ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θεωρία Τελεστών

Ενότητα: Η έννοια του φάσματος

Αριστείδης Κατάβολος

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

4.1 Η έννοια του φάσματος

Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης, το σύνολο $\sigma_p(T)$ των ιδιοτιμών ενός τελεστή $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ συμπίπτει με το σύνολο $\sigma(T)$ όλων των μιγαδικών αριθμών $\lambda \in \mathbb{C}$ για τους οποίους ο τελεστής $T - \lambda I$ δεν έχει αντίστροφο. Το σύνολο των ιδιοτιμών είναι πάντα μη κενό, γιατί το σώμα $\mathbb{C}$ είναι **αλγεβρικά κλειστό**.

Το γεγονός αυτό έπαιξε κρίσιμο ρόλο στην απόδειξη του Φασματικού Θεωρήματος (Θεώρημα 3.1.1). Όμως, σε απειροδιάστατους χώρους υπάρχουν αυτοσυζυγείς τελεστές χωρίς ιδιοτιμές.

Παράδειγμα 4.1.1. *Ο τελεστής M_f στον $L^2([0,1])$, όπου $f(t) = t$, δεν έχει ιδιοτιμές.*

Απόδειξη. Άσκηση.

Ορισμός 4.1.2. *Το **φάσμα** ενός φραγμένου τελεστή T σ'έναν χώρο Banach $\mathcal{X}$ είναι το σύνολο*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ο } T - \lambda I \text{ δεν έχει αντίστροφο }\}.$$

Δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι το φάσμα του τελεστή του τελευταίου παραδείγματος είναι ακριβώς το $[0,1]$.

Παράδειγμα 4.1.3 (Πολλαπλασιαστικοί τελεστές)**.**

Υπενθύμιση: Αν (X,μ) είναι χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου, μία μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ λέγεται ουσιωδώς φραγμένη αν υπάρχει $A \in \mathbb{R}^+$ ώστε $\mu(\{x \in X : |f(x)| > A\}) = 0$.

Αν $|f(x)| \le A$ μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$ τότε για κάθε $g \in L^2(X,\mu)$,

$$\int |fg|^2 d\mu \le A^2 \int |g|^2 d\mu$$

άρα $fg \in L^2(X,\mu)$ και μάλιστα η γραμμική απεικόνιση

$$M_f : L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu) : \; g \to fg$$

ορίζεται και είναι φραγμένη με $\|M_f\| \le A$. Επομένως αν θέσουμε

$$\|f\|_\infty = \inf\{A : A \text{ ουσιώδες φράγμα της } f\}$$

τότε έχουμε $\|M_f\| \le \|f\|_\infty$.

Αντίστροφα, ισχυριζόμαστε ότι

$$|f(x)| \le \|M_f\| \quad \mu\text{-σχεδόν για κάθε } x \in X. \tag{4.1.0.1}$$

Πράγματι, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο

$$X_n = \{x \in X : |f(x)| > \|M_f\| + \frac{1}{n}\}$$

έχει μέτρο μηδέν (γιατί $\{x \in X : |f(x)| > \|M_f\|\} = \cup_n X_n$).

Όμως αν κάποιο X_n είχε θετικό μέτρο τότε (αφού το μέτρο είναι σ-πεπερασμένο) θα περιείχε ένα υποσύνολο Y_n με μη μηδενικό θετικό μέτρο. Τότε ονομάζοτας ξ_n την χαρακτηριστική συνάρτηση του Y_n έχουμε $\xi_n \in L^2(X,\mu)$, $\xi_n \neq 0$ και

$$|(f\xi_n)(x)| \ge \left(\|M_f\| + \frac{1}{n}\right)\xi_n(x)$$

για κάθε $x \in X$ άρα
$$\left(\|M_f\| + \frac{1}{n}\right)\|\xi_n\|_2 \leq \|f\xi_n\|_2 \leq \|M_f\|\|\xi_n\|_2$$
άτοπο.

Παρατηρούμε ότι $M_f = M_{f'}$ αν και μόνον αν $f = f'$ μ-σχεδόν παντού. Επομένως ο τελεστής M_f εξαρτάται μόνον από την κλάση της f ως προς ισότητα μ-σχεδόν παντού. Δείξαμε δηλαδή ότι

Λήμμα 4.1.4. *Κάθε $f \in L^\infty(X,\mu)$ ορίζει έναν φραγμένο τελεστή $M_f \in \mathcal{B}(L^2(X,\mu))$ από την σχέση $M_f(g) = fg$ και ισχύει*
$$\|M_f\| = \|f\|_\infty.$$

Παρατήρηση 4.1.5. *Έστω $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $fg \in L^2(X,\mu)$ για κάθε $g \in L^2(X,\mu)$, τότε η f είναι ουσιωδώς φραγμένη.*

