ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θεωρία Τελεστών

Ενότητα: Χώροι με νόρμα - Χώροι Hilbert

Αριστείδης Κατάβολος

Τμήμα Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα ενότητας

1.1 Χώροι με νόρμα, χώροι Hilbert

Στις σημειώσεις αυτές, όλοι οι γραμμικοί χώροι θα είναι *μιγαδικοί*, εκτός αν αναφέρεται ρητά κάτι διαφορετικό.

1.1.1 Χώροι με νόρμα και τελεστές

Παραθέτουμε συμβολισμούς, ορισμούς και αποτελέσματα που θα χρησιμεύσουν στη συνέχεια.

Ορισμός 1.1.1. *Έστω $\mathcal{X}$ μιγαδικός γραμμικός χώρος. Μία* **νόρμα** *στον $\mathcal{X}$ είναι μία απεικόνιση*

$$\|\cdot\| : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^+ \ : \ x \mapsto \|x\|$$

που ικανοποιεί

$$\begin{array}{ll} (1) & \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad (x, y \in \mathcal{X}) \\ (2) & \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \qquad (x \in \mathcal{X}, \lambda \in \mathbb{C}) \\ (3) & \|x\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \end{array}$$

Ένας χώρος με νόρμα $(\mathcal{X}, \|.\|)$ λέγεται **χώρος Banach** *αν είναι πλήρης ως προς την μετρική $d(x,y) = \|x-y\|$ που ορίζει η νόρμα.*

Θεώρημα 1.1.2. *Αν $(\mathcal{X}, \|.\|_X)$ και $(\mathcal{Y}, \|.\|_Y)$ είναι χώροι με νόρμα και $T : (\mathcal{X}, \|.\|_X) \to (\mathcal{Y}, \|.\|_Y)$ είναι γραμμική απεικόνιση, τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) Η T είναι συνεχής.

(β) Η T είναι συνεχής στο $0 \in \mathcal{X}$.

(γ) Η T είναι συνεχής σε κάποιο σημείο $x_o \in \mathcal{X}$.

(δ) Υπάρχει $M < \infty$ ώστε $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$.

(ε) Ο περιορισμός της T στη μοναδιαία σφαίρα του $\mathcal{X}$ είναι φραγμένη συνάρτηση, δηλαδή το σύνολο $\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X \leq 1\}$ είναι φραγμένο.

(στ) Η T είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Παρατήρηση 1.1.3. *Αν $T : (\mathcal{X}, \|.\|_X) \to (\mathcal{Y}, \|.\|_Y)$ είναι γραμμική και $T \neq 0$, τότε το σύνολο $\{\|Tx\|_Y : x \in \mathcal{X}\}$ δεν είναι ποτέ φραγμένο.*

Ορισμός 1.1.4. *Μία γραμμική απεικόνιση $T : (\mathcal{X}, \|.\|_X) \to (\mathcal{Y}, \|.\|_Y)$ λέγεται* **φραγμένη** *ή* **φραγμένος τελεστής** *αν ο περιορισμός της T στη μοναδιαία σφαίρα του $\mathcal{X}$ είναι φραγμένη συνάρτηση.*

Ο αριθμός

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X \leq 1\}$$

ονομάζεται **νόρμα του** T.

Πρόταση 1.1.5. *Έστω $T : (\mathcal{X}, \|.\|_X) \to (\mathcal{Y}, \|.\|_Y)$ φραγμένος τελεστής. Τότε*

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\| : x \in \mathcal{X},\ \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in \mathcal{X},\ x \neq 0\} \\ &= \inf\{M > 0 : \|Tx\| \leq M\|x\| \text{ για κάθε } x \in \mathcal{X}\} \end{aligned}$$

και ισχύει $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$.

