ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θεωρία Τελεστών

Ενότητα: Συνεχείς συναρτήσεις αυτοσυζυγούς τελεστή

Αριστείδης Κατάβολος

Τμήμα Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα ενότητας

5.1 Συνεχείς συναρτήσεις αυτοσυζυγούς τελεστή 4

5.1.1 Ο συναρτησιακός λογισμός 4

5.1.2 Η τετραγωνική ρίζα αυτοσυζυγούς τελεστή 7

5.1.3 Η πολική αναπαράσταση 9

5.1 Συνεχείς συναρτήσεις αυτοσυζυγούς τελεστή

5.1.1 Ο συναρτησιακός λογισμός

Σταθεροποιούμε έναν τελεστή $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Για κάθε μιγαδικό πολυώνυμο p της μορφής $p(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$, θέτουμε $p(A) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k A^k$ (όπου $A^0 = I$).

Στόχος μας είναι να ορίσουμε τελεστές της μορφής $f(A)$ για άλλες κλάσεις συναρτήσεων f.

Πρόταση 5.1.1. *Αν $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ και p είναι πολυώνυμο, τότε*

$$\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Απόδειξη. Αν το p είναι σταθερό, ο $p(A)$ είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού τελεστή, οπότε το συμπέρασμα αληθεύει. Υποθέτουμε λοιπόν ότι το p δεν είναι σταθερό.

Αν $\mu \in \mathbb{C}$, το πολυώνυμο $q(z) \equiv p(z) - \mu$ παραγοντοποιείται:

$$q(z) = c(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)\dots(z - \lambda_n) \text{ (όπου } c \neq 0).$$

Τότε

$$p(A) - \mu I = c(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)\dots(A - \lambda_n I).$$

Αν κάθε $A - \lambda_k I$ είναι αντιστρέψιμος, τότε βέβαια το γινόμενό τους, άρα και το $p(A) - \mu I$, είναι αντιστρέψιμο. Αντίστροφα αν το $q(A) = p(A) - \mu I$ είναι αντιστρέψιμο, επειδή οι $A - \lambda_k I$ μετατίθενται, θα είναι όλοι αντιστρέψιμοι.[1] Επομένως $\mu \in \sigma(p(A))$ αν και μόνον αν $\lambda_k \in \sigma(A)$ για κάποιο $k = 1, \dots, n$. Αλλά τα λ_k είναι οι ρίζες του q, δηλαδή είναι ακριβώς οι μιγαδικοί αριθμοί λ που ικανοποιούν $p(\lambda) = \mu$.

Δείξαμε λοιπόν ότι $\mu \in \sigma(p(A))$ αν και μόνον αν $\mu = p(\lambda)$ για κάποιο $\lambda \in \sigma(A)$, δηλαδή αν και μόνον αν $\mu \in \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι το κρίσιμο βήμα για να επεκτείνουμε την απεικόνιση $p \to p(A)$ από τα πολυώνυμα σε συναρτήσεις που είναι κατάλληλα όρια πολυωνύμων. Ας σημειώσουμε μόνο ότι (σε αντίθεση με την προηγούμενη Πρόταση) το Θεώρημα δεν ισχύει για μη φυσιολογικούς τελεστές. Αν για παράδειγμα $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ και $p(t) = t^2$, τότε $\sigma(A) = \{0, 1\}$ οπότε $\|p\|_{\sigma(A)} = 1$ ενώ $\|p(A)\| > 2$ γιατί π.χ. $\left\| p(A) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\| = \sqrt{5}$.

Θεώρημα 5.1.2. *Αν $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ και $A = A^*$ τότε*

$$\|p(A)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} \equiv \|p\|_{\sigma(A)}.$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι το p έχει πραγματικούς συντελεστές. Τότε ο τελεστής $p(A)$ είναι αυτοσυζυγής, άρα από την Πρόταση 4.1.24 η νόρμα του ισούται με την φασματική ακτίνα, επομένως

$$\|p(A)\| = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(p(A))\}.$$

Αλλά $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$ από την Πρόταση 5.1.1, και η ζητούμενη ισότητα έπεται.

