ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θεωρία Τελεστών

Ενότητα: Αβελιανές Άλγεβρες von Neumann

Αριστείδης Κατάβολος

Τμήμα Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα ενότητας

9.1 Αβελιανές Άλγεβρες von Neumann

9.1.1 Άλγεβρες von Neumann

Ορισμός 9.1.1. *Αν H είναι χώρος Hilbert και $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$, ορίζουμε τον* **μεταθέτη** *$\mathcal{S}'$ του $\mathcal{S}$ ως εξής*

$$\mathcal{S}' = \{T \in \mathcal{B}(H) : TS = ST \quad \text{για κάθε } S \in \mathcal{S}\}.$$

Ελέγχεται άμεσα ότι το σύνολο $\mathcal{S}'$ είναι πάντα άλγεβρα με μονάδα. Επίσης είναι norm κλειστό, γιατί αν $\|A_n - A\| \to 0$ και $A_n S = S A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $S \in \mathcal{S}$ τότε

$$AS = \lim_n A_n S = \lim_n S A_n = SA$$

άρα $A \in \mathcal{S}'$.

Επομένως αν το σύνολο $\mathcal{S}$ είναι αυτοσυζυγές[1] τότε το $\mathcal{S}'$ είναι C^*-άλγεβρα.

Παρατηρούμε όμως ότι η άλγεβρα $\mathcal{S}'$ **είναι κλειστή και ως προς την (ασθενέστερη) τοπολογία WOT:** Πράγματι, αν ένα δίκτυο (A_i) με $A_i \in \mathcal{S}'$ έχει την ιδιότητα $\lim_i \langle A_i x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle$ για κάθε $x, y \in H$, τότε, για κάθε $S \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}\langle ASx, y\rangle &= \lim_i \langle A_i Sx, y\rangle = \lim_i \langle SA_i x, y\rangle = \lim_i \langle A_i x, S^* y\rangle = \langle Ax, S^* y\rangle \\ &= \langle SAx, y\rangle\end{aligned}$$

για κάθε $x, y \in H$, άρα $AS = SA$.

Είναι προφανές ότι $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}''$.

Ένα σύνολο τελεστών $\mathcal{S}$ είναι μεταθετικό σύνολο αν και μόνον αν $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$. Αν $\mathcal{S}$ είναι μεταθετικό σύνολο, τότε για κάθε $A \in \mathcal{S}'$, το σύνολο $\mathcal{S} \cup \{A\} \subseteq \mathcal{S}'$ είναι μεταθετικό και περιέχει το $\mathcal{S}$. Επομένως ένα σύνολο τελεστών $\mathcal{S}$ είναι *μεγιστικό* μεταθετικό σύνολο αν και μόνον αν $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$.

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό:

Ορισμός 9.1.2. *Έστω (X, μ) χώρος μέτρου. Η* **πολλαπλασιαστική άλγεβρα** *$\mathcal{M}_\mu$ του (X, μ) είναι η*

$$\mathcal{M}_\mu = \{M_f : f \in L^\infty(X, \mu)\}.$$

Η $\mathcal{M}_\mu$ είναι αβελιανή C^*-υπάλγεβρα της $\mathcal{B}(L^2(X, \mu))$.

Πρόταση 9.1.3. *Αν ο (X, μ) είναι σ-πεπερασμένος, τότε $(\mathcal{M}_\mu)' = \mathcal{M}_\mu$. Ισοδύναμα, η $\mathcal{M}_\mu$ είναι* **μεγιστική** *αβελιανή αυτοσυζυγής υπάλγεβρα (maximal abelian selfadjoint algebra -* **masa***) του $\mathcal{B}(L^2(X, \mu))$.*

Απόδειξη. Η $\mathcal{M}_\mu$ είναι αβελιανή, άρα $\mathcal{M}_\mu \subseteq (\mathcal{M}_\mu)'$. Έστω λοιπόν $T \in (\mathcal{M}_\mu)'$. Πρέπει να βρούμε $g \in L^\infty(X, \mu)$ ώστε $T = M_g$.

(i) Υποθέτουμε πρώτα ότι $\mu(X) < \infty$. Τότε η σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}$ ανήκει στον $L^2(X, \mu)$. Έστω $g = T\mathbf{1} \in L^2(X, \mu)$. Τότε για κάθε $f \in L^\infty(X, \mu)$ έχουμε $gf \in L^2(X, \mu)$ και

(*) $$T(f) = T(f\mathbf{1}) = T(M_f(\mathbf{1})) = M_f(T(\mathbf{1})) = M_f(g) = fg = gf.$$

[1] δηλαδή $S^* \in \mathcal{S}$ για κάθε $S \in \mathcal{S}$

Αν δείξουμε ότι $g \in L^\infty(X,\mu)$, οπότε η g ορίζει φραγμένο τελεστή $M_g \in \mathcal{B}(L^2(X,\mu))$, τότε η προηγούμενη ισότητα γράφεται

$$T(f) = M_g(f) \quad \text{για κάθε } \ f \in L^\infty(X,\mu),$$

δηλαδή οι φραγμένοι τελεστές T και M_g θα ταυτίζονται στον πυκνό υπόχωρο $L^\infty(X,\mu)$ του $L^2(X,\mu)$, άρα θα είναι ίσοι. Μένει λοιπόν να δειχθεί ότι $g \in L^\infty(X,\mu)$.

Πράγματι, έστω $a > 0$ ώστε το μέτρο του $Y_a = \{t \in X : |g(t)| > a\}$ να είναι μη μηδενικό. Αν f_a είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του Y_a τότε $\|f_a\|_2^2 = \mu(Y_a)$. Αλλά επίσης $f_a \in L^\infty(X,\mu)$ οπότε η (*) εφαρμόζεται και δείχνει ότι $T(f_a) = f_a g$, άρα

$$\|T\|^2\|f_a\|_2^2 \geq \|T(f_a)\|_2^2 = \int |f_a g|^2 d\mu = \int_{Y_a} |g|^2 d\mu \geq a^2\mu(Y_a) = a^2\|f_a\|_2^2$$

επομένως $a \leq \|T\|$. Έπεται ότι $\|g\|_\infty \leq \|T\|$ και τώρα η (*) δείχνει ότι $T = M_g$.

(ii) Για την γενική (σ-πεπερασμένη) περίπτωση, γράφουμε τον X ως ένωση αριθμήσιμης οικογένειας ξένων ανά δύο υποσυνόλων X_n πεπερασμένου μέτρου. Έστω $e_n \in L^2(X,\mu)$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του X_n και $g_n = T(e_n)$. Όπως προηγουμένως, για κάθε $f \in L^\infty(X,\mu) \cap L^2(X,\mu)$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$TM_{e_n}(f) = T(fe_n) = T(M_f(e_n)) = M_f(T(e_n)) = M_f(g_n) = fg_n.$$

Συμπεραίνουμε όπως πριν ότι ο M_{g_n} είναι φραγμένος τελεστής και ότι $M_{g_n} = TM_{e_n}$, άρα $\|g_n\|_\infty = \|M_{g_n}\| \leq \|T\|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι αν ορίσουμε την g στο X από την σχέση $g|X_n = g_n|X_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η g είναι μ-μετρήσιμη και $\|g\|_\infty \leq \sup_n \|g_n\|_\infty \leq \|T\|$, άρα $g \in L^\infty(X,\mu)$ και

$$M_g M_{e_n} = M_{ge_n} = M_{g_n} = TM_{e_n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού ο τελεστής M_{e_n} είναι η προβολή στον υπόχωρο $L^2(X_n,\mu)$ του $L^2(X,\mu)$, οι φραγμένοι τελεστές M_g και T συμπίπτουν σε καθένα από τους υποχώρους αυτούς, άρα (αφού είναι γραμμικοί και συνεχείς) συμπίπτουν και στην κλειστή γραμμική θήκη της ένωσής τους, που είναι[2] όλος ο $L^2(X,\mu)$. □

Ορισμός 9.1.4. *Έστω H χώρος Hilbert. Μία* ***άλγεβρα von Neumann*** *$\mathcal{M}$ στον H είναι ένα αυτοσυζυγές υποσύνολο του $\mathcal{B}(H)$ που ικανοποιεί*

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}''.$$

Παρατήρηση 9.1.5. *(i) Κάθε άλγεβρα von Neumann είναι C^*-άλγεβρα με μονάδα. Επιπλέον όμως είναι WOT-κλειστή.*

(ii) Αν $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$, τότε το σύνολο $(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*)''$ είναι η μικρότερη άλγεβρα von Neumann που περιέχει το $\mathcal{S}$, και ονομάζεται **η άλγεβρα von Neumann που παράγεται από το** *$\mathcal{S}$.*

(iii) Κάθε άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$ στον H είναι της μορφής $\mathcal{S}'$ για κάποιο αυτοσυζυγές σύνολο $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ (π.χ. $\mathcal{S} = \mathcal{M}'$).

