ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θεωρία Τελεστών

Ενότητα: Ειδικές κατηγορίες τελεστών - Αναλλοίωτοι υπόχωροι

Αριστείδης Κατάβολος

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα ενότητας

2.1 Ειδικές κατηγορίες τελεστών σ'ένα χώρο Hilbert

2.1.1 Sesquilinear μορφές και ο συζυγής ενός τελεστή

Ορισμός 2.1.1. *Έστω $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ χώροι Hilbert. Μία **sesquilinear μορφή** ϕ είναι μία απεικόνιση $\phi : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathbb{C}$ που είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή και αντιγραμμική ως προς τη δεύτερη.*

*Η ϕ λέγεται **φραγμένη** αν ο αριθμός*

$$\|\phi\| = \sup\{|\phi(x, y)| : x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2, \|x\| = \|y\| = 1\}$$

*είναι πεπερασμένος. Αν $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$, η αντίστοιχη **τετραγωνική μορφή** $\tilde{\phi}$ είναι η απεικόνιση $\tilde{\phi}(x) = \phi(x, x)$.*

Όταν $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$, η **ταυτότητα πολικότητας (polarization)**

$$4\phi(x, y) = \tilde{\phi}(x + y) - \tilde{\phi}(x - y) + i\tilde{\phi}(x + iy) - i\tilde{\phi}(x - iy) \quad (x, y \in \mathcal{H}),$$

που είναι άμεση συνέπεια των ορισμών, δείχνει ότι η ϕ καθορίζεται από την $\tilde{\phi}$.

Αν $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ είναι χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, θέτουμε

$$\phi_T : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathbb{C} : (x, y) \to \langle Tx, y\rangle.$$

Παρατηρούμε ότι η ϕ_T είναι sesquilinear και φραγμένη. Μάλιστα έχουμε $\|\phi_T\| = \|T\|$.

Είναι φανερό ότι δύο φραγμένοι τελεστές S, T στον $\mathcal{H}$ είναι ίσοι αν και μόνον αν οι αντίστοιχες μορφές ϕ_T και ϕ_S συμπίπτουν. Από την ταυτότητα πολικότητας έπεται ότι οι S και T είναι ίσοι αν και μόνον αν[1] $\langle Tx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$.

Επομένως κάθε $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ορίζει μία μοναδική φραγμένη sesquilinear μορφή ϕ_T. Αντίστροφα,

Πρόταση 2.1.2. *Κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή $\phi : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathbb{C}$ ορίζει έναν μοναδικό $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ από την σχέση*

$$\langle Tx, y\rangle = \phi(x, y) \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{H}_1 \text{ και } y \in \mathcal{H}_2.$$

Απόδειξη. Για κάθε $x \in \mathcal{H}_1$ η απεικόνιση

$$f_x : \mathcal{H}_2 \to \mathbb{C} : y \to \overline{\phi(x, y)}$$

είναι γραμμική και φραγμένη γιατί $|f_x(y)| \leq (\|\phi\|\|x\|)\|y\|)$. Επομένως, από το Θεώρημα Riesz υπάρχει μοναδικό $z_x \in \mathcal{H}_2$ με $\|z_x\| = \|f_x\|$ ώστε

$$\langle y, z_x\rangle = \overline{\phi(x, y)},$$

ισοδύναμα $\langle z_x, y\rangle = \phi(x, y)$, για κάθε $y \in \mathcal{H}_2$. Είναι φανερό ότι η απεικόνιση $x \to z_x : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ είναι γραμμική, και είναι φραγμένη γιατί

$$\|z_x\| = \|f_x\| \leq \|\phi\|\|x\|.$$

[1] Αυτό δεν ισχύει σε πραγματικούς χώρους Hilbert. Για παράδειγμα, αν T είναι ο τελεστής της στροφής κατά $\pi/2$ στον $\mathbb{R}^2$, τότε $\langle Tx, x\rangle = 0$ για κάθε x.

