ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΝΟΗΜΑΤΩΝ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΤΟΠΟΥ: ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ

Αφορά τη Θεματική Ενότητα 3: Πρακτικές και καινοτομίες στην εκπαίδευση και στην έρευνα

Συμεωνίδου Ελένη – Ελευθερία	Γιατράς Ιωάννης
Δεληγιώργη 23 Τ.Κ. 54642 Θεσσαλονίκη Email: Eleni_sidi@hotmail.com	Θεοφράστου 9 Τ.Κ. 13673, Αχαρναί Ατική Email: ippokrateios@yahoo.gr

Περίληψη

Η παρούσα εργασία αφορά τον σχεδιασμό και την εφαρμογή ενός διδακτικού πειράματος που αξιοποιεί πορίσματα από την έρευνα στους τομείς των Μαθηματικών στον χώρο εργασίας και της Μάθησης που Βασίζεται στη Διερεύνηση, με στόχο τη διδασκαλία της έννοιας του γεωμετρικού τόπου. Στο επίκεντρο της διερεύνησής μας βρίσκεται η κατασκευή νοημάτων γύρω από την έννοια του γεωμετρικού τόπου.

Abstract

This paper concerns the design and implementation of a teaching experiment that uses research findings in the fields of Work Place Mathematics and Inquiry Based Learning in the aim of teaching the notion of Geometric Locus. Furthermore, we try to answer the question of how the experiment students constructed meanings around the notion of Locus.

Λέξεις κλειδιά: *γεωμετρικός τόπος, κύκλος, χώρος εργασίας , Μάθηση που Βασίζεται στη Διερεύνηση, σεισμολογία.*

1. Εισαγωγή

Η εργασία μας αποτελεί ένα τμήμα μίας ευρύτερης έρευνας. Η παρούσα έρευνα, αφορά τον σχεδιασμό και την εφαρμογή ενός διδακτικού πειράματος που είχε ως στόχο τη διδασκαλία της έννοιας του γεωμετρικού τόπου (γ.τ.) μέσω της έννοιας του κύκλου, μέσα στο πλαίσιο του χώρου εργασίας της σεισμολογίας. **Ο ερευνητικός στόχος** της εργασίας μας είναι να διερευνήσουμε την κατασκευή μαθηματικών νοημάτων των μαθητών που έλαβαν μέρος στο πείραμα. Τα συμπεράσματά μας δεν προκύπτουν μόνο από το υλικό που θα παρουσιαστεί αλλά και από όλο το υλικό που είχαμε στη διάθεσή μας κατά τη διεξαγωγή της ευρύτερης έρευνας που έχουμε προαναφέρει.

Η καινοτομία που εισάγει αυτή η εργασία, σχετίζεται με τη διδακτική πράξη ως προς τον σχεδιασμό και την εφαρμογή στη διδασκαλία. Η εφαρμογή και ο σχεδιασμός διδασκαλίας που προτείνουμε έχουν δομηθεί πάνω σε τρεις άξονες: Α. στη Μάθηση που Βασίζεται σε Διερεύνηση (βλ. Maass & Artigue, 2013) Β. στα Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Εκπαίδευση (Freudenthal, 1991) και Γ. στη γεφύρωση του κενού που υπάρχει ανάμεσα στα Μαθηματικά στο χώρο εργασίας και την εκπαίδευση (βλ. Williams & Wake, 2007).

