ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θεωρία Τελεστών

Ενότητα: Το Φασματικό Θεώρημα - Εισαγωγή

Αριστείδης Κατάβολος

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα ενότητας

3.1 Το Φασματικό Θεώρημα - Εισαγωγή 4

3.1.1 Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης 4

3.1.2 Επέκταση σε απειροδιάστατους χώρους 4

3.1 Το Φασματικό Θεώρημα - Εισαγωγή

3.1.1 Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης

Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert με $\dim \mathcal{H} = n < +\infty$. Κάθε ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$ ορίζει ισομετρικό ισομορφισμό $U : \mathcal{H} \to \mathbb{C}^n$. Έστω D_a ο διαγώνιος τελεστής με διαγώνια στοιχεία $a_1, \ldots, a_n$. Τότε ο $D_a^* = D_{a^*}$ είναι επίσης διαγώνιος, άρα μετατίθεται με τον D_a. Επομένως κάθε D_a είναι φυσιολογικός τελεστής. Γενικότερα, αν ο $T \in B(\mathcal{H})$ είναι **διαγωνοποιήσιμος**, δηλαδή υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_k : k = 1, \ldots, n\}$ του $\mathcal{H}$ ώστε ο τελεστής UTU^{-1} να είναι διαγώνιος, τότε ο T είναι φυσιολογικός[1].

Αντίστροφα,

Θεώρημα 3.1.1. *Κάθε φυσιολογικός τελεστής T σ΄έναν (μιγαδικό) χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ διάστασης $n < \infty$ είναι **διαγωνοποιήσιμος**, δηλαδή υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_k : k = 1, \ldots, n\}$ του $\mathcal{H}$ και $a_k \in \mathbb{C}$ ώστε $Te_k = a_k e_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Ισοδύναμα, ο T είναι **ορθομοναδιαία ισοδύναμος** (unitarily equivalent) με έναν διαγώνιο τελεστή, δηλαδή υπάρχει ορθομοναδιαίος τελεστής $U : \mathcal{H} \to \mathbb{C}^n$ ώστε ο UTU^{-1} να είναι διαγώνιος.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι, αφού ο $\mathcal{H}$ έχει πεπερασμένη διάσταση, κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ έχει ιδιοτιμές: είναι οι ρίζες του μιγαδικού πολυωνύμου $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Αν λ_i είναι οι ιδιοτιμές του T, ονομάζουμε M_i τους αντίστοιχους ιδιόχωρους. Από το Λήμμα 2.2.2, οι ιδιόχωροι του T είναι ανά δύο κάθετοι. Έστω $M = \oplus_i M_i$ το ευθύ τους άθροισμα.

Ισχυριζόμαστε ότι $M = \mathcal{H}$. Παρατηρούμε ότι κάθε M_i ανάγει τον T (Λήμμα 2.2.2), επομένως και ο M τον ανάγει. Άρα ο $M^\perp$ είναι T-αναλλοίωτος. Αν $M^\perp \neq \{0\}$, τότε ο τελεστής $S = T|_{M^\perp} : M^\perp \to M^\perp$ δεν έχει ιδιοτιμές (γιατί αν $x \in M^\perp \setminus \{0\}$ και $Sx = \lambda x$, τότε $Tx = \lambda x$ άρα το x ανήκει σε κάποιον ιδιόχωρο του T, άρα είναι κάθετο στον $M^\perp$). Όμως κάθε τελεστής σε μη μηδενικό χώρο πεπερασμένης διάστασης έχει ιδιοτιμές. Άρα $M^\perp = \{0\}$, δηλαδή $\oplus_i M_i = \mathcal{H}$.

Επειδή για κάθε i ο τελεστής $T|_{M_i}$ είναι ένα πολλαπλάσιο του ταυτοτικού, άρα είναι διαγωνοποιήσιμος, έπεται τώρα ότι και ο T θα είναι διαγωνοποιήσιμος (είναι διαγώνιος ως προς κάθε ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$ που είναι ένωση ορθοκανονικών βάσεων των M_i). □

3.1.2 Επέκταση σε απειροδιάστατους χώρους

Ένας φυσιολογικός τελεστής T σ΄έναν απειροδιάστατο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ δεν έχει κατ΄ανάγκην ιδιοτιμές. Παράδειγμα: Ο τελεστής $M_f \in \mathcal{B}(L^2([0,1]))$ όπου $f(t) = t$ (γιατί;). Ένας τέτοιος τελεστής δεν μπορεί να είναι διαγωνοποιήσιμος (δηλαδή ορθομοναδιαία ισοδύναμος με έναν διαγώνιο τελεστή). Όμως, οι πολλαπλασιαστικοί τελεστές είναι γενίκευση των διαγωνίων τελεστών (βλ. Παράδειγμα 1.2.5). Μία μορφή του Φασματικού Θεωρήματος είναι:

Θεώρημα 3.1.2 (Φασματικό Θεώρημα - Πρώτη μορφή).
Ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι φυσιολογικός αν και μόνον αν είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με έναν πολλαπλασιαστικό τελεστή, δηλαδή αν υπάρχουν: χώρος μέτρου (X, μ), ορθομοναδιαίος τελεστής $U : L^2(X, \mu) \to \mathcal{H}$ και συνάρτηση $f \in L^\infty(X, \mu)$ ώστε

$$T = UM_f U^{-1}.$$

[1] Αν $UTU^{-1} = D$ τότε $T = U^*DU$ και $T^* = U^*D^*U$, άρα οι $T^*T = U^*D^*UU^*DU = U^*D^*DU$ και $TT^* = U^*DD^*U$ μετατίθενται.