Επομένως υπάρχει $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ώστε $T(x) = z_x$ για κάθε $x \in \mathcal{H}_1$, δηλαδή

$$\langle Tx, y\rangle = \phi(x, y) \quad \text{για κάθε } \; x \in \mathcal{H}_1 \text{ και } y \in \mathcal{H}_2.$$

Αλλά

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\|_2 : \|x\|_1 = 1\} = \sup\{|\langle Tx, y\rangle| : \|x\|_1 = \|y\|_2 = 1\} \\ &= \sup\{|\phi(x, y)| : \|x\|_1 = \|y\|_2 = 1\} = \|\phi\|. \end{aligned}$$

Η μοναδικότητα αποδείχθηκε προηγουμένως. □

Πρόταση 2.1.3. *Για κάθε $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ υπάρχει μοναδικός $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ (ο συζυγής του T) ώστε*

$$\langle Tx, y\rangle_2 = \langle x, T^*y\rangle_1 \quad (x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2).$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $\psi : \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1 \to \mathbb{C}$ από την σχέση $\psi(y, x) = \langle y, Tx\rangle_2$. Η ψ είναι sesquilinear και φράσσεται από την $\|T\|$. Από την προηγούμενη Πρόταση, υπάρχει μοναδικός $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ ώστε $\langle T^*y, x\rangle_1 = \psi(y, x) = \langle y, Tx\rangle_2$ για κάθε $y \in \mathcal{H}_2$ και κάθε $x \in \mathcal{H}_1$. □

Παράδειγμα 2.1.4. *(i) Αν (X, μ) είναι χώρος μέτρου και $f \in L^\infty(X, \mu)$, ο συζυγής του πολλαπλασιαστικού τελεστή $M_f \in \mathcal{B}(L^2(X, \mu))$ είναι ο M_{f^*}, όπου $f^*(t) = \overline{f(t)}$.*

(ii) Ο συζυγής του shift $S \in \mathcal{B}(\ell^2)$ δίδεται από τον τύπο $S^*((x_1, x_2, \ldots)) = (x_2, x_3, \ldots)$.

Έπεται ότι ο χώρος $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ των τελεστών σ΄έναν χώρο Hilbert, εκτός από την δομή άλγεβρας Banach που έχει (όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο) εφοδιάζεται με την απεικόνιση $A \to A^*$ που έχει τις ιδιότητες

(1) $A^{**} = A$

(2) $(A + \lambda B)^* = A^* + \bar{\lambda} B^*$

(3) $(AB)^* = B^*A^*$

(4) $\|A^*A\| = \|A\|^2$

Οι ιδιότητες (1),(2),(3) είναι άμεσες από τον ορισμό. Αποδεικνύουμε την (4): Για κάθε $x \in \mathcal{H}$, έχουμε

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle \le \|A^*Ax\|.\|x\| \le \|A^*A\|.\|x\|^2$$

πράγμα που δείχνει ότι $\|A\|^2 \le \|A^*A\|$. Από την άλλη μεριά όμως $\|A^*A\| \le \|A^*\|\|A\|$ άρα $\|A\|^2 \le \|A^*\|\|A\|$, οπότε $\|A\| \le \|A^*\|$. Αν εφαρμόσουμε την ανισότητα αυτή στον A^* προκύπτει ότι $\|A^*\| \le \|A^{**}\| = \|A\|$ άρα $\|A\| = \|A^*\|$ (η ισότητα αυτή είναι άλλωστε φανερή από τον ορισμό του A^*). Τότε όμως

$$\|A\|^2 \le \|A^*A\| \le \|A^*\|\|A\| = \|A\|^2$$

και η (4) αποδείχθηκε.

Ορισμός 2.1.5. ***C^*-άλγεβρα*** *είναι μία άλγεβρα Banach $\mathcal{A}$ εφοδιασμένη με μία απεικόνιση $\mathcal{A} \to \mathcal{A} : A \to A^*$, που έχει τις ιδιότητες (1)-(3) (μία τέτοια απεικόνιση λέγεται* ***ενέλιξη*** *(involution), που η νόρμα της ικανοποιεί την λεγόμενη* ***ιδιότητα C^*****:*

$$\|A^*A\| = \|A\|^2.$$

Επομένως, αν $\mathcal{H}$ είναι χώρος Hilbert, η $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι C*-άλγεβρα. Εξάλλου, μία κλειστή υπάλγεβρα $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι C*-άλγεβρα αν και μόνον αν είναι **αυτοσυζυγής** (selfadjoint), δηλαδή αν ικανοποιεί $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^* \in \mathcal{A}$.