Πρόταση 1.1.6. *Έστω $(\mathcal{X}, \|.\|)$ χώρος με νόρμα, $D \subseteq \mathcal{X}$ πυκνός υπόχωρος και $(\mathcal{Y}, \|.\|)$ χώρος Banach. Αν $T : D \to \mathcal{Y}$ είναι γραμμική απεικόνιση, τότε η T δέχεται συνεχή επέκταση $\tilde{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ αν και μόνον αν η T είναι συνεχής. Η συνεχής επέκταση, αν υπάρχει, είναι μοναδική, και $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.*

Ορισμός 1.1.7. *Αν $(\mathcal{X}, \|.\|_X), (\mathcal{Y}, \|.\|_Y)$ είναι χώροι με νόρμα, το σύνολο των γραμμικών και φραγμένων απεικονίσεων $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ συμβολίζεται $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Γράφουμε $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ αντί για $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$. Ειδικότερα το σύνολο $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ συμβολίζεται $\mathcal{X}^*$ και ονομάζεται ο* **(τοπολογικός) δυϊκός** *του $\mathcal{X}$.*

Αν εφοδιάσουμε το σύνολο $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ με τις πράξεις κατά σημείο, δηλαδή αν ορίσουμε, για $T, S \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ και $\lambda \in \mathbb{C}$

$$(T+S)(x) = T(x) + S(x) \quad \text{και} \quad (\lambda T)(x) = \lambda T(x) \quad (x \in \mathcal{X})$$

τότε ο $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ γίνεται γραμμικός χώρος. Επίσης, η απεικόνιση

$$\|.\| : \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \to \mathbb{R}^+ : T \mapsto \|T\|$$

όπου $\|T\| = \sup\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X \leq 1\}$ (πρβλ. τον ορισμό 1.1.4) είναι νόρμα στον $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Θεώρημα 1.1.8 (Hahn - Banach, αναλυτική μορφή)**.** *Έστω $(\mathcal{X}, \|.\|)$ χώρος με νόρμα και $\mathcal{Y}$ γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{X}$. Αν $y^* : \mathcal{Y} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής γραμμική μορφή (δηλ. $y^* \in \mathcal{Y}^*$), τότε υπάρχει $x^* : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ συνεχής γραμμική μορφή (δηλ. $x^* \in \mathcal{X}^*$) με την ίδια νόρμα (δηλ. $\|x^*\| = \|y^*\|$) που επεκτείνει την y^* (δηλ. $x^*|_{\mathcal{Y}} = y^*$).*

Θεώρημα 1.1.9 (Αρχή Ομοιόμορφου φράγματος)**.** *Έστω $\mathcal{X}$ χώρος Banach, $\mathcal{Y}$ χώρος με νόρμα και $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ οικογένεια φραγμένων τελεστών. Αν η $\mathcal{T}$ είναι κατά σημείο φραγμένη, τότε είναι ομοιόμορφα φραγμένη.*

Θεώρημα 1.1.10 (Banach - Steinhaus)**.** *Έστω $\mathcal{X}$ ένας χώρος Banach, $\mathcal{Y}$ ένας χώρος με νόρμα και $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ακολουθία φραγμένων τελεστών. Αν για κάθε $x \in \mathcal{X}$ το όριο της ακολουθίας $(T_n(x))$ υπάρχει στον $\mathcal{Y}$, τότε υπάρχει* **φραγμένος** *γραμμικός τελεστής $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ τέτοιος ώστε $T(x) = \lim_n T_n(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$.*

Παρατήρηση 1.1.11. *Έστω $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ χώροι με νόρμα, και $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ γραμμική απεικόνιση. Αν η T είναι ανοικτή, τότε είναι επί του $\mathcal{Y}$.*

Θεώρημα 1.1.12 (Ανοικτής Απεικόνισης)**.** *Έστω $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ χώροι Banach και $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ γραμμική, συνεχής και επί. Τότε η T είναι ανοικτή.*

Θεώρημα 1.1.13 (Κλειστού Γραφήματος)**.** *Έστω $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ χώροι Banach και $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ γραμμική. Αν το γράφημα $Gr(T) \equiv \{(x, Tx) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} : x \in \mathcal{X}\}$ είναι κλειστό στον χώρο $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, τότε η T είναι συνεχής.*

Πρόταση 1.1.14. *Αν ο $\mathcal{Y}$ είναι χώρος Banach, τότε και ο $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ είναι χώρος Banach.*

