ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θεωρία Τελεστών

Ενότητα: Το φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές

Αριστείδης Κατάβολος

Τμήμα Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα ενότητας

6.1 Το φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές 4

6.1.1 Παράρτημα: Γενική απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.9 9

6.1 Το φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές

Σταθεροποιούμε έναν αυτοσυζυγή τελεστή $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ και στοχεύουμε να «αναπαραστήσουμε» τον A ως πολλαπλασιαστικό τελεστή σ' έναν κατάλληλο χώρο $L^2(X, \mu)$. Ακριβέστερα, θα κατασκευάσουμε ένα χώρο μέτρου (X, μ) και μία $f \in L^\infty(X, \mu)$ ώστε ο A να είναι **ορθομοναδιαία ισοδύναμος** με τον πολλαπλασιαστικό τελεστή M_f, δηλαδή να υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος τελεστής $U : L^2(X, \mu) \to \mathcal{H}$ ώστε $A = UM_fU^{-1}$.

Το κρίσιμο βήμα εμπεριέχεται στο:

Λήμμα 6.1.1. *Για κάθε μη μηδενικό $x \in \mathcal{H}$ υπάρχει θετικό κανονικό πεπερασμένο μέτρο Borel μ_x στο $\sigma(A)$ και ισομετρία $U_x : L^2(\sigma(A), \mu_x) \to \mathcal{H}$ ώστε*

$$U_x M_f = f(A)U_x \quad \text{για κάθε} \quad f \in C(\sigma(A))$$

(και ειδικότερα $AU_x = U_x M_{f_o}$ όπου $f_o(\lambda) = \lambda$).

Απόδειξη. Από τον συναρτησιακό λογισμό για συνεχείς συναρτήσεις (Θεώρημα 5.1.3), ορίζεται η απεικόνιση

$$\Phi_c : C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}) : f \to f(A)$$

που είναι ισομετρικός *-μορφισμός.

Σταθεροποιούμε ένα μη μηδενικό $x \in \mathcal{H}$ και θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση

$$\phi_x : C(\sigma(A)) \to \mathbb{C} : f \to \langle f(A)x, x\rangle.$$

Παρατηρούμε ότι η ϕ_x είναι **θετική** γραμμική μορφή στον $C(\sigma(A))$, δηλαδή $\phi_x(f) \geq 0$ για κάθε $f \geq 0$. Πράγματι, αν $f \geq 0$ τότε $f(A) \geq 0$ (Πόρισμα 5.1.12) επομένως $\phi_x(f) = \langle f(A)x, x\rangle \geq 0$.

Από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz[1], υπάρχει (μοναδικό) θετικό πεπερασμένο κανονικό μέτρο Borel μ_x στο $\sigma(A)$ ώστε

$$\int f d\mu_x = \phi_x(f) = \langle f(A)x, x\rangle \quad \text{για κάθε } f \in C(\sigma(A)).$$

Θεωρώντας τώρα τον χώρο $C(\sigma(A))$ ως υπόχωρο του $L^2(\sigma(A), \mu_x)$,[2] ορίζουμε την απεικόνιση

$$U_{ox} : (C(\sigma(A)), \|\cdot\|_2) \to (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}) : f \to f(A)x$$

που είναι προφανώς γραμμική. Ισχυριζόμαστε ότι είναι ισομετρία. Πράγματι, για κάθε $f \in C(\sigma(A))$,

$$\begin{aligned}\|f(A)x\|_{\mathcal{H}}^2 &= \langle f(A)x, f(A)x\rangle = \langle f(A)^* f(A)x, x\rangle = \langle (\bar{f}f)(A)x, x\rangle \\ &= \int \bar{f} f d\mu_x = \|f\|_2^2\end{aligned}$$

(χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η $\Phi_c : f \to f(A)$ είναι *-μορφισμός). Δείξαμε λοιπόν ότι $\|U_{ox}(f)\|_{\mathcal{H}} = \|f\|_2$ για κάθε $f \in C(\sigma(A))$, δηλαδή ότι η U_{ox} είναι ισομετρική. Επομένως επεκτείνεται σε ισομετρία U_x ορισμένη στην κλειστή θήκη του $C(\sigma(A))$ ως προς την νόρμα $\|.\|_2$. Αλλά αυτή η κλειστή θήκη είναι ακριβώς[3] ο $L^2(\sigma(A), \mu_x)$. Έχουμε λοιπόν μία ισομετρία

$$U_x : L^2(\sigma(A), \mu_x) \to \mathcal{H}$$

[1] βλέπε π.χ. Γ. Κουμουλλής, Σ. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μέτρου*, Εκδ. Συμμετρία, 1988 (Θεώρημα 12.26)

[2] δηλαδή ταυτίζοντας συναρτήσεις που διαφέρουν μόνο σε μ_x-μηδενικά σύνολα

[3] βλέπε π.χ. Γ. Κουμουλλής, Σ. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μέτρου*, Εκδ. Συμμετρία, 1988 (Πρόταση 12.24)

που ικανοποιεί $U_x(f) = f(A)x$ όταν η f είναι συνεχής.

Μένει να δειχθεί ότι $U_x M_f = f(A)U_x$ για κάθε $f \in C(\sigma(A))$.