Θεώρημα 2.1.6 (Gelfand-Naimark)**.** *Κάθε C^*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι ισομορφική, ως C^*-άλγεβρα, με μία κλειστή αυτοσυζυγή υπάλγεβρα κάποιου $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ακριβέστερα, υπάρχει χώρος Hilbert $\mathcal{H}$ και απεικόνιση $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ που διατηρεί την αλγεβρική δομή (άθροισμα, γινόμενο, ενέλιξη) και την νόρμα.*

Άλλα παραδείγματα C*-αλγεβρών είναι ο $C_o(X)$, ο χώρος όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$ σ'έναν τοπικά συμπαγή χώρο X (π.χ. $X = \mathbb{R}$) που **μηδενίζονται στο άπειρο**[2], εφοδιασμένος με τις πράξεις κατά σημείο, την ενέλιξη $f^*(t) = \overline{f(t)}$ και την νόρμα supremum. Ειδικότερα, αν ο X είναι συμπαγής, η $C(X)$ είναι C*-άλγεβρα. Οι άλγεβρες αυτές είναι μεταθετικές. Ισχύει το

Θεώρημα 2.1.7 (Gelfand-Naimark)**.** *Κάθε μεταθετική C^*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι ισομορφική, ώς C^*-άλγεβρα, με την $C_o(X)$ για κατάλληλο τοπικά συμπαγή χώρο X.*

Παρατήρηση 2.1.8. *Ένα άλλο παράδειγμα μεταθετικής C^*-άλγεβρας είναι ο $L^\infty(X, \mu)$, με τις πράξεις και την ενέλιξη κατά σημείο και την νόρμα που ορίζεται από το ουσιώδες supremum. Από τις σχέσεις $\|M_f\| = \|f\|_\infty$, $M_{(f+\lambda g)} = M_f + \lambda M_g$, $M_{fg} = M_f M_g$ και $M_f^* = M_{\bar{f}}$ προκύπτει ότι η απεικόνιση $f \to M_f$ είναι ισομετρικός *-μορφισμός από την C^*-άλγεβρα $L^\infty(X, \mu)$ στην C^*-άλγεβρα $\mathcal{B}(L^2(X, \mu))$. Το σύνολο*

$$\mathcal{M}_\mu = \{M_f : f \in L^\infty(X, \mu)\}$$

είναι επομένως μία C^*-υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(L^2(X, \mu))$, και ονομάζεται η ***πολλαπλασιαστική άλγεβρα*** *του $L^\infty(X, \mu)$.*

2.1.2 Κατηγορίες τελεστών

Ένας τελεστής $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ λέγεται **φυσιολογικός** (normal) αν $AA^* = A^*A$, **αυτοσυζυγής** (selfadjoint) αν $A = A^*$, και **θετικός** (positive) αν $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$. Ένας τελεστής $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ λέγεται **ορθομοναδιαίος** (unitary) αν είναι αντιστρέψιμος και $V^* = V^{-1}$ (ισοδύναμα αν $V^*V = I_{\mathcal{H}_1}$ και $VV^* = I_{\mathcal{H}_2}$).

Κάθε τελεστής $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ μπορεί να γραφεί

$$T = T_1 + iT_2, \quad \text{όπου οι } T_1 = \frac{T + T^*}{2} \text{ και } T_2 = \frac{T - T^*}{2i}$$

είναι αυτοσυζυγείς. Παρατηρείστε ότι ο T είναι φυσιολογικός αν και μόνον αν οι T_1 και T_2 μετατίθενται.

Παρατήρηση 2.1.9. *Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ φραγμένος τελεστής. Αν $\langle Tx, x\rangle = 0$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$, τότε $T = 0$.*

Πράγματι, αν $\langle Tx, x\rangle = 0$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$, από την ταυτότητα πολικότητας έπεται ότι $\langle Tx, y\rangle = 0$ για κάθε $x, y \in \mathcal{H}$ και συνεπώς $T = 0$.

