαρμόζουμε τον Ισχυρισμό 1 στην πεπερασμένη οικογένεια διανυσμάτων $\{(x, y), (x', y), (x + \lambda x', y)\}$: Υπάρχει ακολουθία (f_n) συνεχών συναρτήσεων με $\|f_n\|_\infty \le \|h\|_\infty$ ώστε

$$\begin{aligned}
\phi_h(x, y) &= \lim_{n\to\infty} \langle \pi(f_n)x, y\rangle, \\
\phi_h(x', y) &= \lim_{n\to\infty} \langle \pi(f_n)x', y\rangle, \\
\phi_h(x + \lambda x', y) &= \lim_{n\to\infty} \langle \pi(f_n)(x + \lambda x'), y\rangle
\end{aligned}$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned}
\phi_h(x + \lambda x', y) &= \lim_{n\to\infty} \langle \pi(f_n)(x + \lambda x)', y\rangle = \lim_{n\to\infty} (\langle \pi(f_n)x, y\rangle + \lambda \langle \pi(f_n)x', y\rangle) \\
&= \phi_h(x, y) + \lambda\phi_h(x', y).
\end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και η

$$\phi_h(x, y + \lambda y') = \phi_h(x, y) + \bar{\lambda}\phi_h(x, y'). \qquad \square$$

Θέτοντας τώρα $h = \chi_\Omega$ όπου $\Omega \subseteq K$ Borel, έπεται από το Θεώρημα 7.1.12 ότι υπάρχει **μοναδικός** τελεστής $E(\Omega) \in \mathcal{B}(H)$ ώστε

(7.1.3.5) $$\langle E(\Omega)x, y\rangle = \phi_{\chi_\Omega}(x, y) \qquad \text{για κάθε } x, y \in H.$$

(iii) Πρέπει να δειχθεί ότι το $E(\cdot)$ είναι φασματικό μέτρο.

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in H$,

$$\langle E(\Omega)x, x\rangle = \phi_{\chi_\Omega}(x, x) = \mu_x(\Omega).$$

Είναι φανερό από τη σχέση αυτή ότι $E(\emptyset) = 0, E(K) = I$ και ότι το $\Omega \longrightarrow \langle E(\Omega)x, x\rangle$ είναι σ-προσθετικό μέτρο για κάθε $x \in H$. Επίσης από τις σχέσεις

$$0 \le \mu_x(\Omega) \le \|x\|^2$$

έπεται ότι

$$0 \le \langle E(\Omega)x, x\rangle \le \langle x, x\rangle \quad \text{για κάθε} \;\; x \in H$$

οπότε

$$0 \le E(\Omega) \le I$$

και ειδικότερα

$$E(\Omega)^* = E(\Omega).$$

Μένει να αποδειχθεί ο

Ισχυρισμός 3 $E(\Omega_1 \cap \Omega_2) = E(\Omega_1)E(\Omega_2)$ για κάθε ζεύγος Borel υποσυνόλων Ω_1, Ω_2 του K.

Απόδειξη : Θα προκύψει από την πολλαπλασιαστικότητα της π: $\pi(fg) = \pi(f)\pi(g)$.

Υπενθυμίζουμε ότι, αν $x, y \in H$, για κάθε $f \in C(K)$,

(7.1.3.6) $$\phi_f(x, y) = \langle \pi(f)x, y \rangle .$$

Για κάθε $f, g \in C(K)$ έχουμε

$$\langle \pi(fg)x, x \rangle = \langle \pi(f)\pi(g)x, x \rangle = \langle \pi(f)(\pi(g)x), x \rangle$$

και συνεπώς, χρησιμοποιώντας την (7.1.3.6) για τα διανύσματα $z := \pi(g)x$ και x,

(7.1.3.7) $$\phi_{fg}(x, x) = \langle \pi(f)(\pi(g)x), x \rangle = \phi_f(z, x)$$

δηλαδή

$$\int fg d\mu_x = \frac{1}{4}\left(\int f d\mu_{z+x} - \int f d\mu_{z-x}\right) + \frac{i}{4}\left(\int f d\mu_{z+ix} - \int f d\mu_{z-ix}\right)$$