Απόδειξη. Η υπόθεση σημαίνει ότι η γραμμική απεικόνιση $M_f : g \mapsto fg$ ορίζεται σ' ολόκληρο τον $L^2(X,\mu)$. Παρατηρούμε ότι η M_f έχει κλειστό γράφημα: πράγματι αν $\|g_n\|_2 \to 0$ και $\left\|M_f g_n - g_o\right\|_2 \to 0$ τότε ισχύει $g_o = 0$ γιατί για κάθε $h \in L^2(X,\mu)$ έχουμε
$$\langle g_o, h\rangle = \lim_n \langle M_f g_n, h\rangle = \lim_n \int f g_n \bar{h} d\mu = \lim_n \int g_n (f\bar{h}) d\mu = \lim_n \langle g_n, \bar{f}h\rangle = 0.$$
Επειδή ο $L^2(X,\mu)$ είναι χώρος Banach, έπεται από το Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος ότι ο τελεστής M_f είναι φραγμένος και συνεπώς η f είναι ουσιωδώς φραγμένη από το Λήμμα.

Θα εξετάσουμε το φάσμα ενός πολλαπλασιαστικού τελεστή M_f.

Συμβολίζουμε
$$\mathcal{M}_\mu = \{M_f \in \mathcal{B}(L^2(X,\mu)) : f \in L^\infty(X,\mu)\}$$
την πολλαπλασιαστική άλγεβρα του χώρου (X,μ). Ελέγχεται άμεσα ότι η απεικόνιση
$$f \mapsto M_f : L^\infty(X,\mu) \to \mathcal{M}_\mu \subseteq \mathcal{B}(L^2(X,\mu))$$
είναι μορφισμός αλγεβρών, δηλαδή
$$M_{f+g} = M_f + M_g, \quad M_{fg} = M_f M_g,$$
που διατηρεί την ενέλιξη ($M_f^* = M_{\bar{f}}$) και τη μονάδα ($M_{\mathbf{1}} = I$). Συνεπώς, αν η f είναι αντιστρέψιμο στοιχείο της άλγεβρας $L^\infty(X,\mu)$, τότε ο M_f είναι αντιστρέψιμο στοιχείο[1] της άλγεβρας $\mathcal{M}_\mu$, άρα και της $\mathcal{B}(L^2(X,\mu))$.

Αν αντίστροφα ο τελεστής M_f είναι αντιστρέψιμος, είναι αλήθεια ότι ο αντίστροφός του, έστω T, είναι και αυτός πολλαπλασιαστικός τελεστής; Η απάντηση είναι θετική. Πράγματι, παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι η f είναι μ-σχεδόν παντού διάφορη του μηδενός. Γιατί αν υπήρχε $Y \subseteq X$ θετικού μέτρου ώστε $f|_Y = 0$, τότε, θεωρώντας την χαρακτηριστική συνάρτηση χ ενός υποσυνόλου του Y με πεπερασμένο μη μηδενικό μέτρο, θα είχαμε $\chi \in L^2(X,\mu)$, $\chi \neq 0$ και $M_f\chi = f\chi = 0$, πράγμα που αποκλείεται, αφού ο M_f είναι 1-1. Επομένως η συνάρτηση $g = 1/f$ ορίζεται μ-σχεδόν παντού και είναι βεβαίως μετρήσιμη. Ισχυριζόμαστε ότι είναι ουσιωδώς φραγμένη. Πράγματι, η σχέση $M_f T h = h$ για κάθε $h \in L^2(X,\mu)$ δίνει $Th = \frac{1}{f}h = gh$. Επομένως η απεικόνιση $h \to gh$ ορίζει φραγμένο τελεστή του $L^2(X,\mu)$ πράγμα που σημαίνει (όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει) ότι η g είναι ουσιωδώς φραγμένη. Συμπέρασμα:

[1] Αν $fg = \mathbf{1}$ τότε $M_f M_g = M_g M_f = M_{fg} = M_{\mathbf{1}} = I$.

Πρόταση 4.1.6. *Αν $f \in L^\infty(X,\mu)$, ο τελεστής M_f είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν η f είναι αντιστρέψιμο στοιχείο της άλγεβρας $L^\infty(X,\mu)$, αν δηλαδή η $1/f$ (ορίζεται μ-σχεδόν παντού και) είναι ουσιωδώς φραγμένη. Ο αντίστροφός του (αν υπάρχει) είναι ο $M_g \in \mathcal{M}_\mu$ όπου $g = 1/f$.*