[1] Το $q(A)$ μπορεί να γραφεί $q(A) = (A - \lambda_k I)B = B(A - \lambda_k I)$. Πολλαπλασιάζοντας δεξιά και αριστερά με $(q(A))^{-1}$, συμπεραίνουμε ότι το $A - \lambda_k I$ έχει αριστερό και δεξί αντίστροφο, άρα είναι αντιστρέψιμο.

Για την γενική περίπτωση, παρατηρούμε ότι αν $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, τότε

$$p(A)^* p(A) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k A^k\right)^* \left(\sum_{r=0}^{n} a_r A^r\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k A^k\right)\left(\sum_{r=0}^{n} a_r A^r\right) = q(A)$$

(εφόσον $A = A^*$) όπου q είναι το πολυώνυμο $q(t) = \bar{p}(t)p(t)$ που έχει πραγματικούς συντελεστές. Από την προηγούμενη παράγραφο λοιπόν έχουμε

$$\|q(A)\| = \sup\{|q(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Όμως $\|p(A)\|^2 = \|p(A)^* p(A)\| = \|q(A)\|$ από την ιδιότητα C* και επομένως

$$\begin{aligned}\|p(A)\|^2 &= \|q(A)\| = \sup\{|q(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} \\ &= \sup\{|\bar{p}(\lambda)p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} = (\sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\})^2.\end{aligned}$$

Η απόδειξη είναι πλήρης. □

Θα επεκτείνουμε την απεικόνιση $p \to p(A)$ από τα πολυώνυμα στις συνεχείς συναρτήσεις. Ας θυμηθούμε ότι η υπάλγεβρα $\mathcal{P}(\sigma(A)) \subseteq C(\sigma(A))$ των **πολυωνυμικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το** $\sigma(A)$ είναι πυκνή στην άλγεβρα $C(\sigma(A))C(\sigma(A))$ των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων στο $\sigma(A)$ ως προς την νόρμα supremum. Αυτό έπεται είτε απευθείας από το Θεώρημα Stone-Weierstrass, είτε από το βασικό Θεώρημα Weierstrass, αν παρατηρήσουμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$, επεκτείνεται με την ίδια νόρμα σε μία συνεχή συνάρτηση ορισμένη π.χ. στο $[-\|A\|, \|A\|]$, η οποία προσεγγίζεται από πολυώνυμα ομοιόμορφα στο $[-\|A\|, \|A\|]$, άρα και στο $\sigma(A)$.

Θεώρημα 5.1.3 (Συναρτησιακός λογισμός (functional calculus)).
*Αν $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, υπάρχει μοναδικός ισομετρικός αλγεβρικός *-μορφισμός*

$$\Phi_c : (C(\sigma(A)), \|\cdot\|_{\sigma(A)}) \to (\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|) : f \to f(A)$$

που απεικονίζει το σταθερό πολυώνυμο $p_0(t) = 1$ στον ταυτοτικό τελεστή και το ταυτοτικό πολυώνυμο $p_1(t) = t$ στον τελεστή A.

Επίσης ισχύει $\Phi_c(p) = p(A)$ για κάθε πολυώνυμο p.

Απόδειξη. Ύπαρξη: Από το προηγούμενο Θεώρημα έπεται ότι αν δύο πολυώνυμα p, q ταυτίζονται στο $\sigma(A)$, τότε $p(A) = q(A)$ (πράγματι, $\|p(A) - q(A)\| = \sup\{|p(\lambda) - q(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} = 0$). Επομένως το $p(A)$ εξαρτάται μόνον από τις τιμές του p στο $\sigma(A)$. Δηλαδή η απεικόνιση

$$\Phi_o : \ (\mathcal{P}(\sigma(A)), \|\cdot\|_{\sigma(A)}) \to (\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|) : \quad p \to p(A)$$

είναι καλά ορισμένη. Είναι φανερό ότι είναι μορφισμός αλγεβρών:

$$(p+q)(A) = p(A) + q(A) \quad \text{και} \quad (pq)(A) = p(A)q(A)$$

όταν τα p και q είναι πολυώνυμα, και ότι διατηρεί την ενέλιξη:
Αν $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, τότε

$$(p(A))^* = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k A^k\right)^* = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_k A^k = \overline{p}(A)$$