Η μέθοδος έρευνας που χρησιμοποιήθηκε ήταν το διδακτικό πείραμα (βλ. Molina κ.ά. 2007). Τα εργαλεία που επιλέχθηκαν για το εγχείρημα ήταν η παρατήρηση και το ερωτηματολόγιο. Η διδασκαλία είχε σχεδιαστεί για επίπεδο Α΄ Λυκείου. Για τον λόγο αυτό, τα υποκείμενα που επιλέχθηκαν για το πείραμα ήταν 2 μαθητές της Α΄ Λυκείου που φοιτούν ο ένας σε ιδιωτικό σχολείο της Αθήνας (και έχει κωδικοποιηθεί σε αυτή την εργασία ως Μ2) και ο άλλος (κωδικός Μ1) στο 1^{ο} Λύκειο Γλυφάδας. Ο ένας μαθητής (Μ2) κρίνεται από το ισχύον εκπαιδευτικό σύστημα, βάσει επιδόσεων, ως άριστός ενώ ο άλλος (Μ1) κρίνεται ως καλός. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στο σπίτι του Μ2. Οι ερευνητές έχουν κωδικοποιηθεί επίσης, ως Ε1 και Ε2 και πραγματοποίησαν τη διδασκαλία οι ίδιοι. Τη στιγμή που διεξήχθη η έρευνα ήταν και οι δύο ερευνητές, φοιτητές του μεταπτυχιακού στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών, του τμήματος Μαθηματικών του ΕΚΠΑ. Ο Ε2 είναι διορισμένος καθηγητής σε δημόσιο σχολείο και έχει είκοσι χρόνια εμπειρίας στη διδασκαλία και η Ε1 εργάζεται σε φροντιστήριο και έχει δέκα χρόνια εμπειρίας στη διδασκαλία. Η ευρύτερη έρευνα, της οποίας η παρούσα εργασία αποτελεί συντόμευση, διεξήχθη στο πλαίσιο του μαθήματος «Ενσωμάτωση της Τεχνολογίας στη Διδακτική των Μαθηματικών» που διδάχθηκε από τον κ. Γ. Ψυχάρη.

Οι διδακτικοί Στόχοι του πειράματος ήταν οι μαθητές:

Α. Να ανακαλύψουν τα Μαθηματικά που βρίσκονται μέσα στη σεισμολογία και να τα συνδέσουν με αυτή καθώς και να εμπλακούν σε καταστάσεις διερεύνησης.

Β. Να συνδέσουν το σχήμα του κύκλου με την έννοια του γ.τ. ως μετασχηματισμού και να οικοδομήσουν γενικότερα νοήματα για την έννοια του γ.τ.

2. Ανάλυση δραστηριότητας

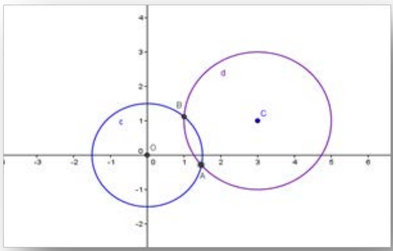
Περιγραφή: Η δραστηριότητα αφενός αποτελεί μια σύνδεση των Μαθηματικών με τη Σεισμολογία[1], αφετέρου σχετίζεται με τη διδακτική του κύκλου ως γ.τ. που προκύπτει από έναν μετασχηματισμό, όπως εξηγείται παρακάτω. Παρακάτω παρατίθεται ένα απόσπασμα από την εκφώνηση της δραστηριότητας:

«*Στον τελευταίο σεισμό που καταγράφηκε ο υπολογιστής πρόλαβε να μεταδώσει το επίκεντρο του σεισμού, αλλά ο πομπός ενός εκ των τριών σεισμογράφων κάηκε και δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση του... Σε αυτή τη δραστηριότητα αναλαμβάνετε τον ρόλο του σεισμολόγου… Ως ειδικοί, θέλουμε να κατευθύνετε την ομάδα έρευνας και να της υποδείξετε πού πρέπει να ψάξει για να βρει τον 3ο σεισμογράφο. Στην κλίμακα που εργάζεστε εσείς (χαρτί μιλιμετρέ ή λογισμικό), ο πρώτος σεισμογράφος έχει συντεταγμένες (0,0) και απέχει από το επίκεντρο 1.5 cm. Ο δεύτερος σεισμογράφος έχει συντεταγμένες (3,1) και απέχει από το επίκεντρο 2 cm. Ο τρίτος σεισμογράφος, πριν καεί ο πομπός του, μετέδωσε απόσταση από το επίκεντρο ίση με 1 cm. Πού πρέπει να ψάξει η ομάδα έρευνας για να βρει τον 3ο σεισμογράφο;*»

Λύση: Προκειμένου να λυθεί η δραστηριότητα πρέπει πρώτα να σχεδιαστούν οι δύο δοθέντες κύκλοι (βλ. Σχήμα 1). Ψάχνουμε τον γ.τ. των πιθανών κέντρων ενός κύκλου ακτίνας ένα, ο οποίος περνά από το επίκεντρο. Στο σημείο αυτό, αφού οι μαθητές είχαν σχεδιάσει τους