για κάθε $f \in C(K)$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα για τη συνάρτηση $h = \chi_{\Omega_1}$ και το σύνολο θετικών κανονικών μέτρων $M = \{g d\mu_x, d\mu_{z+x}, d\mu_{z-x}, d\mu_{z+ix}, d\mu_{z-ix}\}$, βρίσκουμε ακολουθία (f_n) από συνεχείς συναρτήσεις με $\|f_n\|_\infty \leq 1$ ώστε $\int f_n d\mu \to \int \chi_{\Omega_1} d\mu$ για κάθε $\mu \in M$. Τότε όμως η τελευταία ισότητα δίνει

$$\int \chi_{\Omega_1} g d\mu_x = \frac{1}{4}\left(\int \chi_{\Omega_1} d\mu_{z+x} - \int \chi_{\Omega_1} d\mu_{z-x}\right) + \frac{i}{4}\left(\int \chi_{\Omega_1} d\mu_{z+ix} - \int \chi_{\Omega_1} d\mu_{z-ix}\right)$$

δηλαδή

(7.1.3.8) $$\phi_{\chi_{\Omega_1} g}(x, x) = \phi_{\chi_{\Omega_1}}(\pi(g)x, x)$$

για κάθε Borel $\Omega_1 \subseteq K$. Όμως, από τον ορισμό του $E(\Omega_1)$,

$$\phi_{\chi_{\Omega_1}}(\pi(g)x, x) = \langle E(\Omega_1)\pi(g)x, x \rangle = \langle \pi(g)x, E(\Omega_1)x \rangle$$

(εφόσον $E(\Omega_1)^* = E(\Omega_1)$) και από την (7.1.3.6)

$$\langle \pi(g)x, E(\Omega_1)x \rangle = \phi_g(x, E(\Omega_1)x)$$

οπότε η (7.1.3.8) δίνει

(7.1.3.9) $$\phi_{g\chi_{\Omega_1}}(x, x) = \phi_{\chi_{\Omega_1} g}(x, x) = \phi_g(x, E(\Omega_1)x) = \phi_g(x, w) \quad \text{όπου} \quad w = E(\Omega_1)x.$$

Χρησιμοποιώντας πάλι το Λήμμα για την $h = \chi_{\Omega_2}$ και το σύνολο θετικών κανονικών μέτρων $M = \{\chi_{\Omega_1} d\mu_x, d\mu_{x+w}, d\mu_{x-w}, d\mu_{x+iw}, d\mu_{x-iw}\}$, βρίσκουμε ακολουθία (g_n) από συνεχείς συναρτήσεις με $\|g_n\|_\infty \leq 1$ ώστε $\int g_n d\mu \to \int \chi_{\Omega_2} d\mu$ για κάθε [5] $\mu \in M$. Έπεται απο την (7.1.3.9) ότι

$$\phi_{\chi_{\Omega_2}\chi_{\Omega_1}}(x, x) = \lim_n \phi_{g_n \chi_{\Omega_1}}(x, x) = \lim_n \phi_{g_n}(x, w) = \phi_{\chi_{\Omega_2}}(x, E(\Omega_1)x)$$

για κάθε Borel $\Omega_2 \subseteq K$. Αλλά

$$\phi_{\chi_{\Omega_1}\chi_{\Omega_2}}(x, x) = \phi_{\chi_{\Omega_1 \cap \Omega_2}}(x, x) = \langle E(\Omega_1 \cap \Omega_2)x, x \rangle$$

$$\text{και} \quad \phi_{\chi_{\Omega_2}}(x, E(\Omega_1)x) = \langle E(\Omega_2)x, E(\Omega_1)x \rangle$$

συνεπώς

$$\langle E(\Omega_1 \cap \Omega_2)x, x \rangle = \langle E(\Omega_2)x, E(\Omega_1)x \rangle = \langle E(\Omega_1)E(\Omega_2)x, x \rangle.$$

Αφού αυτή η σχέση ισχύει για κάθε $x \in H$, δείξαμε ότι $E(\Omega_1 \cap \Omega_2) = E((\Omega_1)E(\Omega_2)$, πράγμα που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

[5] π.χ. $\int g_n \chi_{\Omega_1} d\mu_x \to \int \chi_{\Omega_2}\chi_{\Omega_1} d\mu_x$