(αφού $A = A^*$). Αλλά από το προηγούμενο Θεώρημα προκύπτει ότι $\|\Phi_o(p)\| = \|p(A)\| = \|p\|_{\sigma(A)}$ για κάθε πολυώνυμο p, δηλαδή η Φ_o είναι ισομετρία χώρων με νόρμα. Εφόσον η $\mathcal{P}(\sigma(A))$ είναι πυκνή στην

$C(\sigma(A))$, έπεται ότι η Φ_o έχει μοναδική συνεχή επέκταση (η οποία θα είναι ισομετρική) $\Phi_c : C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Μοναδικότητα: Αν Ψ είναι ένας συνεχής *-μορφισμός $C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ που ταυτίζεται με τον Φ_c στα p_0 και p_1 τότε, αφού και οι δύο είναι μορφισμοί, θα ταυτίζονται σε δυνάμεις και γραμμικούς συνδυασμούς, δηλαδή σε κάθε πολυώνυμο. Εφόσον οι Φ_c και Ψ είναι συνεχείς, θα ταυτίζονται και στα (ομοιόμορφα) όρια πολυωνύμων, δηλαδή σε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις.

Ορισμός 5.1.4. *Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ο **συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις** (continuous functional calculus) είναι η απεικόνιση $\Phi_c : C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Συνήθως γράφουμε $f(A)$ αντί για $\Phi_c(f)$.*

Δηλαδή αν η f είναι συνεχής στο $\sigma(A)$, ο τελεστής $f(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ορίζεται μοναδικά από το όριο

$$f(A) = \lim p_n(A) \text{ όπου } (p_n) \text{ πολυώνυμα με } \|p_n - f\|_{\sigma(A)} \to 0.$$

(i) Ο ορισμός του συναρτησιακού λογισμού για συνεχείς συναρτήσεις Φ_c είναι αλγεβρο-τοπολογικός και στηρίζεται στο Θεώρημα 5.1.2. Επομένως ο Φ_c δεν ορίζεται για οποιονδήποτε τελεστή A.

Παραδείγματος χάριν, αν $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, τότε $\sigma(A) = \{0\}$ αλλά, παρόλο που η συνάρτηση $f(t) = \sqrt{t}$ είναι συνεχής στο $\sigma(A)$, δεν ορίζεται τελεστής $f(A)$. Μάλιστα, δεν υπάρχει τελεστής B ώστε $B^2 = A$ (απόδειξη: άσκηση!).

Αποδεικνύεται ότι ο συναρτησιακός λογισμός ορίζεται και όταν ο A είναι φυσιολογικός τελεστής[2].

(ii) Αν K είναι συμπαγής χώρος Hausdorff (π.χ. συμπαγής μετρικός χώρος), κάθε αλγεβρικός *-μορφισμός $\Phi : C(K) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι αυτομάτως συνεχής.

(*Απόδειξη*: Πρώτα παρατηρούμε ότι αν $f \geq 0$ τότε $\Phi(f) \geq 0$. Πράγματι, αν $g = \sqrt{f}$ έχουμε $\Phi(f) = \Phi(g^*g) = (\Phi(g))^*\Phi(g) \geq 0$.
Επομένως, για κάθε $f \in C(K)$, η σχέση $f^*f \leq \|f\|^2$ δηλαδή $\|f\|^2 p_o - f^*f \geq 0$ (όπου $p_o(t) = 1$) δείχνει ότι $\Phi(\|f\|^2 p_o - f^*f) \geq 0$, δηλαδή $\Phi(f^*f) \leq \Phi(\|f\|^2 p_o) = \|f\|^2 I$, άρα $0 \leq \Phi(f^*f) \leq \|f\|^2 I$ και συνεπώς $\|\Phi(f)\|^2 = \|\Phi(f)^*\Phi(f)\| \leq \|f\|^2$.)

Επομένως, ο Φ_c είναι ο μοναδικός *-μορφισμός $C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ που στέλνει την μονάδα στον I και το ταυτοτικό πολυώνυμο στον A.