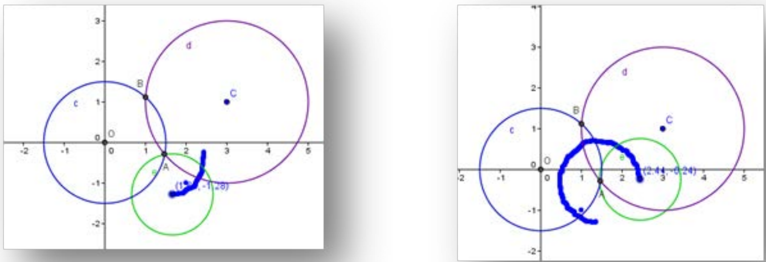
[1] Στην καταγραφή κάθε σεισμού χρησιμοποιούνται τρεις σεισμογράφοι και ακολουθούν τη μέθοδο της τριγωνοποίησης: κάθε σεισμογράφος σχηματίζει έναν κύκλο με κέντρο τον εαυτό του και ακτίνα ίση με την απόστασή του από το επίκεντρο. Το σημείο τομής των τριών κύκλων είναι το επίκεντρο του σεισμού

κύκλους, δώσαμε στους μαθητές την πληροφορία ότι επίκεντρο είναι το σημείο Α (βλ. Σχήμα 1)[2]. Αν θεωρήσουμε έναν τυχαίο κύκλο ακτίνας ένα, που διέρχεται από το Α, θα δούμε ότι δεν είναι μοναδικός.



Σχήμα 1

Αν πατήσουμε την εντολή ‘ίχνος’ πάνω στο κέντρο αυτού του κύκλου και τον μετακινήσουμε έτσι ώστε η περιφέρειά του να διέρχεται πάντα από το Α (βλ. Σχήμα 2) θα δούμε ότι μέσα από το σύρσιμο του κρυφού γεωμετρικού τόπου (βλ. Arzarello, 2002) προκύπτει ότι ο ζητούμενος γ.τ. που είναι ένας κύκλος ακτίνας ένα, με κέντρο το επίκεντρο του σεισμού. Ωστόσο, αυτός ο τρόπος λύσης δεν είναι μοναδικός.



Σχήμα 2

Σχεδιασμός βάσει έρευνας

Η έρευνα στη διδακτική μας πληροφορεί ότι η έννοια του γ.τ. μπορεί να ειδωθεί από πολλές πλευρές π.χ. ως μετασχηματισμός**[3]** (Jahn, 2002).

---

[2] Σε περίπτωση που κάποιος εκπαιδευτικός θέλει να κάνει το πρόβλημα δυσκολότερο μπορεί να παραλείψει αυτή τη πληροφορία. Τότε αλλάζει και η λύση η οποία αφήνεται προς εύρεση στον αναγνώστη.

Εδώ, η προτεινόμενη δραστηριότητα αφορά έναν γ.τ (κύκλο) ο οποίος προκύπτει ως μετασχηματισμός μέσα από την κίνηση ενός σημείου (κέντρου ενός άλλου κύκλου) κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις. Φυσικά, η πτυχή του γ.τ ως μετασχηματισμού δεν αποτελεί διδακτικό στόχο. Είναι μια γνώση που θεωρούμε ότι πρέπει να έχει ο διδάσκων που θέλει να εφαρμόσει μια τέτοιου τύπου άσκηση[4]. Ο μετασχηματισμός αυτός είναι μια συνάρτηση που απεικονίζει τον ζητούμενο (πράσινο) κύκλο (βλ. Σχήμα 4) στο κέντρο του. Επίσης, η δραστηριότητα έχει σχεδιαστεί σύμφωνα με τα πρότυπα των Ρεαλιστικών Μαθηματικών στην Εκπαίδευση, μιας και εδώ τα Μαθηματικά συνδέονται με την επιστήμη της σεισμολογίας. Επίσης, η έρευνα στη περιοχή μάς πληροφορεί ότι τα Μαθηματικά στο σχολείο εμφανίζονται πολύ διαφορετικά από ό,τι στον χώρο εργασίας (black-boxing[5]): στο σχολείο τα Μαθηματικά αποτελούν το αντικείμενο μελέτης αυτά καθεαυτά, ενώ στον χώρο εργασίας χρησιμοποιούνται ως εργαλείο διαμεσολαβημένης δράσης (Wake, 2014). Αυτή η απόσταση δημιουργεί δυσκολίες στους εργαζόμενους οι οποίοι δεν μπορούν να αναγνωρίσουν τα συγκεκαλυμμένα Μαθηματικά στον χώρο εργασίας τους. Η εργασία μας αποτελεί μια πρόταση για τη γεφύρωση αυτού του χάσματος. Επιπρόσθετα, ο δυναμικός χειρισμός που προσφέρει το λογισμικό δίνει στον χρήστη τη δυνατότητα της εποπτείας μιας απειρίας διαφορετικών θέσεων στο σχήμα, διευκολύνοντας έτσι τη διερεύνηση της κατάστασης, καθώς του δίνει τη δυνατότητα να θέσει τις δικές του ερωτήσεις για το 'πώς' και το 'γιατί' συμβαίνει κάτι. Όλα τα παραπάνω συνάδουν με τις κύριες αρχές της Μάθησης που Βασίζεται στη Διερεύνηση