Πράγματι, για κάθε $g \in C(\sigma(A))$ έχουμε

$$(U_x M_f)(g) = U_x(fg) = ((fg)(A))(x) = f(A)(g(A)(x)) = (f(A)U_x)(g).$$

Επομένως οι **φραγμένοι** τελεστές $U_x M_f$ και $f(A)U_x$ ταυτίζονται στον πυκνό υπόχωρο $C(\sigma(A))$ του $L^2(\sigma(A), \mu_x)$, άρα είναι ίσοι. □

Παρατήρηση 6.1.2. *Αξίζει ίσως να σχολιάσει κανείς τον* ***διπλό ρόλο του χώρου*** *$C(\sigma(A))$ στην προηγούμενη απόδειξη: Αφενός μεν χρησιμοποιήθηκε (μέσω του συναρτησιακού λογισμού) ως χώρος τελεστών $f(A)$ στον $\mathcal{H}$, αφετέρου ως χώρος διανυσμάτων στον $L^2(\sigma(A), \mu_x)$.*

Παρατήρηση 6.1.3. *Το σύνολο τιμών $\mathrm{im}(U_x)$ της ισομετρίας U_x του Λήμματος είναι ακριβώς ο* ***κυκλικός υπόχωρος***

$$\mathcal{H}_x = \overline{[A^n x : n = 0, 1, \ldots]} = \overline{[x, Ax, A^2 x, \ldots]}$$

του x για τον A.

Πράγματι, το σύνολο τιμών του U_x είναι κλειστό (διότι ο U_x είναι ισομετρία) και περιέχει το $f(A)x$ για κάθε $f \in C(\sigma(A))$. Ειδικότερα περιέχει όλα τα διανύσματα της μορφής $A^n x$ για $n = 0, 1, \ldots$, άρα περιέχει τον $\mathcal{H}_x$. Από την άλλη μεριά κάθε $f \in C(\sigma(A))$ προσεγγίζεται από μία ακολουθία (p_n) από πολυώνυμα, ομοιόμορφα στο $\sigma(A)$, και συνεπώς $\|p_n(A) - f(A)\| \to 0$, άρα και $\|p_n(A)x - f(A)x\| \to 0$. Αλλά κάθε $p_n(A)x$ ανήκει στον $\mathcal{H}_x$, συνεπώς το ίδιο ισχύει για το $f(A)x$. Επομένως

$$\mathrm{im}\, U_{ox} = \{f(A)x : f \in C(\sigma(A))\} \subseteq \mathcal{H}_x \subseteq \mathrm{im}\, U_x$$

$$\text{άρα} \qquad \mathrm{im}\, U_x = \overline{\mathrm{im}\, U_{ox}} \subseteq \mathcal{H}_x \subseteq \mathrm{im}\, U_x$$

και συνεπώς ισχύει ισότητα.

Παρατήρηση 6.1.4. *Αν μπορούσαμε να επιλέξουμε το $x \in \mathcal{H}$ ώστε ο U_x να είναι αντιστρέψιμος, τότε το προηγούμενο Λήμμα θα έδινε $f(A) = U_x M_f U_x^{-1}$ για κάθε $f \in C(\sigma(A))$, και ειδικότερα $A = U_x M_{f_o} U_x^{-1}$, οπότε θα είχαμε δείξει ότι ο A είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με έναν πολλαπλασιαστικό τελεστή.*

Αλλά ο U_x είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν είναι επί του $\mathcal{H}$ (γιατί είναι πάντα ισομετρία, άρα $1-1$). Από την προηγούμενη παρατήρηση, αυτό συμβαίνει ακριβώς όταν ο κυκλικός υπόχωρος $\mathcal{H}_x$ είναι όλος ο χώρος $\mathcal{H}$.

Ορισμός 6.1.5. *Ένα διάνυσμα $x \in \mathcal{H}$ λέγεται* ***κυκλικό*** *(cyclic) για τον τελεστή $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ αν ο κυκλικός υπόχωρος (cyclic subspace) που ορίζει είναι όλος ο $\mathcal{H}$, ισοδύναμα αν ο γραμμικός χώρος $[A^n x : n = 0, 1, \ldots]$ είναι πυκνός στον $\mathcal{H}$.*

Το Λήμμα και οι παρατηρήσεις που προηγήθηκαν αποδεικνύουν την

Πρόταση 6.1.6. *Αν ένας αυτοσυζυγής τελεστής $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ έχει κυκλικό διάνυσμα, υπάρχει πεπερασμένο θετικό κανονικό μέτρο Borel μ στο $\sigma(A)$ ώστε ο A να είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με τον τελεστή M_{f_o} του πολλαπλασιασμού επί την ανεξάρτητη μεταβλητή, $(M_{f_o}(g))(x) = xg(x)$, στον $L^2(\sigma(A), \mu)$.*

Όμως, δεν έχουν όλοι οι αυτοσυζυγείς τελεστές κυκλικά διανύσματα. Για παράδειγμα, ο ταυτοτικός τελεστής του $\mathcal{H}$ δεν έχει ποτέ κυκλικό διάνυσμα, εκτός αν ο $\mathcal{H}$ είναι μονοδιάστατος! Ένα λιγότερο τετριμμένο παράδειγμα είναι το εξής:

Παράδειγμα 6.1.7. *Έστω $\mathcal{H} = L^2([0,1]) \oplus L^2([0,1])$ [4] και έστω $A = M_{f_o} \oplus M_{f_o}$ όπου $f_o(\lambda) = \lambda$ $(\lambda \in [0,1])$. Τότε ο A είναι αυτοσυζυγής τελεστής χωρίς κυκλικό διάνυσμα.*

Απόδειξη. Ότι ο A είναι αυτοσυζυγής έπεται από το γεγονός ότι η f_o είναι πραγματική. Ισχυριζόμαστε ότι κανένα διάνυσμα $f \oplus g$ δεν είναι κυκλικό για τον A. Πράγματι, το διάνυσμα $\bar{g} \oplus (-\bar{f})$ είναι κάθετο σε κάθε $A^n(f \oplus g)$:

$$\left\langle A^n(f \oplus g), \bar{g} \oplus (-\bar{f})\right\rangle = \left\langle (M_{f_o}^n f \oplus M_{f_o}^n g), \bar{g} \oplus (-\bar{f})\right\rangle = \left\langle M_{f_o}^n f, \bar{g}\right\rangle - \left\langle M_{f_o}^n g, \bar{f}\right\rangle$$
$$= \int t^n f(t) g(t) dt - \int t^n g(t) f(t) dt = 0.$$

Έπεται ότι η γραμμική θήκη του συνόλου $\{A^n(f \oplus g) : n = 0, 1, \dots\}$ δεν μπορεί να είναι πυκνή στον $\mathcal{H}$.