Είναι φανερό ότι για κάθε πολυώνυμο p ο τελεστής $p(A)$ μετατίθεται με τον A. Το ίδιο επομένως ισχύει και για τον $f(A)$, αν $f \in C(\sigma(A))$.

Πιο ενδιαφέρον όμως, όπως θα δούμε, είναι το γεγονός ότι ο $f(A)$ μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A. Πράγματι, αν $AT = TA$ τότε $A^2T = ATA = TA^2$ και επαγωγικά $A^nT = TA^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $p(A)T = Tp(A)$ για κάθε πολυώνυμο p, άρα και $f(A)T = Tf(A)$ για κάθε $f \in C(\sigma(A))$, λόγω συνέχειας. Δείξαμε λοιπόν ότι

Παρατήρηση 5.1.5. *Αν $f \in C(\sigma(A))$, ο $f(A)$ μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A. Δηλαδή ο συναρτησιακός λογισμός παίρνει τιμές στον δεύτερο μεταθέτη $\{A\}''$ του A, όπου*

[2] Δες π.χ. :

- J.B. Conway, *A course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1985.
- R.V. Kadison & J.R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras* (2 Vols), Academic Press, 1983.

*Ο **μεταθέτης** (commutant) ενός υποσυνόλου $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι το σύνολο των τελεστών που μετατίθενται με κάθε στοιχείο του $\mathcal{S}$:*

$$\mathcal{S}' = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : TS = ST \text{ για κάθε } S \in \mathcal{S}\}.$$

Θεώρημα 5.1.6 (Θεώρημα Φασματικής Απεικόνισης). *Αν $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι αυτοσυζυγής τελεστής και $f \in C(\sigma(A))$,*

$$\sigma(f(A)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Απόδειξη. Αν $\mu \notin \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$ τότε η συνάρτηση $g(\lambda) = f(\lambda) - \mu$ δεν μηδενίζεται πουθενά στο $\sigma(A)$, άρα η συνάρτηση $h := 1/g$ ανήκει στο $C(\sigma(A))$ και $hg = \mathbf{1}$. Τότε όμως $\Phi_c(h)\Phi_c(g) = \Phi_c(hg) = I$ και $\Phi_c(g)\Phi_c(h) = \Phi_c(gh) = I$, δηλαδή $h(A)g(A) = I = g(A)h(A)$, άρα ο $f(A) - \mu I$ έχει αντίστροφο, τον $h(A)$. Συνεπώς $\mu \notin \sigma(f(A))$.

(Παρατηρούμε ότι αυτό το μέρος της απόδειξης είναι καθαρά αλγεβρικό: εξαρτάται μόνον από το γεγονός ότι η απεικόνιση $f \to f(A)$ είναι μορφισμός αλγεβρών που διατηρεί την μονάδα, άρα απεικονίζει αντιστρέψιμα στοιχεία σε αντιστρέψιμα στοιχεία.)

Έστω τώρα $\mu \in \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$, οπότε $\mu = f(\lambda_o)$ για κάποιο $\lambda_o \in \sigma(A)$. Θα δείξουμε ότι ο τελεστής $f(A) - \mu I$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Ισχυριζόμαστε ότι

$$f(A) - \mu I = \lim_n q_n(A),$$

όπου (q_n) ακολουθία πολυωνύμων με $q_n(\lambda_o) = 0$ για κάθε n. Πράγματι, υπάρχει μία ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n(t) \to f(t) - \mu = g(t)$ ομοιόμορφα στο $\sigma(A)$, άρα και $p_n(\lambda_o) \to g(\lambda_o) = 0$. Αν θέσουμε $q_n(t) = p_n(t) - p_n(\lambda_o)$, έχουμε $q_n(\lambda_o) = 0$ και $\|q_n - g\|_{\sigma(A)} \to 0$, άρα $q_n(A) \to g(A) = f(A) - \mu I$ (Θεώρημα 5.1.2) και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Εφόσον $\lambda_o \in \sigma(A)$, έπεται ότι $0 = q_n(\lambda_o) \in q_n(\sigma(A))$. Αλλά $q_n(\sigma(A)) = \sigma(q_n(A))$ από την Πρόταση 5.1.1, άρα οι τελεστές $q_n(A)$ δεν είναι αντιστρέψιμοι. Εφόσον το σύνολο των αντιστρέψιμων στοιχείων του $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι ανοικτό (Πόρισμα 4.1.10), έπεται ότι ο $f(A) - \mu I = \lim q_n(A)$ δεν είναι αντιστρέψιμος. □