---

[3] Ο γ.τ. είναι ένα σύνολο σημείων που προκύπτουν ως εικόνες σημείων, δηλαδή πρόκειται για την εικόνα ενός αντικειμένου που προκύπτει από ένα μετασχηματισμό. Αν ονομάσουμε f τη συνάρτηση $f\colon M \rightarrow N$, με $f(M)=N$, τότε ο γ.τ. των σημείων N που ψάχνουμε να βρούμε, είναι οι εικόνες των σημείων M μέσω της f. (Jahn, 2002).

[4] Στο ελληνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα, υπάρχουν ασκήσεις που ζητούν να βρεθεί γ.τ. ο οποίος προκύπτει από την κίνηση ενός σημείου κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις. Δηλαδή πρόκειται για γ.τ. που προκύπτει ως μετασχηματισμός, χωρίς βέβαια αυτό να αναφέρεται ρητά στο βιβλίο. Τέτοιες ασκήσεις είναι π.χ. από το βιβλίο Γεωμετρίας Α΄ Λυκείου, ασκήσεις εμπέδωσης 1,2 σελ. 139-140.

[5] Black-boxing: το φαινόμενο κατά το οποίο τα Μαθηματικά βρίσκονται συγκεκαλυμμένα μέσα σε εργαλεία ή διαδικασίες που υπάρχουν στο χώρο εργασίας (Williams & Wake, 2007).

(βλ. Artigue & Blomhøj, 2013). Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι αυτή η δραστηριότητα χρησιμοποιεί ένα ιδιαίτερο στοιχείο: οι μαθητές έχουν αναλάβει έναν ρόλο[6] ειδικού, του σεισμολόγου. Σύμφωνα με την έρευνα στο θέατρο στην εκπαίδευση, η ανάθεση ρόλων και η βιωματική προσέγγιση μιας κατάστασης εφοδιάζουν τους μαθητές με στόχο, ο οποίος είναι κινητήρια δύναμη και πηγή ενθουσιασμού (βλ. Gerofsky, 2006). Η ανάθεση του ρόλου του σεισμολόγου ως θεατρική τεχνική ονομάζεται ο 'μανδύας του ειδικού' (βλ. Λενακάκης, 2013).

3. Ανάλυση της Παρέμβασης

Θεωρητικό Πλαίσιο: Οι απαντήσεις στο ερευνητικό ερώτημά μας, που αφορά στην κατασκευή των μαθηματικών νοημάτων για την έννοια του γ.τ. μέσα από την έννοια του κύκλου, από τη πλευρά των μαθητών, δίνονται μέσα από τα λεγόμενα των μαθητών που αναλύθηκαν σύμφωνα με το R-B-C μοντέλο που περιγράφει ο Dreyfus (2012):