Αντικαθιστώντας την f με τη συνάρτηση $f-\lambda$, συμπεραίνουμε ότι ένας μιγαδικός αριθμός λ ικανοποιεί $\lambda \notin \sigma(M_f)$ αν και μόνον αν η $\dfrac{1}{f-\lambda}$ ορίζεται (μ-σχεδόν παντού) και είναι ουσιωδώς φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M < \infty$ ώστε $\dfrac{1}{|f-\lambda|} \le M$ μ-σχεδόν παντού, δηλαδή το σύνολο $\{t \in X : |f(t)-\lambda| < \frac{1}{M}\}$ έχει μέτρο μηδέν. Γράφοντας δ αντί για $\frac{1}{M}$, έχουμε ισοδύναμα

$$\lambda \notin \sigma(M_f) \quad\iff\quad \exists\ \delta > 0 \ :\ \mu(\{t \in X : |f(t)-\lambda| < \delta\}) = 0.$$

Επομένως δείξαμε ότι

Πρόταση 4.1.7. *Αν $f \in L^\infty(X,\mu)$, το φάσμα του τελεστή M_f είναι το σύνολο των $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ το σύνολο $\{t \in X : |f(t)-\lambda| < \delta\}$ να έχει θετικό μέτρο. Το σύνολο αυτό ονομάζεται **ουσιώδες σύνολο τιμών** (essential range) της f.*

4.1.1 Το φάσμα σε άλγεβρες Banach

Ορισμός 4.1.8. *Έστω $\mathcal{B}$ άλγεβρα Banach με μονάδα I (π.χ. $\mathcal{B} = \mathcal{B}(H)$). Ένα στοιχείο $A \in \mathcal{B}$ λέγεται **αντιστρέψιμο** (invertible) αν υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ ώστε $AB = BA = I$. Το σύνολο των αντιστρέψιμων στοιχείων της $\mathcal{B}$ συμβολίζεται $\mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ ή $\mathcal{B}^{-1}$. Το **φάσμα** (spectrum) ενός στοιχείου $A \in \mathcal{B}$ είναι το σύνολο*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{B})\}.$$

Θεώρημα 4.1.9. *Έστω $\mathcal{B}$ άλγεβρα Banach με μονάδα I. Κάθε $A \in \mathcal{B}$ με $\|I-A\| < 1$ είναι αντιστρέψιμο και μάλιστα*

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I-A)^n.$$

Απόδειξη. Εφόσον

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|(I-A)^n\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|I-A\|^n = \frac{1}{1-\|I-A\|} < \infty,$$

η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (I-A)^n$ συγκλίνει απόλυτα, άρα (από την πληρότητα[2] της $\mathcal{B}$) συγκλίνει. Έστω $S = \lim S_n$ το όριό της. Εύκολα ελέγχεται ότι

$$S_n A = A S_n = I - (I-A)^{n+1} \to 0,$$

άρα $AS = SA = I$. □

Πόρισμα 4.1.10. *Το σύνολο $\mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ των αντιστρεψίμων στοιχείων της $\mathcal{B}$ είναι ανοικτό και η απεικόνιση $A \to A^{-1}$ είναι συνεχής στο $\mathrm{Inv}(\mathcal{B})$.*

Απόδειξη. (α) Δείχνουμε ότι το $\mathcal{B}$ είναι ανοικτό: Έστω $A_o \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ και $m = \left\|A_o^{-1}\right\|$. Για κάθε $A \in \mathcal{B}$ με $\|A - A_o\| < \frac{1}{m}$ έχουμε

$$\left\|A_0^{-1}A - I\right\| = \left\|A_0^{-1}(A - A_o)\right\| \le \|A_0^{-1}\|\,\|A - A_o\| < 1$$

[2] Σ' έναν χώρο Banach, αν μία σειρά συγκλίνει απόλυτα, τότε (τα μερικά της αθροίσματα αποτελούν ακολουθία Cauchy, άρα) συγκλίνει.

άρα $A_0^{-1}A \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$, συνεπώς και $A \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$.

Δείχνουμε ότι η $A \to A^{-1}$ είναι συνεχής: Αν $A, B \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\left\|A^{-1} - B^{-1}\right\| &= \left\|A^{-1}(B-A)B^{-1}\right\| \\
&= \left\|(A^{-1} - B^{-1})(B-A)B^{-1} + B^{-1}(B-A)B^{-1}\right\| \\
&\leq \left\|A^{-1} - B^{-1}\right\| \|B-A\| \left\|B^{-1}\right\| + \|B-A\| \left\|B^{-1}\right\|^2 \\
\Rightarrow \quad \left\|A^{-1} - B^{-1}\right\|&(1 - \|B-A\| \left\|B^{-1}\right\|) \leq \|B-A\| \left\|B^{-1}\right\|^2
\end{aligned}$$

και συνεπώς αν $A_n, B \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ με $\|A_n - B\| \to 0$ έχουμε $\left\|A_n^{-1} - B^{-1}\right\| \to 0$.