Παρατηρούμε ότι αν ταυτίσουμε τον χώρο $\mathcal{H}$ στο παράδειγμα αυτό με τον $L^2([0,1] \cup [1,2])$, τότε ο τελεστής A ταυτίζεται με τον M_f, όπου f η «οδοντωτή» συνάρτηση $f(t) = t$ για $t \in [0,1]$ και $f(t) = t - 1$ για $t \in (1,2]$.

Με κάπως ανάλογο τρόπο, η γενική περίπτωση ανάγεται στην περίπτωση της Πρότασης 6.1.6 τοποθετώντας κατάλληλους χώρους μέτρου «τον ένα δίπλα στον άλλο».

Λήμμα 6.1.8. *Αν $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι αυτοσυζυγής, υπάρχει μία οικογένεια $\{\mathcal{H}_i : i \in I\}$ από κάθετους ανά δύο υποχώρους του $\mathcal{H}$, ώστε*

(i) κάθε $\mathcal{H}_i$ να είναι A-αναλλοίωτος, δηλ. $A(\mathcal{H}_i) \subseteq \mathcal{H}_i$

(ii) κάθε $\mathcal{H}_i$ να είναι A-κυκλικός, δηλ. να περιέχει ένα A-κυκλικό διάνυσμα

*(iii) το ευθύ άθροισμα $\vee_i \mathcal{H}_i$ (δηλαδή ο μικρότερος **κλειστός** υπόχωρος του $\mathcal{H}$ που περιέχει κάθε $\mathcal{H}_i$) να είναι όλος ο $\mathcal{H}$.*

Απόδειξη. Ονομάζουμε δύο μη μηδενικά διανύσματα $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ **πολύ κάθετα** (ως προς A) αν $A^n x_1 \perp A^m x_2$ για κάθε $n, m = 0, 1, \dots$, ισοδύναμα (γιατί;) αν οι κυκλικοί υπόχωροι που παράγονται από τα x_1 και x_2 είναι κάθετοι.

Έστω $\{x_i : i \in I\}$ μία μεγιστική[5] οικογένεια από πολύ κάθετα διανύσματα, και για κάθε i έστω $\mathcal{H}_i = [A^n x_i : n = 0, 1, \dots]$ ο αντίστοιχος κυκλικός υπόχωρος.

Εφόσον $A(A^n x_i) = A^{n+1} x_i \in \mathcal{H}_i$ για κάθε n και ο A είναι συνεχής, έπεται ότι $A(\mathcal{H}_i) \subseteq \mathcal{H}_i$ για κάθε i.

Μένει να δειχθεί ότι το ευθύ άθροισμα $\vee_i \mathcal{H}_i$ είναι όλος ο $\mathcal{H}$.

Πράγματι, αν ένα μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathcal{H}$ είναι κάθετο στον $\vee_i \mathcal{H}_i$ τότε για κάθε $i \in I$ και κάθε $n, m = 0, 1, \dots$ έχουμε

$$\langle A^n x, A^m x_i \rangle = \langle x, A^{n+m} x_i \rangle = 0$$

(διότι $A^{n+m} x_i \in \mathcal{H}_i$) πράγμα που δείχνει (γιατί;) ότι ο κυκλικός υπόχωρος $\mathcal{H}_x$ που παράγεται από το x είναι κάθετος στον $\mathcal{H}_i$. Αυτό αντιβαίνει στην μεγιστικότητα της οικογένειας $\{x_i : i \in I\}$.

Σταθεροποιούμε μία οικογένεια $\{\mathcal{H}_i : i \in I\}$ όπως στο Λήμμα 6.1.8.

[4] με το εσωτερικό γινόμενο $\langle f_1 \oplus g_1, f_2 \oplus g_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle + \langle g_1, g_2 \rangle$

[5] Η απόδειξη της ύπαρξης τέτοιας οικογένειας είναι τυπική εφαρμογή του Λήμματος Zorn.

Από το Λήμμα 6.1.1, για κάθε $i \in I$ υπάρχει πεπερασμένο θετικό μέτρο Borel μ_i στον $\sigma(A)$ και ισομετρία

(*) $$U_i : L^2(\sigma(A), \mu_i) \to \mathcal{H} \text{ ώστε } AU_i = U_i M_{f_i}$$

όπου $f_i(\lambda) = \lambda\,(\lambda \in \sigma(A))$, και το σύνολο τιμών της U_i είναι $\mathcal{H}_i$. Δηλαδή, αν θέσουμε $A_i = A|_{\mathcal{H}_i}$, κάθε A_i είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με τον πολλαπλασιαστικό τελεστή M_{f_i} που δρα στον χώρο $L^2(\sigma(A), \mu_i)$.