«*Ένα κεντρικό στοιχείο της αφαίρεσης εντός πλαισίου (Abstraction in context) είναι ένα θεωρητικό – μεθοδολογικό μοντέλο σύμφωνα με το οποίο αναλύεται και περιγράφεται η ανάδυση μιας νέας [νοητικής] κατασκευής, μέσα από τρεις παρατηρήσιμες δράσεις: Αναγνώριση (Recognizing ή R), Οικοδόμηση-με (Building-with ή B) και Κατασκευή (Constructing ή C). Η Αναγνώριση αφορά τη διαδικασία κατά την οποία ο μαθητής αντιλαμβάνεται ότι μια προηγούμενη γνωστική κατασκευή είναι σχετική με την κατάσταση την οποία καλείται να αντιμετωπίσει. Η Οικοδόμηση-με περιλαμβάνει τον συνδυασμό τέτοιων προηγούμενων γνωστικών κατασκευών, με στόχο την επίτευξη ενός τοπικού στόχου, όπως είναι η εφαρμογή μιας στρατηγικής, η αιτιολόγηση ή η λύση ενός προβλήματος. Το μοντέλο προτείνει την Κατασκευή ως την κεντρική επιστημική δράση της μαθηματικής αφαίρεσης. Η Κατασκευή αφορά στη συλλογή και την ένταξη προηγούμενων κατασκευών μέσω της Κάθετης Μαθηματικοποίησης[7] προκειμένου να δημιουργηθεί μια νέα κατασκευή. Αναφέρεται στην πρώτη φορά κατά την οποία η νέα κατασκευή χρησιμοποιείται από τον μαθητή… Το μοντέλο R-B-C αποτελεί τον θεωρητικό και μικρο-αναλυτικό φακό μέσω του οποίου παρατηρούμε και αναλύουμε τη δυναμική της αφαίρεσης εντός πλαισίου.*»

(Dreyfus, 2012, σελ. 3-4).

[6] Η έννοια του ρόλου και η ασφάλεια που παρέχεται στο παιχνίδι εξασφαλίζει το όχημα, το μέσο εξόρυξης του ψυχικού αποθέματος (Λενακάκης 2013).

[7] Κάθετη Μαθηματικοποίηση: η διαδικασία κατά την οποία ο μαθητής κινείται εντός του κόσμου των Μαθηματικών (π.χ. πράξεις για επίλυση εξίσωσης) σε αντίθεση με την Οριζόντια Μαθηματικοποίηση, η οποία αφορά την κίνηση από τον πραγματικό κόσμο στον κόσμο των Μαθηματικών (π.χ. μεταφράζω ένα λεκτικό καθημερινό πρόβλημα σε μαθηματικές εκφράσεις-σύμβολα). Πρβλ. Freudenthal, 1991.

Οι ερευνητές έχουν κωδικοποιηθεί ως Ε1 και Ε2 ενώ οι μαθητές ως Μ1 και Μ2.

Πώς οι μαθητές οικοδόμησαν τα μαθηματικά νοήματα για την έννοια του γ.τ. μέσα από την έννοια του κύκλου: Αρχικά, στην ερώτηση 'τι είναι γ.τ.;', ο Μ1 απάντησε ότι δεν ξέρει. Στην ίδια ερώτηση, ο Μ2 είπε πως γ.τ. είναι 'είναι ο τόπος/χώρος στον οποίο μπορούμε να δημιουργήσουμε γεωμετρικά σχήματα, ή σε αυτόν τον τόπο όπου υπάρχουν ήδη γεωμετρικά σχήματα'. Επίσης, στη γραπτή ερώτηση 'τι είναι κύκλος', ο Μ2 απάντησε ότι 'είναι το σύνολο των σημείων που ισαπέχουν από ένα μοναδικό σημείο'. Συνδυάζοντας όμως τις απαντήσεις που έδωσε ο Μ2 για τον γ.τ. και για τον κύκλο, φαίνεται ότι δεν συνδέει αυτές τις έννοιες μεταξύ τους.

Ας προχωρήσουμε τώρα προς το μέσο της παρέμβασης: στο σημείο όπου οι μαθητές έχουν τελειώσει με τη δραστηριότητα που παρουσιάστηκε προηγουμένως, ο Ε2 ζητά από τους μαθητές να συνδέσουν την έννοια του κύκλου με την έννοια του γ.τ. και πάνω σε αυτό ο Μ2 απαντά ότι 'κύκλος είναι το σύνολο των σημείων που έχουν μια ιδιότητα μεταξύ τους'. Εδώ, ο Μ2 αναγνωρίζει (R) μια προηγούμενη κατασκευή (αυτής του κύκλου) ως σχετική με την κατάσταση. Αμέσως μετά η Ε1 επισημαίνει ότι ο γ.τ. δεν συνδέεται απαραίτητα μόνο με την έννοια του κύκλου. Έπειτα ο Ε2 ρωτά αν οι μαθητές μπορούν να συνδέσουν την έννοια του γ.τ. με κάποιο άλλο σχήμα (όχι κύκλο) και ο Μ2 απαντά 'Μεσοκάθετος'. Στο σημείο αυτό, ο Μ2 συνδυάζει τις προηγούμενες γνώσεις του περί μεσοκαθέτου προκειμένου να επιτεύξει τον τοπικό στόχο της απάντησης στην ερώτηση Επομένως, στο σημείο αυτό, θεωρούμε ότι συμβαίνει Οικοδόμηση (B). Κατόπιν ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος.