7.1.4 Το Φασματικό Θεώρημα

Συνεχείς συναρτήσεις ενός φυσιολογικού τελεστή

Θα χρησιμοποιήσουμε χωρίς απόδειξη δύο αποτελέσματα για φυσιολογικούς τελεστές, τα οποία έχουμε αποδείξει για την ειδική περίπτωση των αυτοσυζυγών τελεστών. Αποδείξεις των αποτελεσμάτων αυτών υπάρχουν σε όλα τα συγγράμματα που αναφέρονται σε C^*-άλγεβρες ή άλγεβρες τελεστών (βλ. π.χ. (3), (6), (11) της προτεινόμενης βιβλιογραφίας).

Λήμμα 7.1.17. *(i) Το φάσμα οποιουδήποτε τελεστή* [6] *είναι μη κενό και (όπως έχουμε αποδείξει) συμπαγές υποσύνολο του* $\mathbb{C}$.

(ii) Η φασματική ακτίνα κάθε φυσιολογικού τελεστή ισούται με την νόρμα του.

Λήμμα 7.1.18. *Έστω* $T \in \mathcal{B}(H)$ *φυσιολογικός τελεστής. Τότε, για κάθε πολυώνυμο δύο μεταβλητών* $p(t,s) = \sum\limits_{n,m=0}^{N} c_{nm}t^n s^m$,

$$\sigma(p(T,T^*)) = \{p(z,\bar{z}) : z \in \sigma(T)\}.$$

Αν ο T είναι φυσιολογικός τελεστής, τότε και ο $p(T,T^*)$ είναι φυσιολογικός. Πράγματι, ο $p(T,T^*)$ ανήκει στην υπάλγεβρα $\mathcal{B}_o$ του $\mathcal{B}(H)$ που παράγεται από τον T, τον T^* και τον I, η οποία είναι *μεταθετική* *-άλγεβρα, αφού οι T και T^* μετατίθενται.

Επομένως από τα δύο προηγούμενα Λήμματα συμπεραίνουμε αμέσως το

Πόρισμα 7.1.19. *Με τους συμβολισμούς του προηγουμένου Λήμματος,*

$$\|p(T,T^*)\| = \sup\{|p(z,\bar{z})| : z \in \sigma(T)\}.$$

Έστω $\mathcal{A}_o \subseteq C(\sigma(T))$ η *-υπάλγεβρα που παράγεται από τις συναρτήσεις f_o, $\overline{f}_o$ και $\mathbf{1}$, όπου $f_o(z) = z$. Τα στοιχεία της $\mathcal{A}_o$ είναι όλα της μορφής $p(f_o, \overline{f}_o)$, όπου p πολυώνυμο δύο μεταβλητών. Είναι φανερό ότι η απεικόνιση $\Psi_o : p(f_o,\overline{f}_o) \to p(T,T^*)$ είναι *-μορφισμός από την $\mathcal{A}_o$ στον $\mathcal{B}(H)$. Το τελευταίο πόρισμα δείχνει ότι η απεικόνιση αυτή είναι ισομετρία (άρα και 1-1). Επομένως επεκτείνεται σε ισομετρικό *-μορφισμό Ψ ορισμένο στην κλειστή θήκη της $\mathcal{A}_o$. Όμως από την μιγαδική μορφή του Θεωρήματος Stone - Weierstrass (βλ. π.χ. (3) της προτεινόμενης βιβλιογραφίας, Θεώρημα V.8.1) έπεται ότι η κλειστή αυτή θήκη ταυτίζεται με την $C(\sigma(T))$. Πράγματι, η $\mathcal{A}_o$ είναι εξ ορισμού αυτοσυζυγής άλγεβρα που περιέχει τις σταθερές, και χωρίζει τα σημεία του συμπαγούς συνόλου $\sigma(T)$ επειδή περιέχει την ταυτοτική συνάρτηση f_o. Αποδείξαμε λοιπόν το

Θεώρημα 7.1.20 (Συναρτησιακός λογισμός). *Αν* $T \in \mathcal{B}(H)$ *είναι φυσιολογικός τελεστής, η απεικόνιση*

$$\Psi_o : p(f_o,\overline{f}_o) \to p(T,T^*)$$

*επεκτείνεται σε ισομετρικό *-μορφισμό* $\Psi : C(\sigma(T)) \to \mathcal{B}(H)$. *Το σύνολο τιμών του* Ψ *είναι η* $C^*(T)$, *η μικρότερη* C^**-υπάλγεβρα του* $\mathcal{B}(H)$ *που περιέχει τον* T *και τον ταυτοτικό τελεστή* I.