Παραδείγματα 9.1.6. *(i) Ο χώρος $\mathcal{B}(H)$ είναι άλγεβρα von Neumann.*

[2] Αν η $h \in L^2(X,\mu)$ είναι κάθετη σε κάθε $L^2(X_n,\mu)$, τότε για κάθε n και $f \in L^2(X_n,\mu)$ έχουμε $\int_{X_n} h\bar{f}d\mu = 0$, άρα (θέτοντας $f = he_n$) $\int_{X_n} |h|^2 d\mu = 0$, άρα $\|h\|_2^2 = \int_X |h|^2 d\mu = \sum_n \int_{X_n} |h|^2 d\mu = 0$, δηλαδή $h = 0$.

(ii) Το σύνολο $\mathcal{K}(H)$ όλων των συμπαγών τελεστών στον H είναι C^*-άλγεβρα, όχι όμως άλγεβρα von Neumann εκτός αν $\dim H < \infty$. Παράγεται (ως C^*-άλγεβρα) από τις προβολές της.

(iii) Έστω (X, μ) σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου. Τότε η $\mathcal{M}_\mu$ είναι αβελιανή άλγεβρα von Neumann στον $L^2(X, \mu)$. Είναι μάλιστα μεγιστική αβελιανή.

(iv) Το σύνολο $\mathcal{A} = \{M_f : f \in C([0, 1])\}$ είναι C^*-άλγεβρα στον $L^2([0, 1], \lambda)$ (όπου λ το μέτρο Lebesgue), αλλά δεν είναι άλγεβρα von Neumann. Ισχύει ότι $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}' = \mathcal{M}_\lambda$. Η $\mathcal{A}$ δεν περιέχει προβολές εκτός των 0 και I.

Ένα από τα πιο θεμελιώδη αποτελέσματα στην θεωρία των αλγεβρών von Neumann είναι ο συσχετισμός της αλγεβρικής συνθήκης $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$ με μία τοπολογική συνθήκη:

Θεώρημα 9.1.7 (von Neumann). *Έστω $\mathcal{A}$ μία αυτοσυζυγής υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H)$ που περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή. Τότε*

$$\mathcal{A}'' = \overline{\mathcal{A}}^{\text{SOT}} = \overline{\mathcal{A}}^{\text{WOT}}.$$

Ειδικότερα, η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα von Neumann αν και μόνον αν είναι SOT-κλειστή, αν και μόνον αν είναι WOT-κλειστή.

Θα χρησιμοποιήσουμε το

Λήμμα 9.1.8. *Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ αυτοσυζυγής άλγεβρα που περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή. Τότε $\mathcal{A}'' \subseteq \operatorname{Ref} \mathcal{A}$.*

Απόδειξη. Έστω $T \in \mathcal{A}''$ και $x \in H$. Ονομάζουμε P την προβολή στον υπόχωρο $\overline{[\mathcal{A}x]}$ του H. Εφόσον ο $\overline{[\mathcal{A}x]}$ είναι $\mathcal{A}$-αναλλοίωτος (η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα), ισχύει $AP = PAP$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Αλλά $A^* \in \mathcal{A}$, άρα $A^*P = PA^*P$, επομένως $PA = PAP$. Έπεται ότι $AP = PA$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$, δηλαδή $P \in \mathcal{A}'$. Επομένως $TP = PT$. Αλλά $I \in \mathcal{A}$, άρα $x = Ix \in \overline{[\mathcal{A}x]}$ και συνεπώς $Tx = TPx = PTx \in \overline{[\mathcal{A}x]}$. Αφού το $x \in H$ είναι αυθαίρετο, δείξαμε ότι $T \in \operatorname{Ref} \mathcal{A}$.

Επομένως $\mathcal{A}'' \subseteq \operatorname{Ref} \mathcal{A}$. □

Θα δείξουμε σε λίγο (Πόρισμα 9.1.11) ότι στην πραγματικότητα, ισχύει η ισότητα $\operatorname{Ref} \mathcal{A} = \mathcal{A}''$.

Απόδειξη του Θεωρήματος του von Neumann :

Επειδή $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}''$ και η $\mathcal{A}''$ είναι SOT-κλειστή, έχουμε $\overline{\mathcal{A}}^{\text{SOT}} \subseteq \mathcal{A}''$. Αλλά η $\mathcal{A}$ είναι γραμμικός χώρος, άρα (Πρόταση 8.1.13) $\overline{\mathcal{A}}^{\text{SOT}} = \overline{\mathcal{A}}^{\text{WOT}}$.

Μένει να δειχθεί ότι $\mathcal{A}'' \subseteq \overline{\mathcal{A}}^{\text{SOT}}$.

Από την Πρόταση 8.1.17, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $(\mathcal{A}'')^{(n)} \subseteq \operatorname{Ref} \mathcal{A}^{(n)}$. Από το Λήμμα, εφόσον η $\mathcal{A}^{(n)}$ είναι αυτοσυζυγής άλγεβρα και περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή, ξέρουμε ότι $(\mathcal{A}^{(n)})'' \subseteq \operatorname{Ref} \mathcal{A}^{(n)}$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $(\mathcal{A}'')^{(n)} \subseteq (\mathcal{A}^{(n)})''$.

Έστω $T \in \mathcal{A}''$. Αρκεί να δείξουμε ότι $T^{(n)} \in (\mathcal{A}^{(n)})''$, δηλαδή ότι $T^{(n)}Q = QT^{(n)}$ για κάθε $Q \in (\mathcal{A}^{(n)})'$. Ας γράψουμε τον Q ως $n \times n$ πίνακα $[Q_{i,j}]$ με τιμές $Q_{i,j} \in \mathcal{B}(H)$. [3] Για κάθε τελεστή $X \in \mathcal{B}(H)$, ο $QX^{(n)}$ αντιστοιχεί στον πίνακα $[Q_{i,j}X]$ και ο $X^{(n)}Q$ αντιστοιχεί στον πίνακα $[XQ_{i,j}]$. Αφού λοιπόν ο τελεστής Q

[3] Οι $Q_{i,j} \in \mathcal{B}(H)$ ορίζονται από τις σχέσεις $\left\langle Q_{i,j}x, y\right\rangle_H = \left\langle Q\vec{x}_j, \vec{y}_i\right\rangle_{H^{(n)}}$ για κάθε $x, y \in H$, όπου $\vec{x}_j \in H^{(n)}$ είναι το διάνυσμα - στήλη που έχει x στη θέση j και 0 στις άλλες θέσεις.