279.	Ε2	Ωραία, σύνδεσέ μου το τώρα, Σπύρο, γ.τ. από το ένα χέρι και αυτά τα σημεία που είπαμε, που έχουν την ιδιότητα να απέχουν το ίδιο [αναφέρεται στην έννοια της μεσοκαθέτου]. Μπορείς να μου φτιάξεις μία πρόταση με αυτά μέσα;	
280.	Μ1	Νομίζω πως ο γ.τ., αν πάμε σε αυτό το ευθύγραμμο τμήμα, είναι όλα τα σημεία που συνδέουν αυτό το ευθύγραμμο τμήμα.	Recognizing για Μ1

		…	
284.	M1	Ναι, όταν ενωθούν αυτά [τα σημεία] κάνουν μία ευθεία	Building-with1 για M1
285.	E2	Και το κάθε σημείο της ευθείας…;	
286.	M1	Ισαπέχει.	
287.	E2	Άρα έχει αυτή την ιδιότητα. Προηγουμένως τι γινόταν [στον κύκλο];	
288.	M1	Κάθε σημείο του κύκλου ισαπείχε	Building-with2 για M1
		…	
295.	E1	Τώρα, εσύ μέχρι στιγμής πώς τον καταλαβαίνεις το γ.τ.;	
296.	M1	Νομίζω πως είναι ένας χώρος επάνω στον οποίο υπάρχει ένα σχήμα, αυτό πιο πολύ. Δηλαδή, παραδείγματος χάρη, άμα είναι μία ευθεία, τα σημεία που βρίσκονται επάνω σε αυτήν την ευθεία θεωρούνται ο γ.τ.	Constructing a PaCC (Partially Correct Construct)
		…	
302.	M2	Δηλαδή, λέμε ότι είναι σχήματα, εγώ αυτό είχα πει στην αρχή, γιατί τα σημεία που είναι σε αυτό το σχήμα έχουν κάποιες ιδιότητες, που είναι ίσως κοινές και έτσι σε αυτά τα σημεία το σύνολο των ιδιοτήτων αυτών των σημείων είναι ο γεωμετρικός τους τόπος…	Constructing για M2
303.	E2	Το σύνολο των σημείων.	
304.	M2	Το σύνολο των σημείων που έχουν αυτήν την ιδιότητα είναι ο γ.τ.	Τέλος Constructing για M2

Παρατηρούμε ότι στον στίχο 280 ο M1 αναγνωρίζει την προηγούμενη γνωστική κατασκευή της έννοιας της μεσοκαθέτου ως σχετική με την έννοια του γεωμετρικού τόπου. Επομένως θεωρούμε ότι συμβαίνει η επιστημική δράση R για τον M1. Στους στίχους 284 και 288, ο E2 οδηγεί τον M1 να συνδυάσει τις δύο προηγούμενες γνωστικές κατασκευές –αυτές του κύκλου και της μεσοκαθέτου- με την έννοια του γ.τ. Εδώ, θεωρούμε ότι λαμβάνει χώρα η επιστημική δράση B (και μάλιστα σε δύο φάσεις: B1 στον στ. 284 και B2 στον στ. 288). Στον στίχο 296 θεωρούμε ότι ξεκινά η επιστημική δράση C για τον M1, μιας και εντάσσει τα R και B1, B2 σε μια νέα δομή. Ωστόσο από τα λεγόμενά του φαίνεται ότι ο ορισμός της έννοιας του γ.τ. που έχει οικοδομήσει δεν είναι σωστή. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι πρόκειται μια μερικώς ορθή κατασκευή (Partially Correct Construct).