Γράφουμε συνήθως $f(T) := \Psi(f)$. Δηλαδή για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$, ο τελεστής $f(T) \in \mathcal{B}(H)$ ορίζεται μοναδικά από το όριο $f(T) = \lim\limits_n p_n(T,T^*)$, όπου (p_n) είναι ακολουθία μιγαδικών πολυωνύμων δύο μεταβλητών ώστε $p_n(z,\bar{z}) \to f(z)$ ομοιόμορφα ως προς $z \in \sigma(T)$.

[6] μάλιστα, οποιουδήποτε στοιχείου μιας άλγεβρας Banach

Το Φασματικό Θεώρημα για φυσιολογικούς τελεστές

Θεώρημα 7.1.21 (Το Φασματικό Θεώρημα). *Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι φυσιολογικός τελεστής, τότε υπάρχει μοναδικό* ***κανονικό*** *φασματικό μέτρο $\{E(\Omega) : \Omega \subseteq \mathbb{C}$ Borel $\}$ που φέρεται από το $\sigma(T)$ ώστε*

$$T = \int \lambda dE_\lambda.$$

Τέλος, ένας $X \in \mathcal{B}(H)$ μετατίθεται με τον T αν και μόνον αν μετατίθεται με κάθε $E(\Omega)$.

Απόδειξη. Αν $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι η C*-άλγεβρα $C^*(T)$ που παράγει ο T και ο I, η απεικόνιση

$$\Psi : C(\sigma(T)) \longrightarrow \mathcal{B} : f \longrightarrow f(T)$$

είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός (Θεώρημα 7.1.20). Εφαρμόζεται λοιπόν το Θεώρημα 7.1.10, σύμφωνα με το οποίο η Ψ ορίζει μοναδικό κανονικό φασματικό μέτρο Borel E_o στο συμπαγές $\sigma(T)$. Επεκτείνουμε το μέτρο αυτό στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{C}$ θέτοντας

$$E(\Omega) = E_o(\Omega \cap \sigma(T)) \quad (\Omega \subseteq \mathbb{C} \text{ Borel}).$$

Το μέτρο αυτό *φέρεται από το $\sigma(T)$* με την έννοια ότι κάθε ανοικτό $U \subseteq \mathbb{C}$ με $U \cap \sigma(T) = \emptyset$ ικανοποιεί $E(U) = 0$.

Έχουμε

$$\Psi(f) = \int f(\lambda) dE_\lambda$$

για κάθε $f \in C(\sigma(T))$ και επομένως

$$T = \Psi(id) = \int \lambda dE_\lambda.$$

Μένει να αποδειχθεί ο τελευταίος ισχυρισμός, ότι $XT = TX$ αν και μόνον αν $XE(\Omega) = E(\Omega)X$ για κάθε $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Borel.

Υποθέτουμε πρώτα ότι ο T είναι αυτοσυζυγής. Παρατηρούμε ότι ένας τελεστής X μετατίθεται με τον T αν και μόνον αν μετατίθεται με κάθε T^n, επομένως αν και μόνον αν μετατίθεται με την κλειστή θήκη του συνόλου των πολυωνύμων του T. Αλλά **επειδή ο T είναι αυτοσυζυγής**, από το Πόρισμα 5.1.12 γνωρίζουμε ότι η θήκη αυτή είναι το σύνολο $\{f(T) : f \in C(\sigma(T))\}$, δηλαδή η $C^*(T)$. Έπεται από την Παρατήρηση 7.1.13 ότι

$$XT = TX \iff XE(\Omega) = E(\Omega)X \quad \text{για κάθε } \Omega \subset \mathbb{C} \text{ Borel.}$$