Πόρισμα 5.1.7. *Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Αν $f \in C(\sigma(A))$, ο τελεστής $f(A)$ είναι φυσιολογικός. Ο $f(A)$ είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν η f παίρνει πραγματικές τιμές στο $\sigma(A)$. Επίσης, $f(A) \geq 0$ αν και μόνον αν $f(\sigma(A)) \subseteq \mathbb{R}^+$.*

Απόδειξη. Εφόσον ο συναρτησιακός λογισμός Φ_c διατηρεί την ενέλιξη (Θεώρημα 5.1.3), για κάθε f ισχύει $(\Phi_c(f))^* = \Phi_c(\bar{f})$ δηλαδή $(f(A))^* = \bar{f}(A)$. Επομένως $(f(A))^* f(A) = (\bar{f}f)(A) = (f\bar{f})(A) = f(A)f(A)^*$, δηλαδή κάθε $f(A)$ είναι φυσιολογικός. Επίσης η ισότητα $f(A) = f(A)^*$ ισχύει αν και μόνον αν η f είναι πραγματική συνάρτηση.

5.1.2 Η τετραγωνική ρίζα αυτοσυζυγούς τελεστή

Ως εφαρμογή του συναρτησιακού λογισμού για συνεχείς συναρτήσεις, θα δείξουμε ότι ένας θετικός τελεστής έχει (μοναδική θετική) τετραγωνική ρίζα. Θυμίζουμε ότι ένας $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ λέγεται θετικός αν $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$, και ότι ένας θετικός τελεστής είναι πάντα αυτοσυζυγής.

Πρόταση 5.1.8. *Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Αν $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$ τότε υπάρχει μοναδικός αυτοσυζυγής $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ με $\sigma(B) \subseteq \mathbb{R}^+$ ώστε $B^2 = A$. Γράφουμε $B = A^{1/2}$.*

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f(t) = \sqrt{t}$ είναι καλά ορισμένη (πραγματική) και συνεχής στο $\sigma(A)$. Επομένως αν θέσουμε $B = f(A)$, έχουμε $B = B^*$, $\sigma(B) = f(\sigma(A)) \subseteq \mathbb{R}^+$ και $B^2 = A$.

Η μοναδικότητα αφήνεται ως (ενδιαφέρουσα!) άσκηση για τον αναγνώστη.

Λήμμα 5.1.9. *Ένας αυτοσυζυγής τελεστής A στον $\mathcal{H}$ είναι θετικός αν και μόνον αν $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$. Τότε ορίζεται ο $B = A^{1/2}$. Για κάθε $x \in \mathcal{H}$,

$$\langle Ax, x\rangle = \langle B^2 x, x\rangle = \langle Bx, Bx\rangle = \|Bx\|^2 \geq 0$$

άρα ο A είναι θετικός.

Αντίστροφα έστω ότι ο A είναι θετικός. Τότε ο A είναι φυσιολογικός, και συνεπώς κάθε $\lambda \in \sigma(A)$ είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή (Πρόταση 4.1.22), άρα υπάρχει ακολουθία (x_n) στον $\mathcal{H}$ με $\|x_n\| = 1$ και $\|(A - \lambda I)x_n\| \to 0$. Τότε όμως

$$|\langle Ax_n, x_n\rangle - \lambda| = |\langle (A - \lambda I)x_n, x_n\rangle| \leq \|(A - \lambda I)x_n\|.\|x_n\| \to 0.$$

Εφόσον $\langle Ax_n, x_n\rangle \geq 0$ για κάθε n, έπεται ότι $\lambda = \lim\langle Ax_n, x_n\rangle \geq 0$. □

Σημειώνουμε ότι η υπόθεση $A = A^*$ δεν μπορεί να παραλειφθεί. Για παράδειγμα, ο $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ έχει μη αρνητικό φάσμα ($\sigma(A) = \{0\}$) αλλά δεν είναι θετικός: $\langle Ax, x\rangle = -1$ για $x = (-1, 1)$.