Πόρισμα 4.1.11. *Αν $A \in \mathcal{B}$, το σύνολο $\sigma(A)$ είναι φραγμένο. Μάλιστα, αν*

$$\rho(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

είναι η ***φασματική ακτίνα*** *(spectral radius) του A, τότε $\rho(A) \leq \|A\|$.*

Απόδειξη. Αν $|\lambda| > \|A\|$, τότε $\|\frac{A}{\lambda}\| < 1$ οπότε από το Θεώρημα προκύπτει ότι $I - \frac{A}{\lambda} \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ άρα $\lambda I - A \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$. □

Πόρισμα 4.1.12. *Αν $A \in \mathcal{B}$, το σύνολο $\sigma(A)$ είναι κλειστό (άρα συμπαγές, αφού είναι και φραγμένο).*

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι το $\mathbb{C}\backslash\sigma(A)$ είναι ανοικτό. Πράγματι, το $\mathbb{C}\backslash\sigma(A)$ είναι η αντίστροφη εικόνα του ανοικτού συνόλου $\mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ μέσω της απεικόνισης $F_A : \mathbb{C} \to \mathcal{B}$ με $F_A(\lambda) = A - \lambda I$, που είναι συνεχής.

Θεώρημα 4.1.13. *Το φάσμα $\sigma(A)$ ενός στοιχείου A μίας άλγεβρας Banach με μονάδα είναι μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\sigma(A) = \emptyset$. Τότε ο αντίστροφος $(A - \lambda I)^{-1}$ ορίζεται σ' όλο το $\mathbb{C}$. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $\mathbb{C} \to \mathcal{B} : \lambda \mapsto R_\lambda := (A - \lambda I)^{-1}$ έχει μιγαδική παράγωγο και μηδενίζεται στο ∞, οπότε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Liouville θα συμπεράνουμε ότι $R_\lambda = 0$ για κάθε λ, πράγμα άτοπο εφόσον το R_λ είναι αντιστρέψιμο.

Δείχνουμε πρώτα ότι η R_λ έχει μιγαδική παράγωγο ίση με R_λ^2 (όπως στην περίπτωση $\mathcal{B} = \mathbb{C}$). Αν $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ με $\lambda \neq \mu$,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{R_\mu - R_\lambda}{\mu - \lambda} - R_\lambda^2\right\| &= \left\|\frac{R_\mu((A-\lambda I) - (A - \mu I))R_\lambda}{\mu - \lambda} - R_\lambda^2\right\| \\
&= \left\|R_\mu R_\lambda - R_\lambda^2\right\| \leq \left\|R_\mu - R_\lambda\right\| \|R_\lambda\| \,.
\end{aligned}$$

Όμως, στην Πρόταση 4.1.10 δείξαμε ότι η απεικόνιση $A \to A^{-1}$ είναι συνεχής όπου ορίζεται. Συνεπώς όταν $\mu \to \lambda$ στο $\mathbb{C}$ έχουμε

$$\left\|R_\mu - R_\lambda\right\| = \left\|(A - \mu I)^{-1} - (A - \lambda I)^{-1}\right\| \to 0$$

και άρα, από την τελευταία ανισότητα

(*) $$\lim_{\mu \to \lambda} \left\|\frac{R_\mu - R_\lambda}{\mu - \lambda} - R_\lambda^2\right\| \to 0\,.$$

Έστω τώρα $\phi : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ μία συνεχής γραμμική μορφή. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \lambda \mapsto \phi(R_\lambda).$$

Η σχέση $(*)$ δείχνει ότι η f έχει μιγαδική παράγωγο, $f'(\lambda) = \phi(R_\lambda^2)$:

$$\lim_{\mu\to\lambda}\left|\frac{f(\mu)-f(\lambda)}{\mu-\lambda} - \phi(R_\lambda^2)\right| \to 0$$

αφού η ϕ είναι συνεχής. Επιπλέον όμως ισχύει

$$\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = 0.$$

Πράγματι, όταν $|\lambda| > \|A\|$ έχουμε

$$\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^n$$

εφόσον $\left\|\frac{A}{\lambda}\right\| < 1$ οπότε

$$\begin{aligned}\|R_\lambda\| &= \left\|\frac{1}{\lambda}\left(I-\frac{A}{\lambda}\right)^{-1}\right\| = \frac{1}{|\lambda|}\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^n\right\| \\ &\le \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{A}{\lambda}\right\|^n = \frac{1}{|\lambda|}\left(1-\left\|\frac{A}{\lambda}\right\|\right)^{-1} = (|\lambda| - \|A\|)^{-1}\end{aligned}$$

επομένως $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\|R_\lambda\| = 0$, άρα και $\lim\limits_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = 0$.

Συμπέρασμα: η συνάρτηση f είναι ακέραια (παραγωγίσιμη σ' όλο το $\mathbb{C}$) και μηδενίζεται στο ∞, άρα από το Θεώρημα Liouville μηδενίζεται παντού. Δηλαδή για κάθε συνεχή γραμμική μορφή ϕ έχουμε $\phi(R_\lambda) = 0$ για κάθε λ, άρα από το Θεώρημα Hahn-Banach $R_\lambda = 0$ για κάθε λ, άτοπο.