μετατίθεται με τον διαγώνιο πίνακα τελεστών $A^{(n)}$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$, κάθε $Q_{i,j}$ θα ανήκει στον $\mathcal{A}'$. Όμως από την υπόθεση έχουμε $T \in (\mathcal{A}')'$ οπότε ο T μετατίθεται με κάθε $Q_{i,j}$. Έπεται ότι ο διαγώνιος $T^{(n)}$ μετατίθεται με τον $Q = [Q_{i,j}]$, άρα $T^{(n)} \in (\mathcal{A}^{(n)})''$. □

Παρατήρηση 9.1.9. *Έστω A αυτοσυζυγής τελεστής. Γράφουμε $A = \int \lambda dE_\lambda$ από το* ***Φασματικό Θεώρημα****. Οι φασματικές προβολές $E(\Omega)$ μπορεί να μην ανήκουν στην C^*-άλγεβρα που παράγεται από τον A (παράδειγμα: ο τελεστής M του πολλαπλασιασμού επί x στον $L^2([0,1])$ παράγει την C^*-άλγεβρα $\{M_f : f \in C([0,1])\}$, που δεν περιέχει προβολές). Όμως, όπως δείξαμε στην Παρατήρηση 7.1.13, οι προβολές αυτές ανήκουν στην άλγεβρα von Neumann $\{A\}''$ που παράγει ο A).*

Πόρισμα 9.1.10. *Κάθε άλγεβρα von Neumann είναι η norm-κλειστή γραμμική θήκη των προβολών που περιέχει. (Παράβαλε: μία C^*-άλγεβρα μπορεί να μην έχει μη τετριμμένες προβολές.)*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{M}$ άλγεβρα von Neumann. Αφού η $\mathcal{M}$ είναι αυτοσυζυγής, κάθε $A \in \mathcal{M}$ γράφεται $A = A_1 + iA_2$ όπου A_i αυτοσυζυγής. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι κάθε αυτοσυζυγής $A \in \mathcal{M}$ προσεγγίζεται στην τοπολογία της νόρμας από (πεπερασμένους) γραμμικούς συνδυασμούς προβολών που ανήκουν στην $\mathcal{M}$.

Από το **Φασματικό Θεώρημα** έχουμε $A = \int \lambda dE_\lambda$, όπου το ολοκλήρωμα συγκλίνει στην τοπολογία της νόρμας. Άρα ο A ανήκει στην norm-κλειστή γραμμική θήκη των φασματικών του προβολών $E(\Omega)$ (όπου Ω είναι Borel υποσύνολο του φάσματος $\sigma(A)$ του A). Όμως, όπως μόλις παρατηρήσαμε, οι φασματικές προβολές του A ανήκουν στον $\{A\}''$, άρα στην $\mathcal{M}$. □

Πόρισμα 9.1.11. *Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ αυτοσυζυγής άλγεβρα που περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή. Τότε*

$$\mathcal{A}'' = \mathrm{Ref}\,\mathcal{A} \; (= \overline{\mathcal{A}}^{\mathrm{SOT}}).$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 9.1.8 έπεται ότι $\mathcal{A}'' \subseteq \mathrm{Ref}\,\mathcal{A}$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι, αν $T \in \mathrm{Ref}\,\mathcal{A}$, τότε $T \in \mathcal{A}''$, δηλαδή $TQ = QT$ για κάθε $Q \in \mathcal{A}'$. Επειδή όμως η $\mathcal{A}'$ είναι άλγεβρα von Neumann , άρα παράγεται από τις προβολές της, αρκεί να υποθέσουμε ότι η Q είναι προβολή.

Αν $H_o = Q(H)$, θα δείξουμε ότι ο H_o είναι T-αναλλοίωτος. Έστω $x \in H_o$. Τότε $Tx \in \overline{\mathcal{A}x}$ (γιατί $T \in \mathrm{Ref}\,\mathcal{A}$). Αλλά ο υπόχωρος H_o είναι $\mathcal{A}$-αναλλοίωτος, εφόσον $Q \in \mathcal{A}'$. Επομένως $\mathcal{A}x \subseteq H_o$, άρα και $\overline{\mathcal{A}x} \subseteq H_o$ αφού ο H_o είναι κλειστός. Επομένως τελικά $Tx \in H_o$, δηλαδή $T(H_o) \subseteq H_o$. Αλλά η προβολή στον $H_o^\perp$, δηλαδή η $I - Q$, ανήκει επίσης στην $\mathcal{A}'$. Το ίδιο επιχείρημα λοιπόν δείχνει ότι $T(H_o^\perp) \subseteq H_o^\perp$, άρα τελικά ο H_o ανάγει τον T, πράγμα που σημαίνει ότι $QT = TQ$ (Λήμμα 2.2.1). □

Υπενθυμίζουμε (δες το Παράδειγμα στην Παρατήρηση 8.1.15 ότι υπάρχει άλγεβρα $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ (βεβαίως μη αυτοσυζυγής) που περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή τέτοια ώστε $\mathrm{Ref}\,\mathcal{A} \neq \overline{\mathcal{A}}^{\mathrm{SOT}}$.

Πόρισμα 9.1.12. *Αν $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα von Neumann που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert, τότε υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ προβολών που παράγει την $\mathcal{A}$ ως άλγεβρα von Neumann, δηλαδή τέτοιο ώστε $\mathcal{E}'' = \mathcal{A}$.*

Απόδειξη. Από τη Πρόταση 8.1.24, η μοναδιαία μπάλα του $\mathcal{B}(H)$ εφοδιασμένη με την τοπολογία WOT είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, συνεπώς το ίδιο ισχύει για την μοναδιαία μπάλα της $\mathcal{A}$. Υπάρχει λοιπόν αριθμήσιμο σύνολο $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ που είναι WOT-πυκνό υποσύνολο της μοναδιαίας μπάλας της $\mathcal{A}$. Από το προηγούμενο Πόρισμα κάθε A_n ανήκει στην norm-κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου των προβολών της $\mathcal{A}$. Επομένως για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $\mathcal{E}_{n,m} = \{E_1, \ldots, E_k\}$ από προβολές της $\mathcal{A}$ και αριθμοί $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ ώστε $\|A_n - \sum \lambda_i E_i\| < \frac{1}{m}$. Άρα ο A_n ανήκει στην norm-κλειστή γραμμική θήκη του αριθμήσιμου συνόλου $\mathcal{E}_n = \cup_m \mathcal{E}_{n,m}$.

Έστω $\mathcal{E} = \bigcup_n \mathcal{E}_n$. Τότε $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ άρα $\mathcal{E}'' \subseteq \mathcal{A}$. Αντίστροφα αν ο T μετατίθεται με το $\mathcal{E}$ τότε μετατίθεται με κάθε $\mathcal{E}_n$ και άρα με κάθε A_n. Αφού το σύνολο $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι WOT-πυκνό στην μοναδιαία μπάλα του $\mathcal{A}$, έπεται ότι ο T μετατίθεται με τη μοναδιαία μπάλα, άρα και με όλην την $\mathcal{A}$. Επομένως $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{A}'$, άρα $\mathcal{A} = \mathcal{A}'' \subseteq \mathcal{E}''$. □

Παρατήρηση 9.1.13. *Ας σημειωθεί η διαφορά ανάμεσα στα δύο τελευταία Πορίσματα: μία άλγεβρα von Neumann δεν είναι ποτέ ίση με την norm-κλειστή άλγεβρα που παράγεται από αριθμήσιμο σύνολο προβολών, εκτός αν έχει πεπερασμένη διάσταση.*

Απόδειξη. Άσκηση: Δείξτε ότι μία απειροδιάστατη άλγεβρα von Neumann δεν είναι διαχωρίσιμος χώρος στην τοπολογία της νόρμας, διότι περιέχει μία άπειρη ακολουθία κάθετων ανά δύο προβολών, και επομένως περιέχει μία ισομετρική εικόνα του $\ell^\infty(\mathbb{N})$, που δεν είναι διαχωρίσιμος.

9.1.2 Κάθε masa είναι πολλαπλασιαστική άλγεβρα

Ορισμός 9.1.14. *Αν H, K είναι χώροι Hilbert, δύο υποσύνολα $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}(K)$ λέγονται **ορθομοναδιαία ισοδύναμα (unitarily equivalent)** αν υπάρχει ορθομοναδιαίος τελεστής $U : H \to K$ ώστε η απεικόνιση*

$$ad_U : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K) : A \to UAU^*$$

να απεικονίζει το $\mathcal{S}$ επί του $\mathcal{T}$.