Όταν $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, τότε ορίζεται η σύνθεση απεικονίσεων : $AB = A \circ B$, (όπου $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$). Ο τελεστής AB είναι φραγμένος και μάλιστα ισχύει η ανισότητα $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Ορισμός 1.1.15. *Άλγεβρα Banach λέγεται μία (προσεταιριστική, μιγαδική) άλγεβρα $\mathcal{A}$ που είναι χώρος Banach ως προς μία νόρμα $\|\cdot\|$ που ικανοποιεί*

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \quad \text{για κάθε} \quad A, B \in \mathcal{A}.$$

Αν ο $\mathcal{X}$ είναι χώρος Banach, τότε ο χώρος $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι άλγεβρα Banach με γινόμενο την σύνθεση απεικονίσεων.

Η άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ δεν είναι ποτέ μεταθετική, αν $\dim \mathcal{X} > 1$. Πράγματι, αν υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ στον $\mathcal{X}$, από το Θεώρημα Hahn-Banach μπορούμε να βρούμε $x_k^* \in \mathcal{X}^*$ ώστε[1] $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$. Τότε αν $E_{i,j}$ είναι ο τελεστής $E_{i,j}(x) = x_j^*(x)x_i$, έχουμε $E_{1,1}E_{1,2} = E_{1,2}$ ενώ $E_{1,2}E_{1,1} = 0$.

Μάλιστα η $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ περιέχει (αλγεβρικά) την άλγεβρα $M_n(\mathbb{C})$ των $n \times n$ πινάκων. Πράγματι, ο τελεστής $E_{i,j}$ αντιστοιχεί στον $n \times n$ πίνακα που έχει μονάδα στην θέση (i, j) και 0 παντού αλλού. Ελέγχεται εύκολα ότι η απεικόνιση $(a_{i,j}) \to \sum_{i,j} a_{i,j}E_{i,j}$ είναι $1-1$ μορφισμός αλγεβρών $M_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$.

1.1.2 Χώροι Hilbert

Ορισμός 1.1.16. *Έστω $\mathcal{H}$ μιγαδικός γραμμικός χώρος. Ένα* **εσωτερικό γινόμενο** *στον $\mathcal{H}$ είναι μία απεικόνιση*

$$\langle \ \cdot \ , \ \cdot \ \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$$

με τις ιδιότητες

$$\begin{array}{ll} (i) & \langle x, x\rangle \geq 0 \\ (ii) & \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0 \\ (iii) & \overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle \\ (iv) & \langle x_1 + \lambda x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \lambda\langle x_2, y\rangle \end{array}$$

για κάθε $x, x_1, x_2, y \in \mathcal{H}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Τότε η απεικόνιση

$$\|.\| : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^+ \ : \ x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

είναι νόρμα στον $\mathcal{H}$.

Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο λέγεται **χώρος Hilbert** *αν είναι πλήρης ως προς την νόρμα που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.*

Δύο στοιχεία $x, y \in \mathcal{H}$ σ'έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο λέγονται *κάθετα* αν $\langle x, y\rangle = 0$. Αν $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{H}$, το σύνολο

$$A^\perp = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y\rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in A\}$$

είναι πάντα κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$.

Θεώρημα 1.1.17. *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και M κλειστός γνήσιος υπόχωρος του $\mathcal{H}$. Τότε $M^\perp \neq \{0\}$, και ισχύει*

$$M \oplus M^\perp = \mathcal{H}.$$

Επομένως κάθε $x \in \mathcal{H}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο

$$x = P_M(x) + P_{M^\perp}(x)$$

όπου $P_M(x) \in M$ και $P_{M^\perp}(x) \in M^\perp$, και ισχύει

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|P_{M^\perp}(x)\|^2$$

[1] $\delta_{ij} = 1$ όταν $i = j$ και $\delta_{ij} = 0$ όταν $i \neq j$.

λόγω του Πυθαγόρειου Θεωρήματος. Επομένως $\|P_M(x)\|^2 \leq \|x\|^2$. Η απεικόνιση

$$P_M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

λέγεται η **ορθή προβολή** επί του M. Είναι καλά ορισμένη, γραμμική και συνεχής. Μάλιστα $\|P_M\| = 1$ όταν $M \neq \{0\}$.