Θα δείξουμε ότι ο A είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με έναν κατάλληλο πολλαπλασιαστικό τελεστή M_f στον $L^2(X, \mu)$, όπου ο (X, μ) είναι η λεγόμενη **ξένη ένωση** των χώρων μέτρου $(\sigma(A), \mu_i)$, $i \in I$. Για να αποφύγουμε ορισμένες μετροθεωρητικές δυσκολίες, θα υποθέσουμε στο εξής[6] ότι

> ο χώρος $\mathcal{H}$ είναι διαχωρίσιμος, οπότε και η οικογένεια $\{x_i\}$ είναι αριθμήσιμη.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $I = \mathbb{N}$. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε, όπως θα δούμε, να πάρουμε για (X, μ) τον $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με ένα κατάλληλο μέτρο Borel.

Παρατηρούμε πρώτα ότι, εφόσον $\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|]$, η διάμετρος του $\sigma(A)$ δεν υπερβαίνει το $2\|A\|$. Επομένως, αν θέσουμε $a = 3\|A\|$ και

$$X_i = \sigma(A) + ia = \{\lambda + ia : \lambda \in \sigma(A)\},$$

τα σύνολα X_i, $i \in \mathbb{N}$ είναι ξένα ανα δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Ορίζουμε το εξής μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$:

$$\mu(Y) = \sum_i \mu_i(\phi_i(Y \cap X_i)), \qquad Y \subseteq \mathbb{R} \text{ Borel}$$
$$\text{όπου} \quad \phi_i : X_i \to \sigma(A) : t \to t - ia.$$

Είναι εύκολη άσκηση Θεωρίας Μέτρου να ελέγξει κανείς ότι το μ είναι πράγματι μέτρο και είναι σ-πεπερασμένο, αφού κάθε μ_i είναι πεπερασμένο.

Απεικονίζουμε τώρα τους χώρους $L^2(\sigma(A), \mu_i)$, $i \in \mathbb{N}$ ισομετρικά σε κάθετους ανά δύο υποχώρους του $L^2(\mathbb{R}, \mu)$:

Ισχυρισμός : Για κάθε i η απεικόνιση

$$W_i : L^2(\mathbb{R}, \mu) \to L^2(\sigma(A), \mu_i)$$
$$\text{όπου} \quad (W_i g)(\lambda) = g(\lambda + ia), \quad \lambda \in \sigma(A)$$

είναι γραμμική, επί και ικανοποιεί

$$\|W_i g\| = \|g|_{X_i}\| \text{ για κάθε } g \in L^2(\mathbb{R}, \mu).$$

Απόδειξη : Η W_i είναι επί του $L^2(\sigma(A), \mu_i)$, γιατί αν $h \in L^2(\sigma(A), \mu_i)$ θέτοντας $g(t) = h(\phi_i(t))$ για $t \in X_i$ και $g(t) = 0$ για $t \notin X_i$, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 d\mu(t) = \int_{X_i} |h(\phi_i(t))|^2 d\mu(t) = \int_{\sigma(A)} |h(\lambda)|^2 d\mu_i(\lambda) < \infty$$

[6] Τονίζουμε ότι η υπόθεση αυτή γίνεται μόνον για ευκολία στην απόδειξη· το θεώρημα 6.1.9 ισχύει και σε μη διαχωρίσιμους χώρους. Δίνουμε μία γενική απόδειξη στο Παράρτημα 6.1.1

άρα $g \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$ και $W_i g = h$.

Έστω $g \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$. Αν η g μηδενίζεται στο X_i τότε για κάθε $\lambda \in \sigma(A)$ έχουμε $(W_i g)(\lambda) = 0$ εφόσον $\lambda + ia \in X_i$.

Αν η g μηδενίζεται στο X_i^c τότε ισχυρίζομαι ότι $\|W_i g\| = \|g\|$. Πράγματι αρκεί να αποδειχθεί ο ισχυρισμός όταν η g είναι απλή συνάρτηση, $g = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{Y_k}$ όπου $Y_k \subseteq X_i$ ξένα Borel. Έχουμε $W_i g = \sum_k c_k \chi_{\phi_i(Y_k)}$ (γιατί $W_i(\chi_Y) = \chi_{\phi_i(Y)}$), άρα

$$\|W_i g\|^2 = \sum_k |c_k|^2 \left\|\chi_{\phi_i(Y_k)}\right\|^2 = \sum_k |c_k|^2 \mu_i(\phi_i(Y_k)) = \sum_k |c_k|^2 \mu(Y_k) = \|g\|^2.$$

Έπεται ότι για κάθε $g \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$ ισχύει

$$\|W_i g\| = \left\|W_i(g|_{X_i}) + W_i(g|_{X_i^c})\right\| = \|W_i(g|_{X_i})\| = \|g|_{X_i}\|$$

και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ έχουμε ονομάσει $f_i \in L^\infty(\sigma(A), \mu_i)$ τη συνάρτηση $f_i(\lambda)=\lambda$ $(\lambda \in \sigma(A))$. Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ θέτοντας

$$f(t) = \begin{cases} f_i(t - ia), & \text{αν υπάρχει } i \text{ ώστε } t \in X_i \\ 0, & \text{αν } t \notin \cup_i X_i \end{cases}$$

Η f ανήκει στον $L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$ γιατί $\|f\|_\infty = \sup_i \|f_i\|_\infty = \|A\|$, άρα ορίζεται ο τελεστής M_f στον $L^2(\mathbb{R}, \mu)$.