Παρατήρηση 9.1.15. *(i) Είναι φανερό ότι η απεικόνιση ad_U είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός. Επομένως αν δύο C^*-άλγεβρες $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}(K)$ είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμες, τότε είναι *-ισόμορφες. Το αντίστροφο δεν ισχύει: βλ.(iii).*

*(ii) Αποδεικνύεται ότι κάθε *-ισομορφισμός του $\mathcal{B}(H)$ επί του $\mathcal{B}(K)$ είναι ορθομοναδιαία ισοδυναμία. Επομένως, αν $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}(K)$ είναι C^*-άλγεβρες και $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ είναι *-ισομορφισμός, τότε ο ϕ είναι ορθομοναδιαία ισοδυναμία αν και μόνον αν επεκτείνεται σε *-ισομορφισμό του $\mathcal{B}(H)$ επί του $\mathcal{B}(K)$.*

(iii) Μία ορθομοναδιαία ισοδυναμία δεν διατηρεί μόνον την C^*-αλγεβρική δομή, διατηρεί επιπλέον και την δράση στους αντίστοιχους χώρους Hilbert: Αν δύο C^*-άλγεβρες είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμες, τότε δρούν (σε ισομετρικά ισόμορφους χώρους) «κατά τον ίδιο τρόπο». Παραδείγματος χάριν, δύο άλγεβρες von Neumann είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμες αν και μόνον αν οι μεταθέτες τους είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμοι (Απόδειξη: άσκηση). Έπεται ότι αν μία άλγεβρα τελεστών είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμη με μία masa, τότε και η ίδια είναι masa.

Επομένως, αν $\mathcal{M}$ είναι μια masa, τότε η $\mathcal{M}$ είναι βεβαίως ισομετρικά ισόμορφη με την $\mathcal{M}^{(2)}$ (μέσω της απεικόνισης $A \to A \oplus A$), αλλά οι μεταθέτες $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$ και $(\mathcal{M}^{(2)})' = M_2(\mathcal{M})$ δεν είναι ισόμορφοι. Συνεπώς οι $\mathcal{M}$ και $\mathcal{M}^{(2)}$ δεν μπορεί να είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμες.

Επίσης, αν $\phi = ad_U$ είναι ορθομοναδιαία ισοδυναμία, τότε η ϕ και η ϕ^{-1} είναι SOT-SOT συνεχείς (Απόδειξη: άσκηση).

Τα κεντρικά αποτελέσματα αυτής της παραγράφου είναι

Θεώρημα 9.1.16. *Κάθε αβελιανή άλγεβρα von Neumann που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο είναι ισομετρικά *-ισομορφική με τον $L^\infty([0,1], \mu)$ για κάποιο Borel μέτρο πιθανότητας μ.*

Θεώρημα 9.1.17. *Κάθε **μεγιστική** αβελιανή άλγεβρα von Neumann που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμη με την πολλαπλασιαστική άλγεβρα του χώρου μέτρου $([0,1], \mu)$, για κάποιο Borel μέτρο πιθανότητας μ.*

Για τις αποδείξεις, θα χρειασθούν μερικά προκαταρκτικά αποτελέσματα.

Ορισμός 9.1.18. *Έστω $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ γραμμικός υπόχωρος. Ένα διάνυσμα $\xi \in H$* **διαχωρίζει** *τον $\mathcal{S}$ αν $S\xi \neq 0$ για κάθε $S \in \mathcal{S}\backslash\{0\}$. Το ξ είναι* **κυκλικό** *για τον $\mathcal{S}$ αν ο $[\mathcal{S}\xi]$ είναι πυκνός στον H.*

Λήμμα 9.1.19. *(i) Αν το ξ είναι κυκλικό για το $\mathcal{S}$ τότε διαχωρίζει τον $\mathcal{S}'$.*

(ii) Αν η $\mathcal{M}$ είναι άλγεβρα von Neumann και το ξ διαχωρίζει την $\mathcal{M}$ τότε είναι κυκλικό για την $\mathcal{M}'$.

Συνεπώς ένα διάνυσμα είναι κυκλικό για μια άλγεβρα von Neumann αν και μόνον αν διαχωρίζει τον μεταθέτη της.

Απόδειξη. (i) Έστω $T \in \mathcal{S}'$ ώστε $T\xi = 0$. Τότε $TS\xi = S(T\xi) = 0$ για κάθε $S \in \mathcal{S}$, και συνεπώς $T(\mathcal{S}\xi) = 0$. Αλλά ο $[\mathcal{S}\xi]$ είναι πυκνός στον H και συνεπώς $T = 0$.

(ii) Έστω P η προβολή στον υπόχωρο $\overline{\mathcal{M}'\xi}$. Ο υπόχωρος αυτός είναι $\mathcal{M}'$-αναλλοίωτος, άρα $P \in (\mathcal{M}')' = \mathcal{M}$. Αλλά $P\xi = \xi$, δηλαδή $(I - P)\xi = 0$ άρα $I - P = 0$ αφού η $I - P$ ανήκει στην $\mathcal{M}$ την οποία το ξ διαχωρίζει. Άρα $P = I$, πράγμα που σημαίνει ότι ο υπόχωρος $\mathcal{M}'\xi$ είναι πυκνός στο H. □

Λήμμα 9.1.20. *Κάθε* ***αβελιανή*** *άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$ που δρα σε* ***διαχωρίσιμο*** *χώρο H έχει διαχωρίζον διάνυσμα ξ. Αν η $\mathcal{M}$ είναι masa, τότε το ξ είναι και κυκλικό.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα του Zorn, υπάρχει μία masa $\mathcal{N}$ που περιέχει την $\mathcal{M}$ (αν η $\mathcal{M}$ είναι masa τότε $\mathcal{N} = \mathcal{M}$). Θα κατασκευάσουμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\xi \in H$ κυκλικό για την $\mathcal{N}$. Τότε το ξ θα διαχωρίζει την $\mathcal{N}' = \mathcal{N}$. Έπεται ότι το ξ θα διαχωρίζει και την $\mathcal{M}$.

Ονομάζουμε δύο διανύσματα $\xi, \eta \in H$ **πολύ κάθετα** αν οι υπόχωροι $\overline{\mathcal{N}\xi}$ και $\overline{\mathcal{N}\eta}$ είναι κάθετοι. Από το Λήμμα του Zorn, υπάρχει μία μεγιστική οικογένεια $\Xi \subseteq H$ από πολύ κάθετα μοναδιαία διανύσματα. Αφου ο H είναι διαχωρίσιμος, η Ξ είναι αριθμήσιμη, έστω $\Xi = \{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$. Έστω P_n η ορθή προβολή στον $\overline{\mathcal{N}\xi_n}$. Επειδή ο υπόχωρος αυτός είναι αναλλοίωτος από την $\mathcal{N}$, θα έχουμε $P_n \in \mathcal{N}' = \mathcal{N}$ (δες την απόδειξη του 9.1.8).

Έστω $\xi = \sum_n \frac{1}{2^n}\xi_n$. Ισχυριζόμαστε ότι το ξ είναι κυκλικό για την $\mathcal{N}$. Αν όχι, θα υπήρχε μοναδιαίο διάνυσμα $\eta \in H$ κάθετο στον $\overline{\mathcal{N}\xi}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $A, B \in \mathcal{N}$ θα είχαμε

$$\langle A\eta, B\xi_n \rangle = \langle \eta, A^*B(2^n P_n\xi) \rangle = 0$$

αφού $A^*BP_n \in \mathcal{N}$ και $\eta \perp \mathcal{N}\xi$. Τότε όμως ο $\overline{\mathcal{N}\eta}$ θα ήταν κάθετος σε κάθε $\overline{\mathcal{N}\xi_n}$, πράγμα που αντιβαίνει στην μεγιστικότητα της Ξ. □

Λήμμα 9.1.21. *Έστω $\mathcal{M}$ αβελιανή άλγεβρα von Neumann σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert H. Τότε υπάρχει αυτοσυζυγής τελεστής $A \in \mathcal{M}$ ώστε $\{A\}'' = \mathcal{M}$. Μπορούμε μάλιστα να επιλέξουμε τον A ώστε $0 \leq A \leq I$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{E} = \{E_n\}$ αριθμήσιμο σύνολο προβολών της $\mathcal{M}$ ώστε $\mathcal{E}'' = \mathcal{M}$ (Πόρισμα 9.1.12). Έστω $S_n = 2E_n - I$. Παρατηρούμε ότι $S_n^2 = 4E_n^2 - 4E_n + I = I$, άρα $\|S_n\|^2 = \|S_n^* S_n\| = \left\|S_n^2\right\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, Ορίζουμε

$$B = \sum_n \frac{1}{4^n}(2E_n - I) = \sum_n \frac{1}{4^n} S_n$$

(η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα). Θα δείξουμε ότι $\{B\}'' = \mathcal{M} = \mathcal{E}''$. Αρκεί να δείξουμε ότι αν ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ μετατίθεται με τον B, τότε μετατίθεται με κάθε E_n.