□

Στην γενική περίπτωση, που ο T είναι απλώς φυσιολογικός, η κλειστή θήκη των πολυωνύμων του T δεν περιέχει εν γένει όλους τους $f(T)$ όπου $f \in C(\sigma(T))$ (μπορεί να μην περιέχει τον T^* - δες την Άσκηση 7.1.23). Η προηγούμενη απόδειξη θα είναι πλήρης (από το Θεώρημα 7.1.20), αν δείξουμε ότι $XT = TX \Longrightarrow Xp(T, T^*) = p(T, T^*)X$ για κάθε πολυώνυμο $p(\cdot\ ,\ \cdot)$ **δύο μεταβλητών**. Αρκεί γι'αυτό να αποδείξουμε το

Θεώρημα 7.1.22 (Fuglede). *Αν ο T είναι φυσιολογικός, τότε ο X μετατίθεται με τον T αν και μόνον αν μετατίθεται με τον T^*.*

Απόδειξη. Έστω $XT = TX$. Τότε, για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, η συνάρτηση $f(z) = \exp(\bar{\lambda}z)$ είναι συνεχής στο $\sigma(T)$, άρα ορίζεται ο φυσιολογικός τελεστής $f(T) = \exp(\bar{\lambda}T)$. Επειδή ο $f(T)$ είναι όριο πολυωνύμων του T (με τα οποία ο X μετατίθεται) έχουμε

$$X \cdot \exp(\bar{\lambda}T) = \exp(\bar{\lambda}T) \cdot X$$

Αφού $(f(z))^{-1} = \exp(-\bar{\lambda}z)$, ο τελεστής $\Psi(f) = \exp(\bar{\lambda}T)$ είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο τον $\Psi(\frac{1}{f}) = \exp(-\bar{\lambda}T)$. Επομένως η προηγούμενη ισότητα γράφεται

$$X = \exp(-\bar{\lambda}T)X\exp(\bar{\lambda}T)$$

άρα

$$\exp(\lambda T^*)X\exp(-\lambda T^*) = \exp(\lambda T^*)\exp(-\bar{\lambda}T)X\exp(\bar{\lambda}T)\exp(-\lambda T^*). \tag{7.1.4.1}$$

Παρατηρούμε ότι $f(T)^* = \bar{f}(T) = \exp(\lambda T^*)$. Επειδή ο T είναι φυσιολογικός έχουμε από τον συναρτησιακό λογισμό για συνεχείς συναρτήσεις (Θεώρημα 7.1.20)

$$\exp(\lambda T^*)\exp(-\bar{\lambda}T) = \bar{f}(T)\frac{1}{f}(T) = (\bar{f}\frac{1}{f})(T) = \exp(\lambda T^* - \bar{\lambda}T)$$

(διότι $(\bar{f}\frac{1}{f})(z) = \exp(\lambda\bar{z} - \bar{\lambda}z)$). Θέτουμε $S = \lambda T^* - \bar{\lambda}T$ και παρατηρούμε ότι $S^* = -S$. Όμως η συνάρτηση exp έχει δυναμοσειρά με πραγματικούς συντελεστές, άρα $(\exp S)^* = \exp(S^*)$. Επομένως $(\exp S)^* = \exp(S^*) = \exp(-S) = (\exp S)^{-1}$, άρα $\|\exp S\|^2 = \|(\exp S)^*(\exp S)\| = 1$. Τότε όμως, από την ισότητα (7.1.4.1) έχουμε ότι

$$\|\exp(\lambda T^*)X\exp(-\lambda T^*)\| = \|(\exp S)X(\exp S^*)\| \leq \|X\|$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$. Δηλαδή, για κάθε $x, y \in H$, η συνάρτηση

$$\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : \lambda \longrightarrow \langle \exp(\lambda T^*)X\exp(-\lambda T^*)x, y\rangle$$

που είναι προφανώς ακέραια, [7] είναι φραγμένη. Επομένως, από το Θεώρημα Liouville, είναι σταθερή, άρα $\phi(\lambda) = \phi(0)$, δηλαδή

$$\langle \exp(\lambda T^*)X\exp(-\lambda T^*)x, y\rangle = \langle Xx, y\rangle$$