Παρατηρούμε ότι

$$W_i M_f = M_{f_i} W_i$$

Πράγματι, για κάθε $g \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$, αν $\lambda \in \sigma(A)$ έχουμε

$$(W_i f g)(\lambda) = (f g)(\lambda + ia) = f(\lambda + ia) g(\lambda + ia) = f_i(\lambda) g(\lambda + ia)$$

οπότε

$$W_i M_f g = W_i(f g) = f_i(W_i g) = M_{f_i} W_i g.$$

Επειδή όμως $U_i M_{f_i} = A U_i$ (βλ. εξίσωση (*)), έπεται ότι

(**) $$U_i W_i M_f = U_i M_{f_i} W_i = A U_i W_i.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $g \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$ έχουμε $U_i W_i g \in \mathcal{H}_i$ άρα τα $U_i W_i g$ είναι ανά δύο κάθετα και επομένως, αφού η U_i είναι ισομετρία,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} \|U_i W_i g\|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \|W_i g\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|g|_{X_i}\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{X_i} |g|^2 d\mu = \int_{\mathbb{R}} |g|^2 d\mu = \|g\|^2 .\end{aligned}$$

Έπεται ότι η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} U_i W_i g$ συγκλίνει στον $\mathcal{H}$ και ότι

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} U_i W_i g \right\|^2 = \|g\|^2 .$$

Αν λοιπόν ορίσουμε την απεικόνιση

$$U : L^2(\mathbb{R}, \mu) \to \mathcal{H} : \quad g \to \sum U_i W_i g$$

τότε η U είναι ισομετρία. Η εικόνα της περιέχει κάθε $\mathcal{H}_i$, άρα και την κλειστή γραμμική τους θήκη, που είναι ο $\mathcal{H}$. Δηλαδή η U είναι ισομετρία επί, άρα ορθομοναδιαίος τελεστής. Τέλος, για κάθε $g \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$,

$$UM_f g = \sum U_i W_i M_f g \overset{(**)}{=} \sum AU_i W_i g = A \sum U_i W_i g = AUg$$

επομένως $UM_f = AU$ και άρα

$$A = UM_f U^{-1}.$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει (με την επιπλέον υπόθεση ότι ο $\mathcal{H}$ είναι διαχωρίσιμος) το

Θεώρημα 6.1.9 (Φασματικό Θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές).
Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ αυτοσυζυγής τελεστής. Υπάρχει χώρος μέτρου (X, μ), συνάρτηση $f \in L^\infty(X, \mu)$ και ορθομοναδιαίος τελεστής $U : L^2(X, \mu) \to \mathcal{H}$ ώστε $A = UM_f U^{-1}$.

6.1.1 Παράρτημα: Γενική απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.9

Υπενθυμίζεται ότι έχουμε έναν αυτοσυζυγή τελεστή $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ και μία οικογένεια $\{\mathcal{H}_i : i \in I\}$ από κάθετους ανα δύο A-αναλλοίωτους κυκλικούς υποχώρους με ευθύ άθροισμα $\mathcal{H}$ (Λήμμα 6.1.8).

Από το Λήμμα 6.1.1, για κάθε $i \in I$ υπάρχει πεπερασμένο θετικό μέτρο Borel μ_i στον $\sigma(A)$ και ισομετρία

(*) $$U_i : L^2(\sigma(A), \mu_i) \to \mathcal{H} \text{ ώστε } AU_i = U_i M_{f_i}$$

όπου $f_i(\lambda) = \lambda \ (\lambda \in \sigma(A))$, και το σύνολο τιμών της U_i είναι $\mathcal{H}_i$. Δηλαδή, αν θέσουμε $A_i = A|_{\mathcal{H}_i}$, κάθε A_i είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με τον πολλαπλασιαστικό τελεστή M_{f_i} που δρα στον χώρο $L^2(\sigma(A), \mu_i)$.

Θα δείξουμε ότι ο A είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με έναν κατάλληλο πολλαπλασιαστικό τελεστή M_f στον $L^2(X, \mu)$, όπου ο (X, μ) είναι η **ξένη ένωση** των χώρων μέτρου $(X_i, \mu_i) = (\sigma(A), \mu_i)$. Η απόδειξη θα γίνει σε δύο βήματα: πρώτα θα δείξουμε ότι ο A είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με το **ευθύ άθροισμα** $B = \oplus M_{f_i}$ των πολλαπλασιαστικών τελεστών M_{f_i}, και μετά θα δείξουμε ότι ο B είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με έναν πολλαπλασιαστικό τελεστή.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H} = \vee \mathcal{H}_i \arrow[r, "A"] & \mathcal{H} = \vee \mathcal{H}_i \\
\oplus L^2(X_i, \mu_i) \arrow[r, "\oplus M_{f_i}"] \arrow[u, "\oplus U_i"] & \oplus L^2(X_i, \mu_i) \arrow[u, "\oplus U_i"'] \\
L^2(X, \mu) \arrow[r, "M_f"] \arrow[u, "V"] & L^2(X, \mu) \arrow[u, "V"']
\end{tikzcd}$$

Ορισμός 6.1.10. *(α) Αν $\{\mathcal{K}_i\}$ είναι μία οικογένεια χώρων Hilbert, ονομάζουμε **(εξωτερικό) ευθύ άθροισμα** $\oplus_i \mathcal{K}_i$ το σύνολο $\mathcal{K}$ όλων των οικογενειών (x_i) με $x_i \in \mathcal{K}_i$ για κάθε i που είναι τετραγωνικά αθροίσιμες[7], δηλαδή $\sum_i \|x_i\|_i^2 < \infty$. Συμβολίζουμε τα στοιχεία $x \in \mathcal{K}$ με $x = \oplus x_i$ και θέτουμε[8]*

$$\langle x, y\rangle_{\mathcal{K}} = \sum_{i \in I} \langle x_i, y_i\rangle_i .$$