Έστω ότι ο T μετατίθεται με τον B και με τις $E_1, E_2, ..., E_{n-1}$. Θα δείξουμε ότι ο T μετατίθεται με την E_n. Παρατηρούμε ότι ο T μετατίθεται με τον τελεστή

$$4^n(B - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4^k} S_k) = 4^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{4^k} S_k = S_n + B_1$$

όπου

$$B_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} S_{k+n}.$$

Έπεται ότι ο T μετατίθεται με τον

$$\frac{1}{2}(3(S_n + B_1) - (S_n + B_1)^3) = S_n + B_2$$

όπου

$$B_2 = -\frac{3}{2} S_n B_1^2 - \frac{1}{2} B_1^3$$

(χρησιμοποιήσαμε ότι $S_n^2 = I$). Παρατηρούμε ότι $\|B_2\| \leq \frac{3}{2}\|B_1\|^2 + \frac{1}{2}\|B_1\|^3 \leq \frac{5}{9}\|B_1\|$, γιατί $\|B_1\| \leq \frac{1}{3}$. Επαναλαμβάνοντας τον ίδιο συλλογισμό με τον B_2 στη θέση του B_1, συμπεραίνουμε ότι ο T μετατίθεται με τον $S_n + B_3$ όπου $\|B_3\| \leq (\frac{5}{9})^2\|B_1\|$ και συνεχίζουμε επαγωγικά. Έπεται ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ο T μετατίθεται με τον $S_n + B_k$ όπου $\|B_k\| \leq (\frac{5}{9})^{k-1}\|B_1\|$. Αλλά $\lim_k(S_n + B_k) = S_n$, άρα δείξαμε ότι ο T μετατίθεται με τον S_n και άρα με την E_n.

Για να δείξουμε ότι ο T μετατίθεται με την E_1 (ισοδύναμα με τον S_1), γράφουμε $4B = S_1 + A_1$ όπου $A_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} S_{k+1}$ και συνεχίζουμε όπως στην προηγούμενη παράγραφο. Η επαγωγή είναι τώρα πλήρης.

Παρατηρούμε ότι ο τελεστής B που κατασκευάσαμε ικανοποιεί $-\frac{1}{3}I \leq B \leq \frac{1}{3}I$. Αν λοιπόν τον αντικαταστήσουμε με τον $B + \frac{1}{3}I$, βρίσκουμε έναν τελεστή A με τον ίδιο μεταθέτη που ικανοποιεί $0 \leq A \leq I$. □

Πόρισμα 9.1.22. *Αν $\mathcal{M}$ είναι αβελιανή άλγεβρα von Neumann που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο H, τότε υπάρχει φασματικό μέτρο $E(\cdot)$ ορισμένο στα Borel υποσύνολα του $[0, 1]$ ώστε*

$$\mathcal{M} = \{E(\Omega) : \Omega \subseteq [0, 1] \text{ Borel }\}''.$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 9.1.21, υπάρχει αυτοσυζυγής τελεστής $A \in \mathcal{M}$ με $0 \leq A \leq I$ ώστε $A'' = \mathcal{M}$.

Επειδή $0 \leq A \leq I$, το φάσμα του A περιέχεται στο $[0, 1]$. Επομένως το φασματικό του μέτρο θα φέρεται από το $[0, 1]$.

Έχουμε όμως δείξει (Θεώρημα 7.1.21) ότι $\{A\}'' = \{E(\Omega) : \Omega \subseteq [0, 1] \text{ Borel }\}''$, και συνεπώς $\mathcal{M} = \{E(\Omega) : \Omega \subseteq [0, 1] \text{ Borel }\}''$. □

Παρατήρηση 9.1.23. *Το σύνολο $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ των προβολών μιας άλγεβρας von Neumann $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(H)$ ταυτίζεται με το σύνολο των κλειστών υποχώρων του H που είναι $\mathcal{M}'$-αναλλοίωτοι (μέσω της απεικόνισης που αντιστοιχεί σε κάθε (ορθή) προβολή P τον υπόχωρο $P(H)$). Επομένως το $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ αποτελεί σύνδεσμο αν ονομάσουμε $P \vee Q$ την προβολή στον υπόχωρο $\overline{[P(H) + Q(H)]}$ και $P \wedge Q$ την προβολή στον υπόχωρο $P(H) \cap Q(H)$. Όταν η $\mathcal{M}$ είναι μεταθετική, ο σύνδεσμος αυτός είναι επιμεριστικός, επομένως είναι σύνδεσμος Boole. Ο λόγος είναι ότι, όταν δύο προβολές P, Q μετατίθενται, τότε $P \vee Q = P + Q - PQ$ και $P \wedge Q = PQ$, και φυσικά η πρόσθεση επιμερίζεται ως προς τον πολλαπλασιασμό.*

Πρόταση 9.1.24. *Έστω $(K, \mathcal{S})$ μετρήσιμος χώρος και $\mathcal{E} = \{E(\Omega) : \Omega \in \mathcal{S}\}$ φασματικό μέτρο σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert H. Υπάρχει μέτρο πιθανότητας μ στον K ώστε η αβελιανή άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$ που παράγεται από το $\mathcal{E}$ να είναι ισομετρικά *-ισομορφική με τον $L^\infty(K, \mu)$.*

Απόδειξη. Εφόσον ο H είναι διαχωρίσιμος, υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα, έστω $\xi \in H$, που διαχωρίζει την αβελιανή άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$ (Λήμμα 9.1.20). Θέτουμε

$$\mu(\Omega) = \mu_{\xi,\xi}(\Omega) = \langle E(\Omega)\xi, \xi\rangle \qquad (\Omega \in \mathcal{S}).$$

Από τον ορισμό του φασματικού μέτρου, το μ είναι μέτρο πιθανότητας στον K. Αν $E(\Omega) = 0$, τότε βεβαίως $\mu(\Omega) = 0$. Αλλά και αντίστροφα, αν $\mu(\Omega) = 0$ τότε $\|E(\Omega)\xi\|^2 = \langle E(\Omega)\xi, E(\Omega)\xi\rangle = \langle E(\Omega)\xi, \xi\rangle = 0$, οπότε $E(\Omega) = 0$ αφού το ξ διαχωρίζει την $\mathcal{M}$. Δηλαδή τα μέτρα μ και $E(.)$ είναι «ισοδύναμα» (έχουν τα ίδια μηδενικά σύνολα).

Στην παράγραφο 7.1.2, ορίσαμε έναν συνεχή *-μορφισμό

$$f \to \theta_o(f) = \int_K f dE$$

από την άλγεβρα $\mathcal{L}^\infty(K)$ των φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων $f : K \to \mathbb{C}$ με τιμές στον $B(\mathcal{H})$. Αν $f = \sum c_i \chi_{\Omega_i} \in \mathcal{L}^\infty(K)$ είναι απλή, τότε

$$\theta_o(f) = \sum_i c_i E(\Omega_i) \in \mathcal{M}$$

και συνεπώς, αφού οι απλές συναρτήσεις είναι πυκνές στην $\mathcal{L}^\infty(K)$, έχουμε $\theta_o(f) \in \mathcal{M}$ για κάθε $\mathcal{L}^\infty(K)$.

Ισχυρισμός : Η θ_o επάγει μια καλά ορισμένη απεικόνιση

$$\theta : L^\infty(K, \mu) \to \mathcal{M}$$

που είναι ισομετρικός *-μορφισμός.