Παρατήρηση 4.1.14. *Ακολουθεί μία πιο σύντομη απόδειξη του τελευταίου βήματος. Διατηρούμε τους συμβολισμούς της προγούμενης απόδειξης.*

Όταν $|\lambda| > \|A\|$ έχουμε $R_\lambda = \dfrac{-1}{\lambda}\left(I-\dfrac{A}{\lambda}\right)^{-1} = \dfrac{-1}{\lambda}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^n$, άρα

$$f(\lambda) = \phi(R_\lambda) = \frac{-1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi(A^n)}{\lambda^n}.$$

Η σειρά αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|A\|\}$. Επομένως, ολοκληρώνοντας σε μία περιφέρεια $\gamma(t) = re^{is},\ s \in [0, 2\pi]$ με ακτίνα $r > \|A\|$, έχουμε

$$\begin{aligned}-\int_\gamma f(\lambda)d\lambda &= \int_\gamma \sum_{k=0}^{\infty}\phi(A^k)\frac{1}{\lambda^{k+1}}d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty}\phi(A^k)\int_\gamma \frac{1}{\lambda^{k+1}}d\lambda \\ \text{(ομοιόμορφη σύγκλιση)} \qquad &= \phi(A^0)\int_\gamma \frac{1}{\lambda}d\lambda = 2\pi i\phi(A^0).\end{aligned}$$

Όμως η f είναι ακέραια, συνεπώς το $\int_\gamma f(\lambda)d\lambda$ μηδενίζεται. Επομένως $\phi(I) = \phi(A^0) = 0$ για κάθε συνεχή γραμμική μορφή ϕ και άρα $I = 0$, άτοπο.

4.1.2 Το φάσμα ενός τελεστή

Αν $\mathcal{X}$ είναι χώρος Banach, ένα στοιχείο T της άλγεβρας Banach $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι αντιστρέψιμο αν και μόνον αν είναι $1-1$ και επί (γιατί ο αντίστροφός του είναι αυτομάτως φραγμένος από το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης (1.1.11).

Παρατήρηση 4.1.15. *Ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν είναι κάτω φραγμένος (δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|Tx\| \geq \delta\|x\|$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$) και έχει πυκνό σύνολο τιμών.*

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι ένας αντιστρέψιμος τελεστής ικανοποιεί τις δύο αυτές συνθήκες (με $\delta = \|T^{-1}\|^{-1}$).

Αντίστροφα, αν $\mathcal{Y} = T(\mathcal{X})$, η ανισότητα $\|Tx\| \geq \delta\|x\|$ δείχνει ότι η απεικόνιση $S_o : \mathcal{Y} \to \mathcal{X} : Tx \mapsto x$ είναι καλά ορισμένη (γιατί ο T είναι 1-1) και φραγμένη (από $\frac{1}{\delta}$). Προφανώς η S_o είναι γραμμική. Συνεπώς, ο S_o επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $S : \overline{\mathcal{Y}} \to \mathcal{X}$ με $STx = x$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$ και $TSy = y$ για κάθε $y \in \overline{\mathcal{Y}}$ (γιατί;). Επομένως, αν $\overline{\mathcal{Y}} = \mathcal{X}$, τότε ο T είναι αντιστρέψιμος και $S = T^{-1}$.

Από την Παρατήρηση αυτή προκύπτει ότι το φάσμα ενός τελεστή A μπορεί να αναλυθεί σε περισσότερα κομμάτια (που δεν έχουν έννοια για ένα στοιχείο μίας αυθαίρετης άλγεβρας Banach): Αν $\lambda \in \sigma(A)$, μπορεί ο $A - \lambda I$ να μην είναι κάτω φραγμένος (ειδικότερα, να μην είναι $1-1$) ή να μην έχει πυκνό σύνολο τιμών (ή και τα δύο). Αυτό οδηγεί στους ακόλουθους ορισμούς:

Ορισμός 4.1.16. *Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Το* ***σημειακό φάσμα*** *(point spectrum) $\sigma_p(A)$ του A είναι το σύνολο των ιδιοτιμών του:*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}\}.$$

Το ***προσεγγιστικά σημειακό φάσμα*** *(approximate point spectrum) $\sigma_a(A)$ του A είναι το σύνολο των* ***προσεγγιστικών ιδιοτιμών*** *(approximate eigenvalues), δηλαδή το σύνολο των λ ώστε ο $A - \lambda I$ να μην είναι κάτω φραγμένος:*

$$\sigma_a(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in \mathcal{X}\ : \|(A - \lambda I)x_\varepsilon\| < \varepsilon\|x_\varepsilon\|\}.$$

Το ***φάσμα συμπίεσης*** *(compression spectrum) $\sigma_c(A)$ του A είναι το σύνολο*

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{(A - \lambda I)(\mathcal{X})} \neq \mathcal{X}\}.$$

Ένα $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή του A αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία $(x_n) \subseteq \mathcal{X}$ με $\|x_n\| = 1$ ώστε $\|(A - \lambda I)x_n\| \to 0$.