*(β) Αν $T_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{K}_i$ είναι φραγμένοι τελεστές για κάθε i και $\sup_i \|T_i\| < \infty$, τότε για κάθε $\oplus x_i \in \mathcal{K}$ η οικογένεια $(T_i(x_i))$ είναι τετραγωνικά αθροίσιμη. Ορίζουμε το **ευθύ άθροισμα** T των τελεστών T_i από την σχέση*

$$\begin{aligned} T : \oplus \mathcal{H}_i &\longrightarrow \oplus \mathcal{K}_i \\ \oplus x_i &\longrightarrow \oplus_i T_i(x_i). \end{aligned}$$

Παρατήρηση 6.1.11. *Η T είναι καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση διότι για κάθε $x \in \oplus \mathcal{H}_i$ έχουμε*

$$\sum_{i \in I} \|T_i(x_i)\|_{\mathcal{K}_i}^2 \leq \sup_i \|T_i\|^2 \sum_{i \in I} \|x_i\|_{\mathcal{H}_i}^2 .$$

Επομένως πράγματι $\oplus_i T_i(x_i) \in \oplus_i \mathcal{K}_i$, και ο T είναι φραγμένος τελεστής με $\|T\| \leq \sup_i \|T_i\|$. Μάλιστα είναι εύκολη άσκηση να δείξει κανείς ότι $\|T\| = \sup_i \|T_i\|$. Αν κάθε T_i είναι ισομετρία, τότε και ο T είναι ισομετρικός.

Παρατήρηση 6.1.12. *Αν $\mathcal{H}_n, n \in \mathbb{N}$ είναι **κάθετοι ανά δύο** υπόχωροι ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$, τότε το εσωτερικό ευθύ άθροισμά τους $\vee \mathcal{H}_n$ είναι ίσο με το σύνολο*

$$\mathcal{H}_0 = \{\sum_n x_n : x_n \in \mathcal{H}_n, \sum \|x_n\|^2 < \infty\}$$

και η απεικόνιση

$$W : \oplus_n \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_0 : \oplus x_n \to \sum_n x_n$$

είναι ισομετρικός ισομορφισμός. Για τον λόγο αυτό ταυτίζουμε το εξωτερικό με το εσωτερικό ευθύ άθροισμα καθέτων ανά δύο υποχώρων[9] ενός χώρου Hilbert.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι το σύνολο $\mathcal{H}_0$ είναι καλά ορισμένο, γιατί αν $\oplus x_n \in \oplus \mathcal{H}_n$, δηλαδή $\sum \|x_n\|^2 < \infty$ τότε τα μερικά αθροίσματα $s_N = \sum_{n=1}^N x_n$ της σειράς $\sum_n x_n$ αποτελούν βασική ακολουθία: πράγματι αν $m > n$ τότε $\|s_m - s_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^m \|x_k\|^2$ (αφού τα x_k είναι ανά δύο κάθετα). Επίσης έχουμε

$$\left\|\sum_{k=1}^\infty x_k\right\|^2 = \lim_n \left\|\sum_{k=1}^n x_k\right\|^2 = \lim_n \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 = \sum_{k=1}^\infty \|x_k\|^2.$$

Είναι τώρα φανερό ότι η W είναι καλά ορισμένη, γραμμική και ισομετρική απεικόνιση από τον $\oplus H_n$ στον $\mathcal{H}$ και η εικόνα της είναι ακριβώς ο $\mathcal{H}_0$. Συνεπώς ο $\mathcal{H}_0$ είναι (πλήρης, άρα) κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$ και βεβαίως περιέχει κάθε $\mathcal{H}_n$, άρα και τη γραμμική τους θήκη. Αφού ο $\mathcal{H}_0$ είναι πλήρης, έπεται ότι $\vee \mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{H}_0$. Αν όμως κάποιο $y \in \mathcal{H}$ είναι κάθετο σε κάθε $\mathcal{H}_n$, τότε είναι κάθετο και στον $\mathcal{H}_0$, γιατί για κάθε $x = \sum x_n \in \mathcal{H}_0$ έχουμε $\langle y, \sum_n x_n\rangle = \sum_n \langle y, x_n\rangle = 0$. Άρα τελικά ισχύει ισότητα: $\vee \mathcal{H}_n = \mathcal{H}_0$. □

[7] Αποδεικνύεται, ακριβώς όπως στην περίπτωση του ℓ^2, ότι το ευθύ άθροισμα χώρων Hilbert είναι χώρος Hilbert.

[8] Το άθροισμα της σειράς είναι εξ ορισμού το όριο του δικτύου των αθροισμάτων σε πεπερασμένα υποσύνολα του I, και η σειρά συγκλίνει διότι συγκλίνει απόλυτα, εφόσον $(\sum_{i \in F} |\langle x_i, y_i\rangle_i|)^2 \leq \left(\sum_{i \in F} \|x_i\|^2\right)\left(\sum_{i \in F} \|y_i\|^2\right)$ για κάθε $F \subset I$ πεπερασμένο.

[9] Η παρατήρηση αυτή αληθεύει και για υπεραριθμήσιμες οικογένειες υποχώρων, αρκεί να θεωρήσουμε το άθροισμα $\sum_i x_i$ ως το όριο του **δικτύου** $\{s_F\}$ των αθροισμάτων $s_F = \sum_{i \in F} x_i$ όπου $F \subseteq I$ πεπερασμένο.

Επανερχόμαστε τώρα στη μελέτη του αυτοσυζυγούς τελεστή $A \in B(\mathcal{H})$.