Λήμμα 2.1.10. *Ένας φραγμένος τελεστής T είναι φυσιολογικός αν και μόνον αν $\|Tx\| = \|T^*x\|$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle$$
$$\|T^*x\|^2 = \langle T^*x, T^*x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle.$$

Επομένως από την Παρατήρηση 2.1.9 έπεται ότι $\|Tx\| = \|T^*x\|$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$ αν και μόνον αν $T^*T = TT^*$.

[2] μία συνεχής συνάρτηση f **μηδενίζεται στο άπειρο** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές υποσύνολο $K_f \subseteq X$ ώστε $|f(t)| < \varepsilon$ για κάθε $t \notin K_f$

Λήμμα 2.1.11. *Ένας φραγμένος τελεστής A είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$.*

Απόδειξη. Εφόσον $\langle A^*x, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}$, αν $A = A^*$ τότε $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$. Αν αντίστροφα $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$, τότε $\langle (A - A^*)x, x\rangle = 0$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$, άρα $A = A^*$ από την ταυτότητα πολικότητας (Παρατήρηση 2.1.9).

Έπεται ότι οι θετικοί τελεστές είναι κατ΄ανάγκην αυτοσυζυγείς.

Αν $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι ένας οποιοσδήποτε τελεστής, τότε ο T^*T είναι θετικός. (Ειδικότερα το τετράγωνο ενός αυτοσυζυγούς τελεστή είναι θετικός τελεστής.) Θα δείξουμε αργότερα ότι κάθε θετικός τελεστής B είναι της μορφής $B = T^*T$.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας τελεστής $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι **ταυτοδύναμος** (δηλ. $P = P^2$) αν και μόνον αν το σύνολο τιμών του $P(\mathcal{H})$ και ο πυρήνας του $\ker P$ είναι **συμπληρωματικοί**, δηλαδή ικανοποιούν $P(\mathcal{H}) \cap \ker P = \{0\}$ και $P(\mathcal{H}) + \ker P = \mathcal{H}$, ισοδύναμα $\ker P = (I - P)(\mathcal{H})$. Επομένως ένας ταυτοδύναμος τελεστής είναι ορθή προβολή αν και μόνον αν το σύνολο τιμών και ο πυρήνας του είναι κάθετοι.

Λήμμα 2.1.12. *Ένας ταυτοδύναμος τελεστής $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι ορθή προβολή αν και μόνον αν είναι αυτοσυζυγής. Επομένως οι ορθές προβολές χαρακτηρίζονται αλγεβρικά από τις σχέσεις $P = P^2 = P^*$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η P είναι ορθή προβολή. Τότε

$$\langle Px, x\rangle = \langle Px, Px + (I - P)x\rangle = \langle Px, Px\rangle$$

για κάθε $x \in \mathcal{H}$, γιατί τα Px και $(I - P)x$ είναι κάθετα. Έπεται ότι ο αριθμός $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$ είναι πραγματικός (μάλιστα μη αρνητικός) και συνεπώς ο P είναι αυτοσυζυγής (μάλιστα θετικός).

Έστω αντίστροφα ότι $P = P^2 = P^*$. Τότε ο πυρήνας και το σύνολο τιμών του P είναι κάθετοι γιατί

$$\langle Px, (I - P)y\rangle = \langle x, P^*(I - P)y\rangle = \langle x, P(I - P)y\rangle = 0. \qquad \square$$

Λήμμα 2.1.13. *Ένας τελεστής $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι ορθομοναδιαίος (δηλαδή είναι αντιστρέψιμος και $U^{-1} = U^*$, ισοδύναμα $UU^* = U^*U = I$) αν και μόνον αν είναι ισομετρία και επί.*

Απόδειξη. Ο τελεστής U είναι ισομετρία αν και μόνον αν

$$\langle Ix, x\rangle = \|x\|^2 = \|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux\rangle = \langle U^*Ux, x\rangle$$

για κάθε $x \in \mathcal{H}$. Από την ταυτότητα πολικότητας (Παρατήρηση 2.1.9) συμπεραίνουμε ότι

$$\text{ο } U \text{ είναι ισομετρία} \quad \Leftrightarrow \quad U^*U = I.$$

Επομένως μία ισομετρία U έχει πάντα αριστερά αντίστροφο, τον U^*. Αν μία ισομετρία U είναι αντιστρέψιμος τελεστής, τότε ο U^{-1} θα είναι ίσος με τον αριστερά αντίστροφο του U, δηλαδή τον U^*. Αν αντίστροφα ο U είναι αντιστρέψιμος και $U^{-1} = U^*$, τότε είναι βέβαια επί και ισχύει $U^*U = I$, άρα ο U είναι ισομετρία.