Αυτό που θεωρούμε εξαιρετικά ενδιαφέρον στην περίπτωση του M1 είναι ότι φαίνεται να έχει δημιουργήσει μια εικόνα έννοιας για τον γ.τ. που ‘τυγχάνει’ να είναι παρόμοια με αυτή του M2 στη φάση προετοιμασίας[8]. Εδώ ο M1 ισχυρίζεται ότι: «…είναι ένας χώρος επάνω στον οποίο υπάρχει ένα σχήμα…» Η ομοιότητα των δύο ορισμών είναι πολύ μεγάλη, γεγονός που εγείρει δύο ερωτήματα: «Ο M1 ‘αντιγράφει’ τον M2» ή «Αυτοί οι παρόμοιοι λανθασμένοι ορισμοί του γ.τ., σχετίζονται με την πρώτη αδρή οικοδόμηση της εικόνας της έννοιας του γ.τ. για τους μαθητές;» Στο πρώτο ερώτημα, απαντούμε αρνητικά, μιας και ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα στις απαντήσεις των δύο μαθητών είναι πολύς και πυκνός (δηλαδή μεσολαβούν πολλά στο ενδιάμεσο). Επομένως το δεύτερο ερώτημα αποτελεί ένα ερευνητικό ερώτημα για περαιτέρω επεξεργασία σε άλλη εργασία.

4. Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, μέσα από το διδακτικό πείραμα που διεξαγάγαμε διαπιστώσαμε ότι οι μαθητές κατασκεύασαν νοήματα για την έννοια του γ.τ. περνώντας μέσα από τις τρεις επιστημικές δράσεις του R-B-C μοντέλου. Το νέο ερευνητικό ερώτημα που προέκυψε παραμένει: μήπως οι παρόμοιοι λανθασμένοι ορισμοί που δίνουν οι δύο μαθητές στα αρχικά στάδια της εξέλιξης της έννοιας του γ.τ., αποτελούν μια αδρή-αρχική εικόνα της έννοιας του γ.τ. και για άλλους μαθητές στην Ελλάδα;

---

[8] Υπενθυμίζουμε ότι ο M2 είχε πει ότι γ.τ. είναι: «ο τόπος στον οποίο μπορούμε να δημιουργήσουμε γεωμετρικά σχήματα, ή σε αυτόν τον τόπο όπου υπάρχουν ήδη γεωμετρικά σχήματα».

5. Βιβλιογραφία

Artigue M., Blomhøj M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 45 pp. 797–810.

Arzarello F. (2002). A Cognitive analysis of Dragging Practices in Cabri Environments. *ZDM*, 34(3), pp. 66-72.

Dreyfus T. (2012). Constructing Abstract Mathematical Knowledge in Context, 12th International Congress on Mathematical Education, πηγή: http://www.icme12.org/upload/submission/1953_F.pdf, -ανακτήθηκε στις 01/06/2014-, pp. 1-18.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gerofsky S. (2006). Performance Time & Space, *Digital Mathematics Performance Symposium*, University of Western Ontario, πηγή: http://www.edu.uwo.ca/mathstory/pdf/GerofskyPaper.pdf, -ανακτήθηκε στις 13/07/2014-, pp. 1-11.

Jahn A. P. (2002). “Locus” and “Trace” in Cabri-Géomètre: Relationships Between Geometric and Functional Aspects in a Study of Transformations. *ZDM*, 34(3), pp. 78-84.

Λενακάκης Α. (2013). Η μορφοπαιδευτική αξία του παιχνιδιού και του θεάτρου στην εκπαίδευση, Στο: Γραμματάς, Θ. (επιμ.) (2013). *Το Θέατρο ως μορφοπαιδευτικό αγαθό και καλλιτεχνική έκφραση στην Εκπαίδευση και την Κοινωνία*. Διδακτικό Εγχειρίδιο στο πλαίσιο του Προγράμματος «Θαλής». Αθήνα: ΕΚΠΑ, σσ. 58-77.

Maass K., Arigue M. (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: a synthesis. *ZDM Mathematics Education*, 45, pp. 779–795.

Molina M., Castro E., Castro E. (2007). Teaching experiments within design research. *The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences*, 2(4), pp. 435-440.

Wake G. (2014). Making Sense of and with Mathematics: the Interface between Academic Mathematics and Mathematics in practice, *Educational Studies in Mathematics*, 86, pp. 271-290.

Williams J., Wake G. (2007). Black Boxes in Workplace Mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 64, pp. 317–343.