Παρατήρηση 3.1.3. *Ένας πολλαπλασιαστικός τελεστής δεν είναι κατ' ανάγκη διαγωνοποιήσιμος, όπως είδαμε, άρα δεν μπορεί εν γένει να γραφεί ως πεπερασμένο άθροισμα* $M_f = \sum \lambda_i P_i$*, όπου οι* P_i *είναι ορθές προβολές. Μπορεί όμως να προσεγγισθεί από τέτοια αθροίσματα:*

Για κάθε $f \in L^\infty(X,\mu)$ *και* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει πεπερασμένο σύνολο* $\{P_i : i = 1,\dots,n\}$ *καθέτων ανά δύο προβολών του* $\mathcal{B}(L^2(X,\mu))$ *με* $\sum P_i = I$ *και* $\lambda_i \in \mathbb{C}$ *ώστε*

$$\|M_f - \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i\| \le \varepsilon.$$

Απόδειξη. Αφού η f είναι (ουσιωδώς) φραγμένη και μετρήσιμη, υπάρχει απλή συνάρτηση[2] $f_\varepsilon = \sum \lambda_i \chi_i$ (όπου οι χ_i είναι χαρακτηριστικές συναρτήσεις ξένων ανά δύο (μετρήσιμων) υποσυνόλων) ώστε $\|f - f_\varepsilon\|_\infty \le \varepsilon$. Έπεται ότι $\|M_f - M_{f_\varepsilon}\| \le \varepsilon$. Αλλά, αν θέσουμε $P_i = M_{\chi_i}$, παρατηρούμε ότι οι P_i είναι αυτοσυζυγείς (αφού οι χ_i παίρνουν πραγματικές τιμές) και ότι $P_iP_j = \delta_{ij}P_i$ (αφού $\chi_i\chi_j = \delta_{ij}\chi_i$). Ειδικότερα, $P_i^2 = P_i$. Επομένως οι P_i είναι κάθετες ανά δύο προβολές. Αλλά $M_{f_\varepsilon} = \sum \lambda_i P_i$ και η απόδειξη συμπληρώθηκε. □

Παρατηρούμε ότι η τελευταία απόδειξη στηρίχθηκε στο γεγονός ότι η απεικόνιση $f \to M_f$ διατηρεί την αλγεβρική δομή (συμπεριλαμβανόμενης και της ενέλιξης), καθώς και την νόρμα. Σημειώνουμε επίσης ότι οι προβολές P_i ανήκουν στην πολλαπλασιαστική άλγεβρα $\mathcal{M}_\mu$ του $L^\infty(X,\mu)$ (πρβλ. Παρατήρηση 2.1.8).

Παρατήρηση 3.1.4. *Έστω* Ω *μετρήσιμο υποσύνολο του* X *και* $P(\Omega) = M_{\chi_\Omega}$*. Τότε η απεικόνιση* $\Omega \to P(\Omega)$ *είναι (όπως θα δούμε αργότερα) ένα «μέτρο με τιμές προβολές». Μία ερμηνεία της προηγούμενης παρατήρησης είναι ότι ένας πολλαπλασιαστικός τελεστής είναι το ολοκλήρωμα, με κάποια έννοια, μίας συνάρτησης ως προς αυτό το «μέτρο»:*

$$''M_f = \int \lambda dP(\lambda)''$$

Πράγματι, μία δεύτερη μορφή του Φασματικού Θεωρήματος είναι ότι κάθε φυσιολογικός τελεστής μπορεί να γραφεί ως ένα τέτοιο ολοκλήρωμα.

[2]**Απόδειξη:** Αλλάζοντας, αν χρειασθεί, τις τιμές της f σ' ένα υποσύνολο μέτρου μηδέν του X, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι φραγμένη. Τότε το σύνολο $f(X) \subseteq \mathbb{C}$ μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένο πλήθος ανοικτών δίσκων U_i, $i = 1,\dots,n$ διαμέτρου το πολύ ε. Ορίζουμε ξένα ανά δύο Borel υποσύνολα $\Delta_i \subseteq \mathbb{C}$ θέτοντας $\Delta_i = U_i \backslash (\cup_{j<i} U_j)$. Παρατηρούμε ότι η διάμετρος του Δ_i είναι το πολύ ε. Έστω $X_i = f^{-1}(\Delta_i)$. Τα X_i είναι μετρήσιμα ξένα ανά δύο υποσύνολα του X και $\cup X_i = X$. Αν επιλέξουμε αυθαίρετα $\lambda_i \in \Delta_i$, παρατηρούμε ότι $t \in X_i \Rightarrow |f(t) - \lambda_i| \le \varepsilon$. Άρα, αν θέσουμε $f_\varepsilon = \sum \lambda_i \chi_i$ (όπου χ_i είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του X_i), τότε για κάθε $t \in X$ υπάρχει i ώστε $t \in X_i$, άρα $f_\epsilon(t) = \lambda_i$ και επομένως $|f(t) - f_\varepsilon(t)| \le \varepsilon$. Αυτό δείχνει ότι $\|f - f_\varepsilon\|_\infty \le \varepsilon$.