Μελέτη του φάσματος

Τα σύνολα $\sigma_a(A)$ και $\sigma_c(A)$ δεν είναι ξένα εν γένει. Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης είναι ίσα και ταυτίζονται με το (σημειακό) φάσμα. Σε απειροδιάστατους χώρους μπορεί να μην ταυτίζονται.[3] Πάντοτε όμως, όπως προκύπτει από την παρατήρηση 4.1.15,

Πρόταση 4.1.17. *Η ένωση $\sigma_a(A) \cup \sigma_c(A)$ ισούται με $\sigma(A)$.*

Το φάσμα συμπίεσης είναι κατά κάποιον τρόπο δυϊκό προς το σημειακό φάσμα. Αυτό φαίνεται πιο εύκολα σε χώρους Hilbert. Θα χρειασθούμε ένα Λήμμα:

[3] Για παράδειγμα, όπως θα δούμε στο 4.1.20, για τον τελεστή της μετατόπισης S, το $\sigma_a(S)$ είναι η μοναδιαία περιφέρεια $\mathbb{T}$, ενώ το $\sigma_c(S)$ είναι ο ανοικτός μοναδιαίος δίσκος $\mathbb{D}$, οπότε $\sigma_c(S) \cap \sigma_a(S) = \emptyset$.

Λήμμα 4.1.18. *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Τότε*

$$\ker T = (T^*(\mathcal{H}))^\perp \qquad \text{και} \qquad \overline{T(\mathcal{H})} = (\ker T^*)^\perp.$$

Επομένως ο T είναι $1-1$ αν και μόνον αν το σύνολο τιμών του T^* είναι πυκνό.

Απόδειξη. Έχουμε $Tx = 0$ αν και μόνον αν $\langle Tx, y\rangle = 0$ για κάθε $y \in \mathcal{H}$, αν και μόνον αν $\langle x, T^*y\rangle = 0$ για κάθε $y \in \mathcal{H}$, αν και μόνον αν το x είναι κάθετο στο σύνολο τιμών του T^*. Για την δεύτερη ισότητα, εφαρμόζοντας την πρώτη στον T^* έχουμε $(\ker T^*)^\perp = (T(\mathcal{H}))^{\perp\perp} = \overline{T(\mathcal{H})}$. □

Λήμμα 4.1.19. *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Τότε*

(i) $\sigma(T^*) = \{\bar\lambda : \lambda \in \sigma(T)\}$

(ii) $\sigma_p(T) = \{\bar\lambda : \lambda \in \sigma_c(T^*)\}$ και $\sigma_c(T) = \{\bar\lambda : \lambda \in \sigma_p(T^*)\}$.

Απόδειξη. Οι σχέσεις $AB = I = BA$ και $B^*A^* = I = A^*B^*$ είναι ισοδύναμες. Επομένως ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ο A^* είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. Η (i) έπεται θέτοντας $A = T - \lambda I$.

Για την (ii), εφαρμόζουμε το προηγούμενο Λήμμα: έχουμε $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$ αν και μόνον αν το $(T^* - \bar\lambda I)(\mathcal{H})$ δεν είναι πυκνό. □

Παράδειγμα 4.1.20. *Αν $S \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ είναι ο τελεστής της μετατόπισης $Se_n = e_{n+1}$, τότε*

$$\sigma_p(S) = \emptyset, \quad \sigma_a(S) = \mathbb{T}, \quad \sigma_c(S) = \mathbb{D} \text{ και άρα } \sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$$

(όπου $\mathbb{D}$ ο ανοικτός μοναδιαίος δίσκος και $\mathbb{T}$ η μοναδιαία περιφέρεια).

Απόδειξη. (i) Η σχέση $\|Sx\| = \|x\|$ για κάθε $x \in \ell^2$ δείχνει ότι $\|S\| = 1$, άρα $\sigma(S) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$ (Πόρισμα 4.1.11).

(ii) Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ και $x = (x_n) \in \ell^2$ ώστε $Sx = \lambda x$, δηλαδή

$$(0, x_1, x_2, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots).$$

Αν $\lambda = 0$ τότε η σχέση αυτή δείχνει ότι $x = 0$. Αν $\lambda \neq 0$ τότε από την σχέση $\lambda x_1 = 0$ έχουμε $x_1 = 0$, από την σχέση $\lambda x_2 = x_1$ έχουμε $x_2 = 0$ και ούτω καθεξής, άρα πάλι $x = 0$. Επομένως $\sigma_p(S) = \emptyset$.

(iii) Ισχυρίζομαι ότι $\sigma_p(S^*) = \mathbb{D}$. Τότε (από το Λήμμα 4.1.19) θα έχουμε $\sigma_c(S) = \mathbb{D}$, οπότε $\mathbb{D} \subseteq \sigma(S) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$, άρα $\sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$ εφόσον το $\sigma(S)$ είναι κλειστό.