Παράδειγμα 2.1.14. *Ο τελεστής της μετατόπισης (shift) είναι ισομετρία, αλλά δεν είναι επί. Μάλιστα ο SS^* είναι η ορθή προβολή επί του υποχώρου $[e_0]^\perp$. Γενικότερα:*

Ορισμός 2.1.15. *Έστω $E \subseteq \mathcal{H}_1$ κλειστός υπόχωρος.* ***Μερική ισομετρία*** *με* ***αρχικό χώρο*** *E είναι ένας τελεστής $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ώστε ο $V|_E$ να είναι ισομετρία και ο $V|_{E^\perp}$ να μηδενίζεται.*

Παρατηρούμε ότι αν $F = V(\mathcal{H}_1)$, τότε $F = V(E)$ άρα ο F είναι κλειστός υπόχωρος, γιατί ο E είναι πλήρης και ο $V|_E$ είναι ισομετρικός. Ο F ονομάζεται ο **τελικός χώρος** της V. Παρατηρούμε επίσης ότι κάθε ορθή προβολή P είναι μερική ισομετρία με αρχικό και τελικό χώρο $P(\mathcal{H})$.

Πρόταση 2.1.16. *Αν V είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο E και τελικό χώρο F, τότε η V^* είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο F και τελικό χώρο E, η V^*V είναι η προβολή στον E (η* **αρχική προβολή** *του V) και η VV^* είναι η προβολή στον F (η* **τελική προβολή** *του V).*

Αντίστροφα, αν $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ και ο τελεστής V^*V είναι προβολή, τότε ο VV^* είναι επίσης προβολή και η V είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο $V^*V(\mathcal{H}_1)$ και τελικό χώρο $VV^*(\mathcal{H}_2)$.

Απόδειξη. Έστω ότι η V είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο E. Δείχνουμε ότι $V^*V = P_E$: Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathcal{H}_1$ έχουμε $Vx = VP_Ex + VP_E^\perp x = VP_Ex$ γιατί ο V μηδενίζεται στον $E^\perp$. Επομένως, αν $x, y \in \mathcal{H}_1$ έχουμε
$$\langle V^*Vx, y\rangle = \langle Vx, Vy\rangle = \langle VP_Ex, VP_Ey\rangle = \langle P_Ex, P_Ey\rangle$$
γιατί η V είναι ισομετρία στον E. Άρα
$$\langle V^*Vx, y\rangle = \langle P_Ex, P_Ey\rangle = \langle P_Ex, y\rangle$$
για κάθε x, y, πράγμα που δείχνει ότι $V^*V = P_E$.

Έστω ότι, αντίστροφα, ο τελεστής $P = V^*V$ είναι προβολή. Θα δείξουμε ότι ο V είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο $E = P(\mathcal{H}_1)$. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathcal{H}_1$ έχουμε
$$\|Vx\|^2 = \langle Vx, Vx\rangle = \langle V^*Vx, x\rangle = \langle Px, x\rangle = \|Px\|^2,$$
άρα αν $x \in P(\mathcal{H}_1)$ τότε $\|Vx\| = \|x\|$ και αν $x \perp P(\mathcal{H}_1)$ τότε $\|Vx\| = 0$. Δηλαδή ο V είναι ισομετρικός στον $P(\mathcal{H}_1)$ και μηδενίζεται στον $P(\mathcal{H}_1)^\perp$.