Ορισμός 1.1.18. *Μία οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{H}$ λέγεται* **ορθοκανονική** *αν $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Αν επιπλέον η κλειστή γραμμική θήκη $\overline{[e_i : i \in I]}$ είναι όλος ο χώρος $\mathcal{H}$, τότε η οικογένεια λέγεται* **ορθοκανονική βάση** *του $\mathcal{H}$ (μία ορθοκανονική βάση συνήθως δεν είναι βάση με την αλγεβρική έννοια).*

Θεώρημα 1.1.19. *Κάθε χώρος Hilbert έχει μία ορθοκανονική βάση, η οποία είναι αριθμήσιμη αν και μόνον αν ο χώρος είναι διαχωρίσιμος.*

Αν $\{e_i : i \in I\}$ είναι ορθοκανονική βάση του χώρου Hilbert $\mathcal{H}$, τότε κάθε $x \in \mathcal{H}$ γράφεται μοναδικά

$$x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i \quad \text{και ισχύει} \quad \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$$

Το άθροισμα των σειρών αυτών είναι εξ ορισμού το όριο του δικτύου των μερικών αθροισμάτων. Στην διαχωρίσιμη περίπτωση, λόγω της καθετότητας των όρων ο ορισμός αυτός ταυτίζεται με τον συνηθισμένο.

Επομένως η επιλογή μίας ορθοκανονικής βάσης $\{e_i : i \in I\}$ ορίζει μία γραμμική ισομετρική απεικόνιση

$$U \ : \ \mathcal{H} \ \to \ \ell^2(I) \ : \ x \ \mapsto \ (\langle x, e_i \rangle)_{i \in I}$$

η οποία είναι επί του $\ell^2(I)$.

Θεώρημα 1.1.20 (Riesz)**.** *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert. Για κάθε συνεχή γραμμική μορφή $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ υπάρχει μοναδικό $x \in \mathcal{H}$ ώστε $f(y) = \langle y, x \rangle$ για κάθε $y \in \mathcal{H}$, και $\|f\| = \|x\|$. Επομένως ο τοπολογικός δυϊκός ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ είναι αντιγραμμικά ισόμορφος με τον $\mathcal{H}$.*

1.2 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1.2.1 (Διαγώνιοι τελεστές)**.**

Έστω $a = (a_n) \in \ell^\infty$. Αν $x = (x_n) \in \ell^2$ θέτουμε $D_a(x) = (a_n x_n)$. Τότε ο D_a είναι καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής από τον ℓ^2 στον εαυτό του και $\|D_a\| = \|a\|_\infty$.

Άσκηση 1.2.2. *Έστω $a = (a_n)$ ακολουθία αριθμών. Δείξτε ότι $D_a(\ell^2) \subseteq (\ell^2)$ αν και μόνον αν $a \in \ell^\infty$.*

Παράδειγμα 1.2.3 (Ο τελεστής της μετατόπισης (shift))**.**

Έστω $x = (x_n) \in \ell^2$. Θέτουμε

$$S(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots) \quad \text{και} \quad T(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)\,.$$

Οι S και T είναι καλά ορισμένοι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές από τον ℓ^2 στον εαυτό του. Η νόρμα $\|T\|$ είναι 1 και ο S είναι ισομετρία. Ο S είναι $1-1$, αλλά δεν είναι επί, και ο T είναι επί, αλλά δεν είναι $1-1$. Η σύνθεση $T \circ S$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση I, αλλά $S \circ T \neq I$.

Κάθε φραγμένος τελεστής $A \in \mathcal{B}(\ell^2)$ ορίζει έναν $\infty \times \infty$ πίνακα (a_{ij}) με μιγαδικούς συντελεστές από την σχέση

$$a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle$$

όπου $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ η συνηθισμένη βάση. Αν $x = (x_n) \in \ell^2$, τότε $Ax = (y_n)$ όπου

$$y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \, .$$

Για παράδειγμα, ο τελεστής D_a έχει πίνακα (d_{ij}) διαγώνιο: $d_{ij} = a_i \delta_{i,j}$, ενώ ο S έχει (γνήσια) κάτω τριγωνικό πίνακα: (s_{ij}) όπου $s_{ij} = \delta_{i,j+1}$.