Πράγματι, έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ και $x = (x_n) \in \ell^2, x \neq 0$ τέτοιο ώστε $S^*x = \lambda x$, δηλαδή

$$(x_2, x_3, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots).$$

Τότε $x_2 = \lambda x_1,\ x_3 = \lambda x_2 = \lambda^2 x_1$ και γενικά $x_{n+1} = \lambda^n x_1$. Επειδή $x \in \ell^2$, έπεται ότι $\sum_n |\lambda|^{2n} < \infty$ (διότι $x_1 \neq 0$ αφού $x \neq 0$) άρα $|\lambda| < 1$.

Αντίστροφα αν $\lambda \in \mathbb{D}$ τότε το διάνυσμα $x = (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$ είναι μη μηδενικό στοιχείο του ℓ^2 και ικανοποιεί $S^*x = \lambda x$, άρα $\lambda \in \sigma_p(S^*)$.

(iv) Εφόσον $\sigma_a(S) \subseteq \sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$, για να δείξουμε ότι $\sigma_a(S) = \mathbb{T}$, μένει να δειχθεί ότι αν $\lambda \in \mathbb{D}$ τότε $\lambda \notin \sigma_a(S)$, δηλαδή ότι ο $S - \lambda I$ είναι κάτω φραγμένος. Πράγματι για κάθε $x \in \ell^2$ έχουμε

$$\|(S - \lambda I)x\| \geq |\|Sx\| - \|\lambda x\|| = |\|x\| - \|\lambda x\|| = (1 - |\lambda|)\,\|x\|\,.$$

Παράδειγμα 4.1.21. *Ορίζουμε την απεικόνιση $T : c_{00} \to c_{00}$ από την σχέση $Te_n = \frac{1}{n}e_{n+1}$ (και επεκτείνουμε γραμμικά). Ελέγχεται εύκολα ότι ο $\|Tx\|_2 \leq \|x\|_2$ για κάθε $x \in c_{oo}$, άρα ο T επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή από τον ℓ^2 στον εαυτό του (που συμβολίζουμε επίσης με T). Σημειώνουμε ότι $T = SD$ όπου S είναι ο τελεστής της μετατόπισης και $De_n = \frac{1}{n}e_n$.*

Τότε $\sigma(T) = \{0\}$. Μάλιστα $\sigma_p(T) = \emptyset$ και $\sigma_a(T) = \sigma_c(T) = \{0\}$.

Εφόσον $\sigma(D) = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ και $\sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$, το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι το σ δεν συμπεριφέρεται καλά ως προς την σύνθεση τελεστών.

Απόδειξη. (i) Κατ' αρχήν ισχύει ότι $0 \in \sigma_a(T)$ γιατί $\|(T-0)e_n\| = \frac{1}{n} \to 0$. Όμως $0 \notin \sigma_p(T)$ διότι οι S και D είναι $1-1$, άρα και ο $T = SD$ είναι $1-1$. Επίσης $0 \in \sigma_c(T)$ διότι $\langle Te_n, e_1\rangle = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\langle Tx, e_1\rangle = 0$ για κάθε $x \in \ell^2$, άρα $e_1 \perp (T-0)(\ell^2)$.

(ii) Έστω $\lambda \neq 0$. Θα δείξουμε ότι ο $T_\lambda = \lambda I - T = \lambda(I - \frac{T}{\lambda})$ είναι αντιστρέψιμος, οπότε θα έχουμε $\sigma(T) = \{0\}$ και $\sigma_p(T) = \emptyset$.

Παρατηρούμε ότι $\|T^k\| \leq \dfrac{1}{k!}$ γιατί

$$T^k\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n(n+1)\dots(n+k-1)} e_{n+k}$$

άρα

$$\left\|T^k\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right)\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{(n(n+1)\dots(n+k-1))^2} \leq \frac{1}{(k!)^2}\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 .$$

Επομένως $\left\|\left(\frac{T}{\lambda}\right)^k\right\| \leq \frac{1}{k!|\lambda|^k}$, άρα

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\left(\frac{T}{\lambda}\right)^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{|\lambda|^k} = \exp\frac{1}{|\lambda|}$$

πράγμα που δείχνει ότι αν $S_n = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n}(\frac{T}{\lambda})^k$ τότε η (S_n) συγκλίνει ως προς τη νόρμα τελεστή. Έστω $S_\lambda = \lim_n S_n$. Εφόσον

$$T_\lambda S_n = S_n T_\lambda = \left(I - \frac{T}{\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^k\right) = I - \left(\frac{T}{\lambda}\right)^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} I$$