Έστω $F = V(\mathcal{H}_1)$. Επειδή $F = V(E)$ και η $V|_E$ είναι ισομετρία, ο F είναι κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}_2$. Θα δείξουμε ότι ο V^* είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο F και τελικό χώρο E. Πράγματι, για κάθε $y = Vx \in F$,
$$\begin{aligned}\|V^*y\|^2 &= \|V^*(Vx)\|^2 = \langle V^*Vx, V^*Vx\rangle = \langle (V^*V)^2x, x\rangle = \langle V^*Vx, x\rangle \\ &= \langle Vx, Vx\rangle = \|Vx\|^2 = \|y\|^2\end{aligned}$$
επειδή $(V^*V)^2 = P^2 = V^*V$. Άρα, η $V^*|_F$ είναι ισομετρία. Επίσης, απεικονίζει τον F επί του E γιατί για κάθε $x \in E$ έχουμε $Vx \in F$ και $V^*Vx = P_Ex = x$.

Μένει να δειχθεί ότι η V^* μηδενίζεται στον $F^\perp$. Πράγματι, αν $z \in F^\perp$, για κάθε $x \in \mathcal{H}_1$ έχουμε
$$\langle V^*z, x\rangle = \langle z, Vx\rangle = 0$$
γιατί $Vx \in F$, άρα $V^*z = 0$. Δείξαμε ότι η V^* είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο F. Εφαρμόζοντας την πρώτη παράγραφο στην V^*, συμπεραίνουμε ότι η VV^* είναι η ορθή προβολή στον F.

Παρατήρηση 2.1.17. *Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι η έννοια της μερικής ισομετρίας μπορεί να ορισθεί αλγεβρικά (χωρίς αναφορά δηλαδή στην δράση πάνω σ'έναν χώρο Hilbert) και μάλιστα σε κάθε C^*-άλγεβρα $\mathcal{A}$: ένα στοιχείο $V \in \mathcal{A}$ είναι μερική ισομετρία αν το $V^*V = P$ είναι ορθή προβολή δηλ. $P = P^2 = P^*$. Μάλιστα*

Αν $V \in \mathcal{A}$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Το στοιχείο $P = V^*V$ είναι προβολή.
(β) $VV^*V = V$.
(γ) $V^*VV^* = V^*$.
(δ) Το στοιχείο $Q = VV^*$ είναι προβολή.

Απόδειξη. (α)⇒(β) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα C*, έχουμε

$$\begin{aligned}\|V - VV^*V\|^2 &= \|V - VP\|^2 = \|(V^* - PV^*)(V - VP)\| \\ &= \|V^*V - V^*VP - PV^*V + PV^*VP\| \\ &= \|P - P^2 - P^2 + P^3\| = 0\end{aligned}$$

(β)⇒(α) Το V^*V είναι προφανώς αυτοσυζυγές και

$$(V^*V)^2 = V^*VV^*V = V^*(VV^*V) = V^*V.$$

Οι σχέσεις (β)⇔(γ) είναι προφανώς ισοδύναμες (η μία είναι συζυγής της άλλης). Τέλος, η ισοδυναμία (δ)⇔(γ) προκύπτει από την (α)⇔(β) θεωρώντας το V^* στη θέση του V.

Χρησιμοποιώντας μερικές ισομετρίες, μπορεί να ορισθεί μία ιδιαίτερα γόνιμη σχέση ισοδυναμίας προβολών σε μία C*-άλγεβρα $\mathcal{A}$.

Δύο προβολές $P, Q \in \mathcal{A}$ λέγονται **ισοδύναμες** ως προς την $\mathcal{A}$ (γράφουμε $P \underset{\mathcal{A}}{\sim} Q$) αν υπάρχει $V \in \mathcal{A}$ ώστε $V^*V = P$ και $VV^* = Q$.

Αν $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, τότε η ισοδυναμία αυτή σημαίνει απλώς ότι οι υπόχωροι $P(\mathcal{H})$ και $Q(\mathcal{H})$ έχουν την ίδια διάσταση (δηλαδή έχουν ισοπληθικές ορθοκανονικές βάσεις). Αν η $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική (για παράδειγμα αν $\mathcal{A} = C(K)$), τότε η ισοδυναμία ως προς $\mathcal{A}$ είναι απλώς ισότητα.

Η ισοδυναμία ως προς $\mathcal{A}$ είναι σχέση ισοδυναμίας: Πράγματι,

(α) μία προβολή P είναι ισοδύναμη με τον εαυτό της μέσω της μερικής ισομετρίας P.