Όμοια, κάθε τελεστής σ΄έναν τυχαίο χώρο Hilbert ορίζει έναν πίνακα, μέσω της επιλογής μίας ορθοκανονικής βάσης του χώρου. Δεν είναι αλήθεια όμως ότι κάθε $\infty \times \infty$ πίνακας (a_{ij}) ορίζει φραγμένο τελεστή. Για παράδειγμα, ο πίνακας $a_{ij} = 1$ για κάθε i, j δεν ορίζει φραγμένο τελεστή.

Άσκηση 1.2.4. *Δείξτε ότι ένας $\infty \times \infty$ πίνακας (a_{ij}) ορίζει φραγμένο τελεστή $\ell^2 \to \ell^2$ αν και μόνον αν απεικονίζει τον ℓ^2 στον εαυτό του, δηλαδή $(\sum_k a_{nk} x_k)_n \in \ell^2$ για κάθε $x = (x_n) \in \ell^2$.*

Παράδειγμα 1.2.5 (Πολλαπλασιαστικοί τελεστές).

Έστω (X, μ) χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου. Ο χώρος $L^2(X, \mu)$ είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας, modulo ισότητα μ-σχεδόν παντού, μετρησίμων συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$ που είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες, δηλαδή ικανοποιούν $\int_X |f|^2 d\mu < \infty$. Ο $L^2(X, \mu)$ γίνεται χώρος Hilbert αν εφοδιασθεί με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} d\mu$$

(Θεώρημα Riesz-Fisher).

Μία μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ λέγεται ουσιωδώς φραγμένη αν υπάρχει $A \in \mathbb{R}^+$ ώστε $\mu(\{x \in X : |f(x)| > A\}) = 0$. Ο χώρος $L^\infty(X, \mu)$ είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας, modulo ισότητα μ-σχεδόν παντού, μετρήσιμων συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$ που είναι ουσιωδώς φραγμένες. Αν ορίσουμε

$$\|f\|_\infty = \inf\{A : A \text{ ουσιώδες φράγμα της } f\}$$

τότε η $\|.\|_\infty$ ορίζει νόρμα στον $L^\infty(X, \mu)$ ως προς την οποία γίνεται άλγεβρα Banach, αν οι πράξεις ορισθούν κατά σημείο.

Κάθε $f \in L^\infty(X, \mu)$ ορίζει έναν φραγμένο τελεστή $M_f \in \mathcal{B}(L^2(X, \mu))$ από την σχέση $M_f(g) = fg$ και ισχύει $\|M_f\| = \|f\|_\infty$.

Παρατηρούμε ότι ένας διαγώνιος τελεστής είναι πολλαπλασιαστικός (στον χώρο $L^2(X, \mu) = \ell^2$ όπου $X = \mathbb{N}$ και $\mu(A) = \#A$, ο πληθάριθμος ενός συνόλου A).

Παράδειγμα 1.2.6 (Το shift στον χώρο του Hardy).

Ο χώρος του Hardy H^2 είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων που έχουν δυναμοσειρές με συντελεστές τετραγωνικά αθροίσιμους. Τέτοιες δυναμοσειρές έχουν ακτίνα σύγκλισης τουλάχιστον 1, επομένως ορίζουν συναρτήσεις ολόμορφες στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Είναι φανερό ότι η απεικόνιση $U : f \to (a_n)$, όπου $f(z) = \sum a_n z^n$, ορίζει γραμμικό ισομορφισμό μεταξύ του H^2 και του ℓ^2. Μεταφέροντας τη νόρμα του ℓ^2 στον H^2, ο H^2 αποκτά την δομή χώρου Hilbert και ο U

γίνεται ισομετρία επί (αλλιώς μοναδιστικός τελεστής - unitary operator). Αποδεικνύεται ότι η νόρμα στον H^2 δίνεται από τον τύπο

$$\|f\|^2 = \sup_{0\le r<1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 dt.$$

Αν ονομάσουμε $S_1 : H^2 \to H^2$ τον τελεστή που αντιστοιχεί στον τελεστή $S : \ell^2 \to \ell^2$ της μετατόπισης, δηλαδή $S_1 = U^{-1}SU$, τότε παρατηρούμε ότι $(S_1 f)(z) = zf(z)$ για κάθε $f \in H^2$ και $z \in \mathbb{D}$. Όμως ο S_1 δεν είναι πολλαπλασιαστικός τελεστής, γιατί δεν δρα σ΄έναν χώρο της μορφής $L^2(X, \mu)$.