έπεται ότι $T_\lambda S_\lambda = S_\lambda T_\lambda = I$. □

4.1.3 Το φάσμα αυτοσυζυγούς τελεστή

Πρόταση 4.1.22. *Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ φυσιολογικός τελεστής. Τότε $\sigma(A) = \sigma_a(A)$.*

Απόδειξη. Έστω $\lambda \notin \sigma_a(A)$. Πρέπει να δείξουμε ότι ο $A - \lambda I$ είναι αντιστρέψιμος. Από την υπόθεση, είναι κάτω φραγμένος, οπότε (Παρατήρηση 4.1.15) αρκεί να δειχθεί ότι το $(A-\lambda I)\mathcal{H}$ είναι πυκνό στον $\mathcal{H}$. Αν $x \perp (A-\lambda I)\mathcal{H}$, τότε $(A^* - \bar{\lambda}I)x = 0$ (γιατί $\left\langle (A^* - \bar{\lambda}I)x, y\right\rangle = \langle x, (A-\lambda I)y\rangle = 0$ για κάθε y). Αλλά ο $A - \lambda I$ είναι κάτω φραγμένος, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|(A-\lambda I)x\| \geq \delta\|x\|$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$. Επειδή ο $A - \lambda I$ είναι φυσιολογικός, από το Λήμμα 2.1.10 έχουμε $\|(A^* - \bar{\lambda}I)x\| = \|(A-\lambda I)x\| \geq \delta\|x\|$, και συνεπώς $x = 0$. Επομένως το $(A-\lambda I)\mathcal{H}$ είναι πυκνό στον $\mathcal{H}$.

Πρόταση 4.1.23. *Έστω* $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. *Τότε* $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Αν $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, τότε, για κάθε $x \in \mathcal{H}\backslash\{0\}$,

$$\begin{aligned} 0 < |\lambda - \bar{\lambda}|.\|x\|^2 &= |\langle (A - \lambda I)x, x\rangle - \langle (A - \bar{\lambda} I)x, x\rangle| \\ &= |\langle (A - \lambda I)x, x\rangle - \langle x, (A - \lambda I)x\rangle| \leq 2\|(A - \lambda I)x\|\|x\| \end{aligned}$$

οπότε

$$\|(A - \lambda I)x\| \geq \frac{|\lambda - \bar{\lambda}|}{2}\|x\|.$$

Επομένως $\lambda \notin \sigma_a(A)$. Αλλά $\sigma_a(A) = \sigma(A)$ διότι ο A είναι φυσιολογικός. □

Πρόταση 4.1.24. *Έστω* $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. *Τότε ένας από τους αριθμούς* $\|A\|$ *ή* $-\|A\|$ *ανήκει στο* $\sigma(A)$. *Ειδικότερα,*[4]

(α) $\sigma(A) \neq \emptyset$ *και* (β) $\rho(A) = \|A\|$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ο αριθμός $\|A\|^2$ ανήκει στο $\sigma(A^2)$. Τότε το γινόμενο $(A - \|A\|I)(A + \|A\|I) = (A^2 - \|A\|^2 I)$ δεν θα είναι αντιστρέψιμο, οπότε οι τελεστές $(A - \|A\|I)$ και $(A + \|A\|I)$ δεν μπορεί και οι δύο να είναι αντιστρέψιμοι.

Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathcal{H}$ έχουμε (εφόσον $\langle A^2x, \lambda^2x\rangle \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \|A^2x - \lambda^2x\|^2 &= \langle A^2x - \lambda^2x, A^2x - \lambda^2x\rangle = \|A^2x\|^2 - 2\langle A^2x, \lambda^2x\rangle + \|\lambda^2x\|^2 \\ &= \|A^2x\|^2 - 2\lambda^2\|Ax\|^2 + \lambda^4\|x\|^2. \end{aligned}$$

Αλλά $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}$, άρα υπάρχει ακολουθία (x_n) με $\|x_n\| = 1$ και $\|Ax_n\| \to \|A\|$. Θέτοντας $\lambda = \|A\|$ και $x = x_n$ στην προηγούμενη ταυτότητα, έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \|A^2x_n - \lambda^2x_n\|^2 &= \|A^2x_n\|^2 - 2\lambda^2\|Ax_n\|^2 + \lambda^4 \\ &\leq (\|A\|\|Ax_n\|)^2 - 2\lambda^2\|Ax_n\|^2 + \lambda^4 = \lambda^4 - \lambda^2\|Ax_n\|^2 \to 0. \end{aligned}$$

Επομένως ο αριθμός $\lambda^2 = \|A\|^2$ είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή του A^2. □

[4] Υπενθυμίζουμε ότι (όπως αποδεικνύεται με μεθόδους Μιγαδικής Ανάλυσης) το φάσμα οποιουδήποτε τελεστή σε ένα χώρο Banach είναι μη κενό. Η ισότητα $\rho(A) = \|A\|$ δεν ισχύει όμως εν γένει για μη φυσιολογικούς τελεστές (παράδειγμα $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$).