για κάθε $x, y \in H$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Έπεται ότι

$$\exp(\lambda T^*)X\exp(-\lambda T^*) = X\,, \text{ άρα } \exp(\lambda T^*)X = X\exp(\lambda T^*)$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$. Αναπτύσσοντας στην τελευταία ισότητα την $\exp(\lambda T^*)$ σε δυναμοσειρά και εξισώνοντας τους συντελεστές του λ, βρίσκουμε $T^*X = XT^*$. □

Άσκηση 7.1.23. *Αν U είναι ο τελεστής της αμφίπλευρης μετατόπισης ($Ue_n = e_{n+1}$) στον $\ell^2(\mathbb{Z})$, δείξτε ότι για κάθε πολυώνυμο p ισχύει $\|U^* - p(U)\| \geq 1$.*

7.1.5 Επέκταση του συναρτησιακού λογισμού

Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής και $\{E(\Omega) : \Omega \subseteq \mathbb{C}$ Borel$\}$ το φασματικό του μέτρο. Για κάθε $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ που ο περιορισμός της $f|\sigma(T)$ είναι φραγμένη και μετρήσιμη, ορίζουμε

$$f(T) = \int f(\lambda)dE_\lambda\,.$$

[7] είναι όριο πολυωνύμων του λ, ομοιόμορφα στα συμπαγή του $\mathbb{C}$.

Ειδικότερα έχουμε $\chi_\Omega(T) = E(\Omega)$ για κάθε Borel $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.

Παρατηρούμε ότι ο τελεστής $f(T)$ δεν ανήκει κατ'ανάγκη στην $C^*(T)$ (αν η $f|\sigma(T)$ δεν είναι συνεχής) αλλά $f(T) \in \{T\}''$. Πράγματι, αν ένας φραγμένος τελεστής X ανήκει στον μεταθέτη του T τότε μετατίθεται με το σύνολο $\{E(\Omega) : \Omega \subseteq \mathbb{C}$ Borel $\}$ (από το Φασματικό θεώρημα) άρα και με τον $f(T)$, που είναι όριο γραμμικών συνδυασμών φασματικών προβολών.

Από την Πρόταση 7.1.8 συμπεραίνουμε ότι:

Πρόταση 7.1.24. *Η απεικόνιση $f \longrightarrow f(T)$ είναι *-μορφισμός από την $\mathcal{L}^\infty(\sigma(T))$ στον δεύτερο μεταθέτη $\{T\}''$ που επεκτείνει τον συναρτησιακό λογισμό για πολυώνυμα, και ισχύει*

$$\|f(T)\| \leq \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma(T)\} \quad (f \in \mathcal{L}^\infty(\sigma(T))).$$

Πόρισμα 7.1.25. *Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι φυσιολογικός τελεστής και $\{E(\Omega) : \Omega \subseteq \mathbb{C}$ Borel $\}$ το φασματικό του μέτρο, τότε*

(i) $\lambda \in \sigma(T)$ αν και μόνον αν $E(U) \neq 0$ για κάθε ανοικτό $U \subseteq \mathbb{C}$ που περιέχει το λ.

(ii) το λ είναι ιδιοτιμή του T αν και μόνον αν $E(\{\lambda\}) \neq 0$. Ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι ο $E(\{\lambda\})(H)$.

(iii) κάθε μεμονωμένο σημείο του $\sigma(T)$ είναι ιδιοτιμή του T.

Απόδειξη. (i) Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$. Αν $\lambda \notin \sigma(T)$, τότε υπάρχει ανοικτή περιοχή U του λ ώστε $U \cap \sigma(T) = \emptyset$, οπότε $E(U) = 0$ αφού το E φέρεται από το $\sigma(T)$.

Αν αντίστροφα υπάρχει ανοικτή περιοχή U του λ ώστε $E(U) = 0$, τότε η συνάρτηση

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z-\lambda} & z \notin U \\ 0 & z \in U \end{cases}$$

ορίζεται, είναι φραγμένη και μετρήσιμη, και για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ικανοποιεί $(z-\lambda)f(z) = 1 - \chi_U(z)$. Συνεπώς από τον συναρτησιακό λογισμό (Πρόταση 7.1.24) έχουμε

$$(T - \lambda I)f(T) = f(T)(T - \lambda I) = I - E(U) = I$$

(γιατί $\chi_U(T) = E(U)$) πράγμα που δείχνει ότι ο $T - \lambda I$ είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή ότι $\lambda \notin \sigma(T)$.