Ισχυρισμός 6.1.13. *Έστω $\mathcal{K}$ το (εξωτερικό) ευθύ άθροισμα $\oplus_i L^2(\sigma(A), \mu_i)$ και $B := \oplus M_{f_i} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$. Τότε ο τελεστής A είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με τον τελεστή B μέσω της απεικόνισης U όπου*

$$U = \oplus_i U_i : \mathcal{K} = \oplus_i L^2(\sigma(A), \mu_i) \to \mathcal{H} = \vee \mathcal{H}_i .$$

Δηλαδή έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H} = \vee \mathcal{H}_i \arrow[r, "A"] & \mathcal{H} = \vee \mathcal{H}_i \\
\oplus L^2(X_i, \mu_i) \arrow[u, "\oplus U_i"] \arrow[r, "\oplus M_{f_i}"] & \oplus L^2(X_i, \mu_i) \arrow[u, "\oplus U_i"']
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Ο B είναι καλά ορισμένος και φραγμένος[10], με $\|B\| \le \sup_i \|M_{f_i}\| = \sup_i \|f_i\|_\infty = \|A\|$.

Για κάθε $g = \oplus g_i \in \mathcal{K}$ έχουμε $B(\oplus g_i) = \oplus M_{f_i} g_i$, άρα

(από την (*))
$$\begin{aligned} UB(\oplus g_i) &= \sum U_i M_{f_i} g_i = \sum A U_i g_i \\ &= A(\sum U_i g_i) = AU(\oplus g_i). \end{aligned}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι $UB = AU$. Εφόσον η U είναι ισομετρία επί του $\mathcal{H}$, άρα αντιστρέψιμη, έπεται ότι $A = UBU^{-1}$. □

Συνεπώς ο A είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με ένα ευθύ άθροισμα πολλαπλασιαστικών τελεστών. Μένει να αποδειχθεί ότι ο τελεστής $B = \oplus M_{f_i}$ είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με έναν πολλαπλασιαστικό τελεστή σ'έναν κατάλληλο χώρο $L^2(X, \mu)$. Ο χώρος (X, μ) είναι η «ξένη ένωση» των χώρων $(\sigma(A), \mu_i)$ που ορίζεται αναλυτικά ως εξής:

Ορισμός 6.1.14. *Θέτουμε $X_i = \sigma(A) \times \{i\}$ και ονομάζουμε $\mathcal{S}_i$ την σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του X_i. Έστω $X = \cup_{i \in I} X_i$. Ορίζουμε την οικογένεια $\mathcal{S}$ και την απεικόνιση μ από τις σχέσεις*

$$\begin{aligned} &\mathcal{S} = \{Y \subseteq X : Y \cap X_i \in \mathcal{S}_i \text{ για κάθε } i \in I\} \\ &\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty] : \ Y \to \sum_i \mu_i(Y \cap X_i). \end{aligned}$$

(Για συντομία, ταυτίζουμε το $Y \cap X_i$ με την προβολή του $\{\lambda \in \sigma(A) : (\lambda, i) \in Y \cap X_i .\}$)

Ισχυρισμός 6.1.15. *Η οικογένεια $\mathcal{S}$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X και το μ είναι σ-προσθετικό (θετικό) μέτρο στην $\mathcal{S}$.*

Απόδειξη. Είναι άμεσο ότι η $\mathcal{S}$ είναι άλγεβρα υποσυνόλων του X και ότι το μ είναι πεπερασμένα προσθετικό. Επομένως αρκεί να αποδειχθεί ότι, αν (Y_n) είναι αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{S}$ και $Y = \cup_n Y_n$, τότε $Y \in \mathcal{S}$ και $\mu(Y) = \lim_n \mu(Y_n)$.

Για κάθε $i \in I$, εφόσον κάθε Y_n ανήκει στην $\mathcal{S}$, κάθε $Y_n \cap X_i$ ανήκει στην $\mathcal{S}_i$. Άρα $\cup_n (Y_n \cap X_i) \in \mathcal{S}_i$ για κάθε i. Αλλά $\cup_n (Y_n \cap X_i) = Y \cap X_i$, άρα $Y \in \mathcal{S}$.

[10]Παρατηρούμε ότι εφόσον $f_i(\lambda) = \lambda$ ($\lambda \in \sigma(A)$) έχουμε $\|f_i\|_\infty = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \|A\|$ διότι ο A είναι αυτοσυζυγής.

Για να δείξουμε ότι $\mu(Y) = \lim_n \mu(Y_n)$, παρατηρούμε ότι η $(\mu(Y_n))$ είναι αύξουσα ακολουθία στο $[0, +\infty]$ και $\mu(Y_n) \leq \mu(Y)$ για κάθε n. Άρα αν $\mu \equiv \sup_n \mu(Y_n)$ έχουμε $\mu \leq \mu(Y)$. Για την αντίστροφη ανισότητα αρκεί, από τον ορισμό του $\mu(Y)$, να δείξουμε ότι $\sum_{i\in F} \mu_i(Y \cap X_i) \leq \mu$ για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο F του I. Παρατηρούμε ότι για κάθε i, έχουμε $\sup_n \mu_i(Y_n \cap X_i) = \mu_i(Y \cap X_i)$ διότι $(Y_n \cap X_i) \nearrow (Y \cap X_i)$ και το μ_i είναι σ-προσθετικό. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\sum_{i\in F} \mu_i(Y \cap X_i) &= \sum_{i\in F} \sup_n \mu_i(Y_n \cap X_i) = \sup_n \sum_{i\in F} \mu_i(Y_n \cap X_i) \\ &\leq \sup_n \sum_{i\in I} \mu_i(Y_n \cap X_i) = \sup_n \mu(Y_n) = \mu,\end{aligned}$$

άρα $\mu(Y) \leq \mu$. □

Για κάθε $i \in I$ έχουμε ονομάσει $f_i \in L^\infty(\sigma(A), \mu_i)$ την συνάρτηση $f_i(\lambda) = \lambda$ $(\lambda \in \sigma(A))$. Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση

$$f : X = \cup_i(\sigma(A) \times \{i\}) \to \mathbb{C} : \ (\lambda, i) \to f_i(\lambda).$$

Είναι φανερό ότι $f \in L^\infty(X, \mu)$ (μάλιστα $\|f\|_\infty = \sup_i \|f_i\|_\infty = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \|A\|$).