Απόδειξη. Έστω πρώτα ότι η f είναι απλή μετρήσιμη. Δείχνουμε ότι $\|\theta_o(f)\| = \mathrm{esssup}|f|$ όταν η f είναι απλή.

Αν $f = \sum c_i \chi_{\Omega_i}$ όπου $\{\Omega_i\}$ είναι μια μετρήσιμη διαμέριση του K τότε το ουσιώδες supremum της f είναι $\|f\|_\infty = \max\{|c_i| : \mu(\Omega_i) \neq 0\}$. Αλλά

$$\|\theta_o(f)\| = \left\|\sum c_i E(\Omega_i)\right\| = \max_i \|c_i E(\Omega_i)\| = \max\{|c_i| : E(\Omega_i) \neq 0\} = \|f\|_\infty$$

αφού οι $E(\Omega_i)$ είναι κάθετες ανά δύο προβολές και $E(\Omega) \neq 0$ αν και μόνον αν $\mu(\Omega) \neq 0$. Εφόσον οι απλές συναρτήσεις είναι $\|\cdot\|_\infty$-πυκνές στον $L^\infty(K, \mu)$, η ισότητα $\|\theta(f)\| = \mathrm{esssup}|f|$ ισχύει για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση. Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε. □

Μένει τώρα να αποδειχθεί ο

Ισχυρισμός : Η θ_o απεικονίζει την $L^\infty(K, \mu)$ επί της $\mathcal{M}$. Δηλαδή αν

$$\mathcal{M}_o \equiv \{\theta(f) : f \in L^\infty(K, \mu)\}$$

έχουμε $\mathcal{M}_o = \mathcal{M}$.

Απόδειξη. (J.A. Erdos) Ας παρατηρήσουμε ότι η $\mathcal{M}_o$, ως ισομετρικά *-ισομορφική με την C^*-άλγεβρα $L^\infty(K,\mu)$, είναι C^*-άλγεβρα. Επιπλέον επειδή $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}_o$ και $\mathcal{E}'' = \mathcal{M}$, έπεται ότι $\mathcal{M}_o'' = \mathcal{M}$. Από το Θεώρημα von Neumann (9.1.7) συμπεραίνουμε ότι η $\mathcal{M}_o$ είναι SOT-πυκνή στην $\mathcal{M}$. Ειδικότερα για κάθε $\eta \in \mathcal{H}$, ο υπόχωρος $\mathcal{M}_o\eta$ είναι πυκνός στον $\mathcal{M}\eta$.

Έστω $B \in \mathcal{M}$. Θα βρούμε μια $f \in L^\infty(K,\mu)$ ώστε $B = \theta(f)$.

Επειδή κάθε στοιχείο της $\mathcal{M}$ είναι γραμμικός συνδυασμός θετικών στοιχείων της $\mathcal{M}$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο B είναι θετικός τελεστής.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $\Omega \in \mathcal{S}$ έχουμε $E(\Omega)B = BE(\Omega)$ αφού η $\mathcal{M}$ είναι μεταθετική και άρα $E(\Omega)BE(\Omega) = E(\Omega)^2B = E(\Omega)B$.

Ορίζουμε ένα νέο μέτρο ν στον $(K,\mathcal{S})$ από την σχέση

$$\nu(\Omega) = \mu_{B\xi,\xi}(\Omega) = \langle E(\Omega)B\xi,\xi\rangle = \langle E(\Omega)BE(\Omega)\xi,\xi\rangle = \langle BE(\Omega)\xi, E(\Omega)\xi\rangle\,.$$

Έχουμε $0 \le \nu(\Omega) \le \|B\|\mu(\Omega)$ για κάθε $\Omega \in \mathcal{S}$ γιατί $0 \le B \le \|B\|I$. Έπεται ότι το ν είναι πεπερασμένο και μ-απόλυτα συνεχές. Από το θεώρημα Radon -Nikodym (δες Γ. Κουμουλλής, Σ. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μέτρου*, Εκδ. Συμμετρία, 1988, 10.12), υπάρχει $f \in L^1(K,\mu)$ ώστε

$$\nu(\Omega) = \int_\Omega f d\mu \qquad (\Omega \in \mathcal{S}).$$

Το ν είναι θετικό μέτρο, άρα η f είναι μη αρνητική. Ισχυρίζομαι ότι $f \le \|B\|$ μ-σχεδόν παντού. Πράγματι, αν $\epsilon > 0$ και $\Omega_\epsilon = \{t \in K : f(t) > \|B\| + \epsilon\}$ τότε

$$(\|B\|+\epsilon)\mu(\Omega_\epsilon) = \int_{\Omega_\epsilon} (\|B\|+\epsilon)d\mu \le \int_{\Omega_\epsilon} f d\mu = \nu(\Omega_\epsilon) \le \|B\|\mu(\Omega_\epsilon)$$

άρα $\mu(\Omega_\epsilon) = 0$. Επομένως $f \in L^\infty(K,\mu)$.

Θα ολοκληρώσουμε την απόδειξη δείχνοντας ότι $B = \theta(f)$.

Για κάθε $\Omega \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}\langle (B-\theta(f))\xi, E(\Omega)\xi\rangle &= \langle B\xi, E(\Omega)\xi\rangle - \langle \theta(f)\xi, E(\Omega)\xi\rangle \\ &= \nu(\Omega) - \langle E(\Omega)\theta(f)\xi,\xi\rangle.\end{aligned}$$

Αλλά $E(\Omega)\theta(f) = \theta(\chi_\Omega)\theta(f) = \theta(\chi_\Omega f)$, οπότε

$$\langle (B-\theta(f))\xi, E(\Omega)\xi\rangle = \nu(\Omega) - \langle \theta(\chi_\Omega f)\xi,\xi\rangle = \int_\Omega f d\mu - \int \chi_\Omega f d\mu = 0.$$

Έπεται ότι το $(B-\theta(f))\xi$ είναι κάθετο σε κάθε $E(\Omega)\xi$, άρα και στην γραμμική θήκη του $\{E(\Omega)\xi : \Omega \in \mathcal{S}\}$, δηλαδή στον χώρο $\mathcal{M}_o\xi$. Αλλά η $\mathcal{M}_o$ είναι SOT-πυκνή στην $\mathcal{M}$, επομένως το $(B-\theta(f))\xi$ είναι κάθετο στο $\mathcal{M}\xi$. Από την άλλη μεριά όμως ο $B-\theta(f)$ ανήκει στην $\mathcal{M}$, άρα είναι κάθετο και στον εαυτό του, άρα $(B-\theta(f))\xi = 0$ και συνεπώς $B - \theta(f) = 0$ αφού το ξ διαχωρίζει την $\mathcal{M}$. □

'Αμεση είναι τώρα η απόδειξη του Θεωρήματος 9.1.16 : αρκεί να συνδυάσουμε την Πρόταση 9.1.22 και την Πρόταση 9.1.24.

Επίσης στην απόδειξη της Πρότασης 9.1.24 εμπεριέχεται ουσιαστικά η απόδειξη του επομένου Πορίσματος.

Πόρισμα 9.1.25. *Αν A είναι φυσιολογικός τελεστής σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert, η (αβελιανή) άλγεβρα von Neumann $\{A\}''$ που παράγεται από τον A ισούται με το σύνολο*

$$\{f(A) : f \in \mathcal{L}^\infty(\sigma(A))\}$$

όπου $\mathcal{L}^\infty(\sigma(A))$ είναι το σύνολο των Borel φραγμένων συναρτήσεων $f:\sigma(A)\to\mathbb{C}$.