(β) Αν $P \underset{\mathcal{A}}{\sim} Q$ μέσω της V τότε $Q \underset{\mathcal{A}}{\sim} P$ μέσω της V^*.

(γ) Αν $P \underset{\mathcal{A}}{\sim} Q$ μέσω της V και $Q \underset{\mathcal{A}}{\sim} R$ μέσω της U τότε ο τελεστής UV είναι μερική ισομετρία[3] και $P \underset{\mathcal{A}}{\sim} R$ μέσω της UV, γιατί $P = V^*V$, $Q = VV^* = U^*U$ και $R = UU^*$ επομένως

$$(UV)^*UV = V^*(U^*U)V = V^*QV = V^*(VV^*)V = (V^*V)^2 = P$$

και

$$UV(UV)^* = U(VV^*)U^* = UQU^* = U(U^*U)U^* = (UU^*)^2 = R.$$

Αυτή η σχέση ισοδυναμίας (σε άλγεβρες von Neumann, που, όπως θα δούμε, διαθέτουν αφθονία προβολών) αποτελεί κρίσιμη έννοια για την ταξινόμηση των factors (αλγεβρών von Neumann με τετριμμένο κέντρο) από τους Murray και von Neumann.

2.2 Αναλλοίωτοι υπόχωροι

Ένας υπόχωρος $E \subseteq \mathcal{H}$ είναι **αναλλοίωτος** από έναν φραγμένο τελεστή $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ αν $Ax \in E$ για κάθε $x \in E$. Τότε ο **κλειστός** υπόχωρος $\overline{E}$ είναι και αυτός A-αναλλοίωτος, εφόσον ο A είναι συνεχής[4]. Θα λέμε ότι ο υπόχωρος E **ανάγει** τον A όταν και ο E και ο $E^\perp$ είναι A-αναλλοίωτοι.

[3] Σημειώνουμε ότι το γινόμενο δύο μερικών ισομετριών δεν είναι, εν γένει, μερική ισομετρία.

[4] Αν $x \in \overline{E}$ και $x_n \in E$ με $x_n \to x$, τότε $Ax_n \in E$ και $Ax_n \to Ax$ άρα $Ax \in \overline{E}$.

Παραδείγματος χάριν ο πυρήνας $(\ker A)$ ενός τελεστή A, και γενικότερα ένας ιδιόχωρός του $(\ker(A - \lambda I))$, είναι A-αναλλοίωτοι. Αυτό δείχνει ότι κάθε τελεστής σε (μιγαδικό!) χώρο πεπερασμένης διάστασης έχει μη τετριμμένο αναλλοίωτο υπόχωρο (και μάλιστα μονοδιάστατο).

Ένας κλειστός υπόχωρος $E \subseteq \mathcal{H}$ λέγεται **κυκλικός** για τον A αν είναι της μορφής

$$E = \overline{[x, Ax, A^2x, \ldots]}$$

για κάποιο $x \in \mathcal{H}$. Ένας A-κυκλικός υπόχωρος είναι βέβαια A-αναλλοίωτος. Έπεται ότι κάθε τελεστής σε μη διαχωρίσιμο χώρο έχει μη τετριμμένο αναλλοίωτο υπόχωρο (πράγματι, παίρνουμε ένα οποιοδήποτε μη μηδενικό $x \in \mathcal{H}$ και θεωρούμε τον A-κυκλικό υπόχωρο E_x που παράγει. Ο E_x είναι διαχωρίσιμος, άρα γνήσιος, και είναι μη μηδενικός γιατί περιέχει το x).