Παράδειγμα 1.2.7 (Ολοκληρωτικοί τελεστές).

Έστω $k : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε για κάθε $f \in L^2[0, 1]$ το ολοκλήρωμα $\int_0^1 k(x, y)f(y)dy$ υπάρχει για κάθε $x \in [0, 1]$ και ορίζει συνεχή συνάρτηση $A_k f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ από τον τύπο

$$(A_k f)(x) = \int_0^1 k(x, y)f(y)dy.$$

Μάλιστα εξ αιτίας της ανισότητας

$$\int_0^1 |(A_k f)(x)|^2 dx \le \|k\|_{22}^2 \int_0^1 |f(y)|^2 dy$$

(όπου $\|k\|_{22}^2 = \iint |k(x, y)|^2 dxdy$) η απεικόνιση $f \to A_k f$ ορίζει φραγμένο τελεστή από τον $L^2[0, 1]$ στον εαυτό του με νόρμα $\|A_k\| \le \|k\|_{22}$ (η ανισότητα είναι συνήθως γνήσια).

Μάλιστα, τα παραπάνω επεκτείνονται όταν η συνάρτηση k δεν είναι αναγκαστικά συνεχής, αλλά ανήκει στον $L^2([0, 1] \times [0, 1])$. Επίσης, ο χώρος μέτρου $([0, 1], \lambda)$ μπορεί να αντικατασταθεί από έναν οποιονδήποτε χώρο (σ-πεπερασμένου) μέτρου.

(Οι ισχυρισμοί αυτοί αφήνονται ως άσκηση για τον αναγνώστη).

Παράδειγμα 1.2.8 (Ο μετασχηματισμός Fourier).

Για $k \in \mathbb{Z}$, θέτουμε $f_k : [0, 1] \to \mathbb{C} : t \mapsto e^{2\pi ikt}$. Ελέγχεται εύκολα ότι η οικογένεια $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι ορθοκανονική στον $L^2[0, 1]$. Το σημαντικό είναι ότι αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L^2[0, 1]$. Έπεται ότι κάθε $f \in L^2[0, 1]$ γράφεται στη μορφή

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} \langle f, f_k\rangle f_k \quad \text{και ισχύει} \quad \|f\|_2^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2.$$

Εδώ η πρώτη σειρά συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $L^2[0, 1]$, και αυτό είναι εύκολη συνέπεια της δεύτερης ισότητας (ισότητα Parseval). Γράφουμε

$$\hat{f}(k) = \langle f, f_k\rangle = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi ikt} dt \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Δημιουργείται έτσι μία απεικόνιση

$$F : L^2[0, 1] \to \ell^2(\mathbb{Z}) : f \to \hat{f}$$

(προφανώς γραμμική) και η ισότητα Parseval λέει ότι είναι ισομετρία. Είναι μάλιστα επί του $\ell^2(\mathbb{Z})$, γιατί στην εικόνα της, που είναι κλειστός υπόχωρος του $\ell^2(\mathbb{Z})$, περιέχεται η συνηθισμένη βάση $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ του $\ell^2(\mathbb{Z})$.

΄Ασκηση 1.2.9. *Έστω* $g : [0, 1] \to \mathbb{C}$ *συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε τον ολοκληρωτικό τελεστή* $K_g : L^2[0, 1] \to L^2[0, 1]$ *από τον τύπο*

$$(K_g f)(x) = \int_0^1 g(x - y) f(y) dy \qquad (f \in L^2[0, 1]).$$

Βρείτε τον πίνακα του τελεστή K_g *ως προς την ορθοκανονική βάση* $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$.