Πρόταση 9.1.26. *Έστω $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(H)$ αβελιανή άλγεβρα von Neumann που έχει κυκλικό διάνυσμα $\xi \in H$ και $(K, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου πιθανότητας. Τότε σε κάθε (αλγεβρικό) *-ισομορφισμό $\theta : L^\infty(K, \mu) \to \mathcal{M}$ αντιστοιχεί ένας ορθομοναδιαίος τελεστής $U : H \to L^2(K, \mu)$ ώστε $U\theta(f)U^{-1} = M_f$ για κάθε $f \in L^\infty(K, \mu)$. Επομένως η $\mathcal{M}$ είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμη με την πολλαπλασιαστική άλγεβρα $\mathcal{M}_\mu \subseteq \mathcal{B}(L^2(K, \mu))$.*

Ο ορθομοναδιαίος τελεστής U λέγεται ότι **υλοποιεί (implements)** τον ισομορφισμό $\mathcal{M} \to \mathcal{M}_\mu : \theta(f) \to M_f$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι, επειδή οι $L^\infty(K, \mu)$ και $\mathcal{M}$ είναι C*-άλγεβρες, η $\theta : L^\infty(K, \mu) \to \mathcal{M}$ είναι κατ'ανάγκην ισομετρία. Πράγματι, όπως φαίνεται από την απόδειξη του Λήμματος 7.1.9, η θ είναι συστολή. Με το ίδιο όμως επιχείρημα,[4] η θ^{-1} είναι συστολή. Από την ίδια απόδειξη φαίνεται ότι η θ διατηρεί την διάταξη (συνεπώς και η θ^{-1} την διατηρεί).

Αν $\mathcal{L}_o(K, \mathcal{S})$ είναι η *-άλγεβρα των απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $f : K \to \mathbb{C}$ και $\mathcal{M}_o = \{\theta(f) : f \in \mathcal{L}_o(K, \mathcal{S})\}$, θέτουμε

$$H_o = \mathcal{M}_o\xi = \{\theta(f)\xi : f \in \mathcal{L}_o(K, \mathcal{S})\}.$$

Ισχυριζόμαστε ότι ο υπόχωρος H_o είναι πυκνός στον H. Πράγματι, αφού η θ είναι ισομετρία, η $\mathcal{M}_o$ είναι $\|\cdot\|$-πυκνή στην $\mathcal{M}$. Επομένως, αν ένα $\eta \in H$ είναι κάθετο στον H_o, θα είναι κάθετο και στον $\mathcal{M}\xi$, που είναι πυκνός υπόχωρος του H, αφού το ξ είναι κυκλικό διάνυσμα. Επομένως $\eta = 0$.

Κατασκευάζουμε τώρα ένα νέο μέτρο ν στην $\mathcal{S}$ ως εξής:

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το ξ είναι μοναδιαίο διάνυσμα. Για κάθε $\Omega \in \mathcal{S}$ θέτουμε

$$\nu(\Omega) = \langle\theta(\chi_\Omega)\xi, \xi\rangle = \|\theta(\chi_\Omega)\xi\|^2.$$

Παρατηρούμε ότι $\nu(\Omega) = 0$ αν και μόνον αν $\theta(\chi_\Omega) = 0$ (γιατί το ξ διαχωρίζει την $\mathcal{M}$, αφού διαχωρίζει την $\mathcal{M}'$ - Λήμμα 9.1.19) αν και μόνον αν $\chi_\Omega = 0$ στον $L^\infty(K, \mu)$ (γιατί η θ είναι 1-1) αν και μόνον αν $\mu(\Omega) = 0$.

Θα δείξουμε ότι το ν είναι σ-προσθετικό μέτρο πιθανότητας. Είναι φανερό ότι $0 \le \nu(\Omega) \le 1$. Επίσης είναι φανερό ότι το ν είναι πεπερασμένα προσθετικό. Για να δείξουμε ότι είναι σ-προσθετικό, αρκεί να δείξουμε ότι $\nu(\Omega_n) \to 0$ για κάθε ακολουθία (Ω_n) στην $\mathcal{S}$ που φθίνει προς το $\emptyset$. Κάθε $\theta(\chi_{\Omega_n}) := P_n \in \mathcal{M}$ είναι αυτοσυζυγής και ταυτοδύναμος, άρα προβολή. Αν θέσουμε $H_n = P_n(H)$, τότε ο υπόχωρος H_n είναι $\mathcal{M}'$-αναλλοίωτος οπότε ο $H_\infty := \bigcap_n H_n$ είναι $\mathcal{M}'$-αναλλοίωτος. Έπεται ότι η προβολή P στον H_∞ ανήκει [5] στην $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$. Επομένως υπάρχει $\Omega \in \mathcal{S}$ ώστε $P = \theta(\chi_\Omega)$. Έχουμε $P \le P_n$ γιατί $H_\infty \subseteq H_n$, άρα $\chi_\Omega \le \chi_{\Omega_n}$ (εφόσον η θ^{-1} διατηρεί τη διάταξη) και συνεπώς $\mu(\Omega) \le \mu(\Omega_n)$. Αλλά $\Omega_n \to \emptyset$ και το μ είναι σ-προσθετικό, άρα $\mu(\Omega) = 0$, οπότε, όπως παρατηρήσαμε προηγουμένως, $\nu(\Omega) = 0$.

[4] χρησιμοποιώντας ότι κάθε θετικό στοιχείο της $\mathcal{M}$ έχει θετική τετραγωνική ρίζα

[5] Γράφουμε $P = \wedge_n P_n$. Παρεμπιπτόντως ας σημειώσουμε ότι με την ίδια μέθοδο αποδεικνύεται ότι το σύνολο $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ των προβολών μιας άλγεβρας von Neumann $\mathcal{M}$ (μεταθετικής ή όχι) αποκτά τη δομή **πλήρους συνδέσμου**.

Επομένως το ν είναι μέτρο στον $(K, \mathcal{S})$, και είναι ισοδύναμο με το μ (όπως δείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο). Από το Θεώρημα Radon - Nikodym έπεται ότι υπάρχει μη αρνητική μετρήσιμη $h : K \to \mathbb{R}$ ώστε $\nu(\Omega) = \int_\Omega h d\mu$ για κάθε $\Omega \in \mathcal{S}$. Επίσης $h(t) > 0$ για μ-σχεδόν κάθε $t \in K$ γιατί $\nu \sim \mu$.

Αφού $\int h d\mu = \nu(K) < \infty$, η h ανήκει στον $L^1(K, \mu)$. Θέτουμε $g_o = h^{1/2} \in L^2(K, \mu)$ και ορίζουμε μια απεικόνιση από τον H_o στον $L^2(K, \mu)$ από τον τύπο:

$$U_o : H_o \longrightarrow L^2(K, \mu) : \theta(f)\xi \longrightarrow f g_o$$

όπου f απλή μετρήσιμη. Η U_o είναι καλά ορισμένη, γιατί αν $f g_o = g g_o$ τότε $f = g$ αφού η g_o είναι μ-σχεδόν παντού διαφορετική από το 0. Είναι φανερό ότι η U_o είναι γραμμική. Επίσης, η U_o είναι ισομετρία, γιατί αν $f = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{\Omega_k}$ με τα Ω_i ξένα ανά δύο τότε

$$\begin{aligned}
\|f g_o\|_2^2 &= \int_K |f g_o|^2 d\mu = \int_K \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \chi_{\Omega_k} h d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \int_K \chi_{\Omega_k} d\nu = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \nu(\Omega_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \|\theta(\chi_{\Omega_k})\xi\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \theta(\chi_{\Omega_k})\xi \right\|^2 = \|\theta(f)\xi\|^2
\end{aligned}$$

(χρησιμοποιήσαμε ότι $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ για $i \neq j$ άρα $\chi_{\Omega_i}\chi_{\Omega_j} = 0$ και $\theta(\chi_{\Omega_i})\xi \perp \theta(\chi_{\Omega_j})\xi$).

Συνεπώς η U_o επεκτείνεται σε μια ισομετρική απεικόνιση U με πεδίο ορισμού την κλειστή θήκη του H_o, που είναι ο H. Ισχυριζόμαστε ότι το πεδίο τιμών της U είναι όλος ο $L^2(K, \mu)$. Πράγματι, είναι κλειστός υπόχωρός του και, αν μια $f \in L^2(K, \mu)$ είναι κάθετη στην $\chi_\Omega g_o$ για κάθε $\Omega \in \mathcal{S}$ τότε

$$\int_\Omega f g_o d\mu = 0$$

για κάθε $\Omega \in \mathcal{S}$ άρα $f g_o = 0$ μ-σχεδόν παντού και συνεπώς $f = 0$ μ-σχεδόν παντού γιατί η g_o είναι μ-σχεδόν παντού διαφορετική από το 0.