Ένα από τα πιο βασικά ανοικτά προβλήματα στην Θεωρία Τελεστών είναι

> **Το πρόβλημα του αναλλοίωτου υπόχωρου:** Είναι αλήθεια ότι κάθε φραγμένος τελεστής σε έναν (διαχωρίσιμο, απειροδιάστατο) χώρο Hilbert[5] έχει μη τετριμμένο αναλλοίωτο υπόχωρο;

Έστω $E \subseteq \mathcal{H}$ κλειστός υπόχωρος και $P = P_E$. Κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ γράφεται ως 2×2 πίνακας τελεστών ως προς την διάσπαση του $\mathcal{H}$ στο άθροισμα $E \oplus E^{\perp}$:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Εδώ ο $A_{11} \in \mathcal{B}(E)$ ορίζεται από την σχέση $A_{11}x = PAx$ $(x \in E)$, ο $A_{12} \in \mathcal{B}(E^{\perp}, E)$ από την σχέση $A_{12}y = PAy$ $(y \in E^{\perp})$ και ούτω καθεξής. Έπεται ότι $A(E) \subseteq E$ αν και μόνον αν $A_{21} = 0$, και ότι ο A ανάγεται από τον E αν και μόνον αν $A_{12} = A_{21} = 0$.

Λήμμα 2.2.1. *Ένας κλειστός υπόχωρος E είναι A-αναλλοίωτος αν και μόνον αν $AP = PAP$. Ο E ανάγει τον A αν και μόνον αν $A(E) \subseteq E$ και $A^*(E) \subseteq E$, ισοδύναμα αν και μόνον αν $AP = PA$.*

Απόδειξη. Αφήνεται στον αναγνώστη.

Παρατηρούμε ότι αν $A(E) \subseteq E$ και $A = A^*$, τότε αναγκαστικά ο E ανάγει τον A. Αυτό δεν ισχύει για μη αυτοσυζυγείς, ούτε καν για φυσιολογικούς τελεστές. Για παράδειγμα αν U είναι ο τελεστής της αμφίπλευρης μετατόπισης στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ (που ορίζεται από τη σχέση $Ue_n = e_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$), τότε ο U είναι φυσιολογικός (μάλιστα ορθομοναδιαίος) και ο υπόχωρος $E = \overline{[e_0, e_1, \ldots]}$ είναι U-αναλλοίωτος (μάλιστα είναι κυκλικός με κυκλικό διάνυσμα e_0), αλλά το ορθογώνιο συμπλήρωμά του δεν είναι αναλλοίωτο, γιατί $e_{-1} \in E^{\perp}$ ενώ $U(e_{-1}) = e_0 \notin E^{\perp}$.

Λήμμα 2.2.2. *Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ φυσιολογικός τελεστής. Αν $x \in \mathcal{H}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του T με ιδιοτιμή λ, τότε $T^*x = \bar{\lambda}x$. Έπεται ότι οι ιδιόχωροι ενός φυσιολογικού τελεστή (αν υπάρχουν) τον ανάγουν, και είναι κάθετοι μεταξύ τους.*

[5] Είναι σήμερα γνωστό ότι η απάντηση είναι αρνητική για τελεστές σε χώρους Banach, αλλά το πρόβλημα είναι ανοικτό για **αυτοπαθείς** χώρους Banach. Βλέπε

- P. Enflo, On the invariant subspace problem in Banach spaces, *Acta Math.*, 158, 1987.
- C.J. Read, A solution to the invariant subspace problem on the space ℓ_1, *Bull. London Math. Soc.* 17, 1985.

Απόδειξη. Εφόσον $(T - \lambda I)x = 0$ και ο τελεστής $T - \lambda I$ είναι φυσιολογικός, το Λήμμα 2.1.10 δείχνει ότι

$$\|(T^* - \bar{\lambda} I)x\| = \|(T - \lambda I)x\| = 0.$$

Επομένως αν $M_\lambda = \{x \in \mathcal{H} : Tx = \lambda x\}$, τότε για κάθε $x \in M_\lambda$ έχουμε $T^* x = \bar{\lambda} x \in M_\lambda$. Έπεται ότι $T^*(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$, άρα ο M_λ ανάγει τον T.

Τέλος αν $\lambda \neq \mu$ είναι ιδιοτιμές του T, τότε για κάθε $x \in M_\lambda$ και $y \in M_\mu$ έχουμε

$$\begin{aligned} \lambda\langle x, y\rangle &= \langle \lambda x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle \\ &= \langle x, \bar{\mu} y\rangle = \mu\langle x, y\rangle, \end{aligned}$$

άρα $\langle x, y\rangle = 0$. Επομένως $M_\lambda \perp M_\mu$. □