Συνοψίζουμε:

Θεώρημα 5.1.10 (Τετραγωνική ρίζα)**.** *Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) Ο T είναι θετικός.

(β) Υπάρχει $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ θετικός ώστε $T = B^2$.

(γ) Υπάρχει $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ώστε $T = S^*S$.

(δ) $T = T^*$ και $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}^+$.

Απόδειξη. (γ)⇒(α) Για κάθε $x \in \mathcal{H}$, $\langle Tx, x\rangle = \langle S^*Sx, x\rangle = \|Sx\|^2 \geq 0$.

(α)⇒(δ) Αν ο T είναι θετικός, τότε $T = T^*$, οπότε $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}^+$ από το Λήμμα 5.1.9.

(δ)⇒(β) Πρόταση 5.1.8.

(β)⇒(γ) Προφανές (παίρνουμε $S = B$).

Παρατήρηση 5.1.11. *Έπεται ότι για κάθε $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ισχύει $\sigma(S^*S) \subseteq \mathbb{R}^+$. Αυτό είναι στοιχειώδες. Το αντίστοιχο αποτέλεσμα για στοιχεία μίας αυθαίρετης (μη μεταθετικής) C*-άλγεβρας είναι αληθές, αλλά όχι τόσο στοιχειώδες. Μάλιστα, συμπεριλαμβανόταν στον αρχικό ορισμό μίας C*-άλγεβρας, και μόνον αργότερα αποδείχθηκε ότι ήταν συνέπεια των άλλων ιδιοτήτων (ουσιαστικά της πληρότητας και της ιδιότητας C*).*

Πόρισμα 5.1.12. *Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Αν $f \in C(\sigma(A))$, ο τελεστής $f(A)$ είναι θετικός αν και μόνον αν $f(\sigma(A)) \subseteq \mathbb{R}^+$.*

Απόδειξη. Αν η f είναι μη αρνητική στο $\sigma(A)$ τότε θέτοντας $g(t) = \sqrt{f(t)} (t \in \sigma(A))$ έχουμε $g(A)^* = g(A)$ και άρα $f(A) = g(A)^*g(A) \geq 0$. Αντίστροφα αν $f(A) \geq 0$ τότε $\sigma(f(A)) \subseteq \mathbb{R}^+$ και συνεπώς $f(\sigma(A)) \subseteq \mathbb{R}^+$ (Θεώρημα 5.1.6).

Πόρισμα 5.1.13. *Κάθε αυτοσυζυγής $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ γράφεται ως διαφορά δύο θετικών τελεστών $A = A_+ - A_-$ με $A_+A_- = A_-A_+ = 0$. Επομένως κάθε $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι γραμμικός συνδυασμός (το πολύ) τεσσάρων θετικών τελεστών.*

Απόδειξη. Θέτουμε $A_+ = f_+(A)$ και $A_- = f_-(A)$ όπου $f_+(t) = \max\{t, 0\}$ και $f_-(t) = -\min\{t, 0\}$ ($t \in \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$).

5.1.3 Η πολική αναπαράσταση

Ορισμός 5.1.14. *Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ τυχαίος τελεστής. Υπενθυμίζουμε ότι ο τελεστής T^*T είναι θετικός. Η μοναδική θετική τετραγωνική του ρίζα (Πρόταση 5.1.8) συμβολίζεται $|T|$.*

Σημειώνουμε ότι ο $|T|$ δεν έχει όλες τις αναμενόμενες ιδιότητες της «απόλυτης τιμής».