Άρα η U είναι ορθομοναδιαίος τελεστής.

Ισχυρισμός : Για κάθε απλή συνάρτηση $f \in L^\infty(K, \mu)$, ισχύει

$$U\theta(f)U^{-1} = M_f.$$

Απόδειξη. Αν η $g : K \to \mathbb{C}$ είναι απλή, τότε

$$U(\theta(f)(\theta(g)\xi)) = U(\theta(fg)\xi) = f g g_o = M_f(g g_o) = M_f(U(\theta(g)\xi))$$

και συνεπώς οι **φραγμένοι** τελεστές $U\theta(f)$ και $M_f U$ ταυτίζονται στον πυκνό υπόχωρο $\{\theta(g)\xi : g \in \mathcal{L}_o(K)\} = H_o$, άρα παντού. □

Εφόσον οι απεικονίσεις $f \to M_f$ και $f \to U\theta(f)U^{-1}$ είναι $\|\cdot\|$-συνεχείς (μάλιστα ισομετρίες) η ισότητα $U\theta(f)U^{-1} = M_f$ θα ισχύει για κάθε $f \in L^\infty(K, \mu)$. Αλλά $\{\theta(f) : f \in L^\infty(K, \mu)\} = \mathcal{M}$. Επομένως η απεικόνιση $A \longrightarrow UAU^{-1}$ είναι ορθομοναδιαία ισοδυναμία από την $\mathcal{M}$ επί της $\mathcal{M}_\mu$. □

Παρατήρηση 9.1.27. *Στην τελευταία Πρόταση αρκεί να υποθέσει κανείς ότι η θ είναι αλγεβρικός ισομορφισμός, γιατί τότε αυτομάτως θα διατηρεί την ενέλιξη. Πράγματι, αφού η εικόνα της θ είναι άλγεβρα von Neumann, που παράγεται από τις προβολές της, αρκεί να δειχθεί ότι η θ απεικονίζει (ορθές) προβολές σε (ορθές) προβολές. Για κάθε χ_Ω, η $\theta(\chi_\Omega)$ είναι ταυτοδύναμη. Είναι όμως και φυσιολογικός τελεστής, γιατί η $\mathcal{M}$ είναι μεταθετική άλγεβρα. Αυτό συνεπάγεται ότι η $\theta(\chi_\Omega)$ είναι ορθή προβολή (δες π.χ. Α. Κατάβολος, Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2006).*

Η απόδειξη του Θεωρήματος 9.1.17 είναι τώρα άμεση. Μάλιστα, έχουμε τον ακόλουθο χαρακτηρισμό:

Θεώρημα 9.1.28. *Έστω $\mathcal{M}$ αβελιανή άλγεβρα von Neumann που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο H. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) Η $\mathcal{M}$ είναι μεγιστική.

(ii) Η $\mathcal{M}$ έχει κυκλικό διάνυσμα.

(iii) Η $\mathcal{M}$ είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμη με την πολλαπλασιαστική άλγεβρα του $([0,1],\mu)$, όπου μ μέτρο Borel πιθανότητας στο $[0,1]$.

(iv) Η $\mathcal{M}$ είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμη με την πολλαπλασιαστική άλγεβρα κάποιου χώρου (σ-πεπερασμένου) μέτρου.

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Κάθε masa που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο έχει κυκλικό διάνυσμα (Λήμμα 9.1.20).

(ii)⇒(iii) Από το Θεώρημα 9.1.16, η $\mathcal{M}$ είναι ισόμορφη με κάποια $L^\infty([0,1],\mu)$. Αφού έχει κυκλικό διάνυσμα, από την Πρόταση 9.1.26, ο ισομορφισμός αυτός επάγει ορθομοναδιαία ισοδυναμία της $\mathcal{M}$ με την αντίστοιχη πολλαπλασιαστική άλγεβρα $\mathcal{M}_\mu$.

(iii)⇒(iv) Προφανές.

(iv)⇒(i) Πρόταση 9.1.3. □

Πόρισμα 9.1.29. *Αν $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{B}(H_i)$ $(i=1,2)$ είναι δύο μεγιστικές αβελιανές άλγεβρες von Neumann σε διαχωρίσιμους χώρους, τότε κάθε αλγεβρικός *-ισομορφισμός $\phi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ υλοποιείται από ορθομοναδιαίο τελεστή $U : H_1 \to H_2$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 9.1.16, υπάρχει μέτρο Borel μ στο $[0,1]$ και *-ισομορφισμός $\theta_1 : L^\infty([0,1],\mu) \to \mathcal{M}_1$. Τότε όμως η απεικόνιση $\theta_2 \equiv \phi\circ\theta_1 : L^\infty([0,1],\mu) \to \mathcal{M}_2$ είναι *-ισομορφισμός. Από την Πρόταση 9.1.26, οι *-ισομορφισμοί $\psi_1 : M_f \to \theta_1(f)$ και $\psi_2 : M_f \to \theta_2(f)$ υλοποιούνται από ορθομοναδιαίους τελεστές, συνεπώς και η σύνθεση

$$\psi_2\circ\psi_1^{-1} : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2 : \theta_1(f) \to M_f \to \theta_2(f),$$

δηλαδή η ϕ, υλοποιείται από ορθομοναδιαίο τελεστή. Συγκεκριμένα, υπάρχουν ορθομοναδιαίοι τελεστές $V_i : H_i \to L^2([0,1],\mu)$ ώστε $V_i\theta_i(f)V_i^{-1} = M_f$ $(i=1,2)$ για κάθε $f\in L^\infty([0,1],\mu)$. Έχουμε λοιπόν

$$V_1\theta_1(f)V_1^{-1} = M_f = V_2\theta_2(f)V_2^{-1} = V_2\phi(\theta_1(f))V_2^{-1}$$

για κάθε $f\in L^\infty([0,1],\mu)$, δηλαδή

$$V_1AV_1^{-1} = V_2\phi(A)V_2^{-1} \quad\Rightarrow\quad \phi(A) = V_2^{-1}V_1AV_1^{-1}V_2$$

για κάθε $A\in\mathcal{M}_1$. Αρκεί λοιπόν να θέσουμε $U = V_2^{-1}V_1$. □

Η πρώτη μορφή του Φασματικού Θεωρήματος για φυσιολογικούς τελεστές είναι άμεση συνέπεια των προηγούμενων:

Θεώρημα 9.1.30 (Φασματικό θεώρημα)**.** *Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο H. Τότε υπάρχει χώρος μέτρου (K, μ) και συνάρτηση $f \in L^\infty(K, \mu)$ ώστε ο T να είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με τον πολλαπλασιαστικό τελεστή $M_f \in \mathcal{B}(L^2(K, \mu))$. Μάλιστα, μπορούμε να επιλέξουμε $K = [0, 1]$ και μ κανονικό μέτρο Borel πιθανότητας.*

Απόδειξη. Ονομάζουμε $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ την άλγεβρα von Neumann που παράγει ο T. Αφού ο T είναι φυσιολογικός, η $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική. Από το Λήμμα Zorn, η $\mathcal{A}$ περιέχεται σε μια μεγιστική αυτοσυζυγή αβελιανή άλγεβρα $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(H)$.

Από το Θεώρημα 9.1.17, η $\mathcal{M}$ είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμη με κάποιαν $\mathcal{M}_\mu \subseteq \mathcal{B}(L^2(K, \mu))$. Αφού $T \in \mathcal{M}$, υπάρχει $f \in L^\infty(K, \mu)$ ώστε ο T να είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με τον τελεστή $M_f \in \mathcal{M}_\mu$. □

Παρατήρηση 9.1.31. *Το θεώρημα αληθεύει ακόμη και αν ο H δεν είναι διαχωρίσιμος. Τότε όμως (όπως είδαμε και στο Κεφάλαιο 8) ο K δεν μπορεί εν γένει να επιλεγεί συμπαγής μετρικός και το μ δεν είναι κατ΄ανάγκην πεπερασμένο ή σ-πεπερασμένο.*