(ii) Έστω $\Omega = \{\lambda\}$ και $g(z) = z - \lambda$. Τότε $g\chi_\Omega = 0$ άρα $g(T)E(\Omega) = 0$, δηλαδή $(T - \lambda I)E(\Omega) = 0$.

Αν λοιπόν θέσουμε $F = \ker(T - \lambda I)$ δηλαδή

$$F = \{x \in H : (T - \lambda I)x = 0\}$$

τότε $E(\Omega)(H) \subseteq F$.

Ισχυριζόμαστε ότι ισχύει ισότητα: αν $x \in F$ θα δείξουμε ότι $x \in E(\Omega)(H)$. Πράγματι, αν V_n είναι ακολουθία ανοικτών συνόλων που φθίνει[8] προς το $\Omega = \{\lambda\}$, τότε, όπως δείξαμε στην Παρατήρηση 7.1.5, $\|E(V_n)x - E(\Omega)x\| \to 0$.

Αν θέσουμε $f_n(z) = (z-\lambda)^{-1}$ για $z \notin V_n$ και $f_n(z) = 0$ για $z \in V_n$ (όπως στο (i)) τότε $f_n(z)(z-\lambda) = 1-\chi_{V_n}$, άρα $f_n(T)(T - \lambda I) = I - E(V_n)$ και συνεπώς

$$x - E(V_n)x = f_n(T)(T - \lambda I)x = 0$$

[8] δηλαδή $V_n \supseteq V_{n+1}$ και $\bigcap_n V_n = \Omega$

(αφού $x \in F$) δηλαδή $E(V_n)x = x$ για κάθε n άρα $E(\Omega)x = x$.

Δείξαμε λοιπόν ότι $E(\{\lambda\})(H) = \ker(T - \lambda I)$.

Το (iii) είναι άμεση συνέπεια των προηγουμένων: Υπάρχει ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$ ώστε $U \cap \sigma(T) = \{\lambda\}$ άρα $E(U) = E(U \cap \sigma(T)) = E(\{\lambda\})$. Όμως $E(U) \neq 0$ αφού $\lambda \in \sigma(T)$, άρα $E(\{\lambda\} \neq 0$ οπότε το λ είναι ιδιοτιμή του T.

□

Η **αριθμητική ακτίνα (numerical radius)** ενός τελεστή $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι ο αριθμός

$$w(T) = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Δεν είναι δύσκολο να δειχθεί ότι $\|T\|/2 \leq w(T) \leq \|T\|$ και ότι οι ανισότητες αυτές είναι, εν γένει, οι καλύτερες δυνατές. Όταν ο T είναι φυσιολογικός, τα πράγματα είναι πολύ καλύτερα:

Πόρισμα 7.1.26. *Η αριθμητική ακτίνα ενός φυσιολογικού τελεστή $T \in \mathcal{B}(H)$ ισούται με την νόρμα του.*

Απόδειξη. Εφόσον $\|T\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ (Λήμμα 7.1.17 (ii)) και το $\sigma(T)$ είναι κλειστό, υπάρχει $\lambda \in \sigma(T)$ ώστε $|\lambda| = \|T\|$.

Έστω $\epsilon > 0$. Θα βρούμε $x \in H$ με $\|x\| = 1$ ώστε $|\langle Tx, x\rangle - \lambda| \leq \epsilon$. Αν $\Omega = \{z \in \sigma(T) : |z - \lambda| < \epsilon\}$ τότε $E(\Omega) \neq 0$ από το προηγούμενο Πόρισμα. Έστω $x \in E(\Omega)(H)$ με $\|x\| = 1$. Αν $f(z) = (z - \lambda)\chi_\Omega(z)$, τότε έχουμε $f(T) = (T - \lambda I)E(\Omega)$, άρα $f(T)x = Tx - \lambda x$, οπότε

$$|\langle Tx, x\rangle - \lambda| = |\langle Tx - \lambda x, x\rangle| = |\langle f(T)x, x\rangle| \leq \|f(T)\|.$$

Όμως $\|f(T)\| \leq \epsilon$ αφού $|f(z)| \leq \epsilon$ για κάθε $z \in \sigma(T)$. □