Άσκηση 5.1.15. *Να βρεθούν δύο 2×2 πίνακες A, B ώστε να μην ισχύει η ανισότητα $|A + B| \leq |A| + |B|$.*

Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός γράφεται σε πολική μορφή $z = u|z|$, όπου $|z| > 0$ και $|u| = 1$. Αντίστοιχη γραφή υπάρχει και για τελεστές:

Θεώρημα 5.1.16. *Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ τυχαίος τελεστής. Υπάρχει μερική ισομετρία V με αρχικό χώρο $\overline{|T|(\mathcal{H})}$ και τελικό χώρο $\overline{T(\mathcal{H})}$ ώστε*

$$T = V|T|.$$

Επιπλέον, αν $T = UX$ όπου $X \geq 0$ και U μερική ισομετρία με αρχικό χώρο $\overline{X(\mathcal{H})}$ τότε $U = V$ και $X = |T|$.

Απόδειξη. Για κάθε $x \in \mathcal{H}$,

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle |T|^2x, x\rangle = \langle |T|x, |T|x\rangle = \||T|x\|^2.$$

Αυτό δείχνει ότι η απεικόνιση

$$V_o : |T|(\mathcal{H}) \to T(\mathcal{H}) : |T|x \to Tx$$

είναι καλά ορισμένη, γραμμική, ισομετρική και επί. Επομένως επεκτείνεται σε ισομετρία V_1 από τον $\overline{|T|(\mathcal{H})}$ επί του $\overline{T(\mathcal{H})}$. Επεκτείνουμε τον V_1 σε τελεστή $V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ θέτοντας $Vx = 0$ για x κάθετο στον $|T|(\mathcal{H})$. Προκύπτει μία μερική ισομετρία με αρχικό χώρο $\overline{|T|(\mathcal{H})}$ και τελικό χώρο $\overline{T(\mathcal{H})}$. Για κάθε $x \in \mathcal{H}$ έχουμε $V|T|x = V_o|T|x = Tx$, άρα $V|T| = T$.

Αποδεικνύουμε την «μοναδικότητα». Αν οι U, X είναι όπως στην εκφώνηση, η αρχική προβολή U^*U της μερικής ισομετρίας U είναι η ταυτοτική απεικόνιση στον αρχικό χώρο $\overline{X(\mathcal{H})}$, άρα $U^*UX = X$. Η σχέση $T = UX$ δίνει $T^*T = XU^*UX = X^2$, άρα $X = (T^*T)^{1/2} = |T|$ από την μοναδικότητα της τετραγωνικής ρίζας. Συνεπώς $U|T| = T = V|T|$. Αυτό δείχνει ότι οι U και V έχουν τον ίδιο αρχικό χώρο και ταυτίζονται στον πυκνό υπόχωρο $|T|(\mathcal{H})$ του αρχικού τους χώρου, άρα $U = V$. □

Παρατήρηση 5.1.17. *Ο πυρήνας της V είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του αρχικού της χώρου, δηλαδή ο $(|T|(\mathcal{H}))^\perp = \ker|T|$. Έχουμε όμως $\ker|T| = \ker T$ διότι $\|Tx\| = \||T|x\|$ για κάθε x. Εφόσον $(T^*(\mathcal{H}))^\perp = \ker T$, έπεται ότι $\overline{|T|(\mathcal{H})} = \overline{T^*(\mathcal{H})}$. Επομένως η V είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο $\overline{T^*(\mathcal{H})}$ και τελικό χώρο $\overline{T(\mathcal{H})}$.*

Εφόσον ο V^*V είναι η προβολή στον $\overline{|T|(\mathcal{H})}$, η σχέση $T = V|T|$ δίνει

$$V^*T = V^*V|T| = |T|.$$

Σημειώνουμε επίσης ότι η V *είναι ισομετρία αν και μόνον αν ο* T *είναι* $1-1$ *, ενώ η* V^* *είναι ισομετρία αν και μόνον αν το σύνολο τιμών του* T *είναι πυκνό. (Η απόδειξη των ισχυρισμών αυτών είναι εύκολη άσκηση.) Επομένως η* V *είναι ορθομοναδιαίος τελεστής αν και μόνον αν ο* T *είναι* $1-1$ *και έχει πυκνό σύνολο τιμών. Αυτό συμβαίνει ειδικότερα όταν ο* T *είναι αντιστρέψιμος.*