Ισχυρισμός 6.1.16. *Η απεικόνιση* $V : h \to \oplus_i(h|_{X_i})$ *απεικονίζει τον* $L^2(X, \mu)$ *ισομετρικά επί του* $\mathcal{K} = \oplus_i L^2(\sigma(A), \mu_i)$ *και* $B = V M_f V^{-1}$.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η V είναι καλά ορισμένος ορθομοναδιαίος τελεστής. Έστω πρώτα $Y \in \mathcal{S}$ και $\chi = \chi_Y$. Έπεται από τον ορισμό του μέτρου μ ότι

$$\int_X \chi d\mu = \mu(Y) = \sum_i \mu_i(Y \cap X_i) = \sum_i \int_{X_i} \chi_{Y\cap X_i} d\mu_i = \sum_i \int_{X_i} \chi|_{X_i} d\mu_i.$$

Λόγω γραμμικότητας, η ίδια ισότητα ισχύει αν χ είναι μία απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Εφόσον οι απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις είναι πυκνές στον $L^1(X, \mu)$, για κάθε $g \in L^1(X, \mu)$, $g \geq 0$ έχουμε

$$\int_X g d\mu = \sum_i \int_{X_i} g|_{X_i} d\mu_i.$$

Επομένως αν $h \in L^2(X, \mu)$ τότε $h|_{X_i} \in L^2(X_i, \mu_i)$ για κάθε i άρα η $h_i(\lambda) = h(\lambda, i)$ ανήκει στον $L^2(\sigma(A), \mu_i)$ και μάλιστα (χρησιμοποιώντας την τελευταία ισότητα για $g = |h|^2$)

$$\|h\|_2^2 = \int_X |h|^2 d\mu = \sum_i \int_{X_i} |h|_{X_i}|^2 d\mu_i = \sum_i \int_{\sigma(A)} |h_i|^2 d\mu_i,$$

δηλαδή η οικογένεια $\oplus_i h_i$ όπου $h_i(\lambda) = h(\lambda, i)$ ανήκει στον $\oplus_i L^2(\sigma(A), \mu_i) = \mathcal{K}$ και $\|h\|_2 = \| \oplus h_i\|_{\mathcal{K}}$. Συνεπώς η απεικόνιση

$$V : L^2(X, \mu) \to \mathcal{K} : h \to \oplus_i h_i$$

είναι καλά ορισμένη ισομετρία. Η V είναι επί γιατί ο $\operatorname{im} V$ περιέχει το πυκνό υποσύνολο όλων των $g = \oplus g_i \in \mathcal{K}$ όπου $g_i = 0$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος δεικτών i. Πράγματι, για κάθε τέτοιο g, ορίζουμε την h στον X από τις σχέσεις $h(\lambda, i) = g_i(\lambda)$ $(\lambda \in \sigma(A), i \in I)$ και παρατηρούμε ότι $h \in L^2(X, \mu)$ και $h(\lambda, i) = g_i(\lambda)$ για κάθε i, άρα $Vh = \oplus g_i = g$. □

Ισχυρισμός 6.1.17. *Η απεικόνιση $V : h \to \oplus_i h_i$, όπου $h_i(\lambda) = h(\lambda, i)$ απεικονίζει τον $L^2(X, \mu)$ ισομετρικά επί του $\mathcal{K} = \oplus_i L^2(\sigma(A), \mu_i)$ και $B = VM_f V^{-1}$.*

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι $B = VM_f V^{-1}$. Έστω $g \in L^2(X, \mu)$ και $g_i \in L^2(\sigma(A), \mu_i)$ με $g_i(\lambda) = g(\lambda, i)$. Τότε $V(g) = \oplus_i g_i$ και

$$\begin{aligned} B(Vg) &= B(\oplus_i g_i) = \oplus_i M_{f_i} g_i = \oplus_i f_i g_i, \\ V(M_f g) &= V(fg) = \oplus_i f_i g_i. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $BV = VM_f$, άρα $B = VM_f V^{-1}$ διότι ο V είναι αντιστρέψιμος. □

Αν ονομάσουμε $W : L^2(X, \mu) \to \mathcal{H}$ την σύνθεση

$$W = U \circ V : L^2(X, \mu) \to \mathcal{K} \to \mathcal{H},$$

τότε $A = UBU^{-1} = U(VM_f V^{-1})U^{-1}$, δηλαδή $A = WM_f W^{-1}$. Έχουμε λοιπόν αποδείξει το

Θεώρημα 6.1.18. ***(Φασματικό Θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές)***

Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ αυτοσυζυγής τελεστής. Υπάρχει χώρος μέτρου (X, μ), συνάρτηση $f \in L^\infty(X, \mu)$ και ορθομοναδιαίος τελεστής $W : L^2(X, \mu) \to \mathcal{H}$ ώστε $A = WM_f W^{-1}$.