

**ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ Η/Υ ΣΤΗ
Β'ΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ:
ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΚΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ Γ'
ΛΥΚΕΙΟΥ**

Γιώργος Φεσάκης

Καθηγητής ΔΕ ΠΕ19, Υπ. Διδάκτορας Τ.Ε.Π.Α.Ε, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Γ. Γρίβα 23, Ρόδος, 85100
gfesakis@rhodes.aegean.gr

Αγγελική Δημητρακοπούλου

Επίκουρος Καθηγήτρια, Εργαστήριο Μαθησιακής Τεχνολογίας και Διδακτικής Μηχανικής,
Τ.Ε.Π.Α.Ε, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Λ. Δημοκρατίας 1, Ρόδος, 85100
adimitr@rhodes.aegean.gr

Φραγκίσκος Καλαβάσης

Καθηγητής, Εργαστήριο Μαθησιακής Τεχνολογίας και Διδακτικής Μηχανικής,
Τ.Ε.Π.Α.Ε Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Λ. Δημοκρατίας 1, Ρόδος, 85100
kalabas@rhodes.aegean.gr

Λέξεις-κλειδιά: Εκπαιδευτική Τεχνολογία, Μοντελοποίηση, Προσομοίωση, Πίνακες υπολογισμών, Πιθανότητες, Στατιστική.

Περίληψη: Η εργασία αυτή επιχειρεί να αναδείξει την επιστημολογική αξία των μοντέλων, το ρόλο των Η/Υ στη σύγχρονη επιστημονική μοντελοποίηση και τις δυνατότητες διδακτικής αξιοποίησής τους. Σημειώνεται η έλλειψη σαφούς ανάδειξης της έννοιας του μοντέλου στη διδασκαλία των θετικών επιστημών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα πιλοτικής έρευνας. Προτείνεται ένα γενικό πλαίσιο σχεδιασμού δραστηριοτήτων διδακτικής μοντελοποίησης, ενώ για την αποσαφήνιση του πλαισίου παρουσιάζεται παράδειγμα εφαρμογής του στην παραγωγή δραστηριότητας μοντελοποίησης στις πιθανότητες για μαθητές Γ' Λυκείου. Διατυπώνονται τέλος γενικές υποδείξεις για το σχεδιασμό ανάλογων δραστηριοτήτων και σε άλλα θεματικά πεδία, με χρήση απλών και ευρύτατα διαδεδομένων εργαλείων (λογιστικά φύλλα) στη σημερινή δευτεροβάθμια εκπαίδευση

Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία αρχικά, αναφέρεται συνοπτικά στην επιστημολογική αξία των μοντέλων και στη σχέση τους με τους H/Y. Κατόπιν, παρουσιάζονται απόψεις μαθητών για την έννοια του μοντέλου και υποστηρίζεται ότι η μοντελοποίηση δεν χρησιμοποιείται συνειδητά και συστηματικά στη διδασκαλία των επιστημών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στη συνέχεια παρουσιάζεται ένα πλαίσιο σχεδιασμού δραστηριοτήτων μοντελοποίησης με την χρήση H/Y που εφαρμόζεται και σε παράδειγμα δραστηριότητας για το μάθημα των πιθανοτήτων. Στο τέλος συνοψίζονται τα παραπάνω και διατυπώνονται συμπεράσματα.

Μοντέλα, μοντελοποίηση & επιστήμη

Η διατύπωση και προσομοίωση μοντέλων σε H/Y αποτελεί κοινή επιστημονική πρακτική στα πλαίσια της επίλυσης προβλημάτων [7, 8, 9, 10, 13, 15, 16, 21]. Αρκετά δημοφιλή παραδείγματα είναι τα μοντέλα πρόγνωσης του καιρού, τα μοντέλα για τη δομή της ύλης, τα μοντέλα του πλανητικού συστήματος, κλπ.

Η δημιουργία αναπαραστάσεων των φυσικών συστημάτων ώστε να διεξάγονται συμπεράσματα από την αναπαράσταση για το πραγματικό σύστημα έγινε υπόδειγμα για τις εμπειρικές επιστήμες κυρίως με την εργασία του Νεύτωνα για τη μηχανική των ουράνιων σωμάτων [10]. Ο Νεύτωνας περιέγραψε αφηρημένα το πλανητικό σύστημα χρησιμοποιώντας τη γλώσσα των μαθηματικών.

Η ικανότητα των επιστημόνων για την παραγωγή μοντέλων καθοριζόταν για μεγάλο χρονικό διάστημα από την υπολογισιμότητα των σχετικών μαθηματικών σχέσεων με μολύβι και χαρτί. Τα σύγχρονα υπολογιστικά συστήματα επιτρέπουν τη διατύπωση και προσομοίωση μοντέλων που απαιτούν πολυπληθείς, πολύπλοκους και ακριβείς υπολογισμούς διαφοροποιώντας έτσι το πεδίο. Επιπλέον, διατίθενται νέοι τύποι αναπαραστάσεων που ανοίγουν νέα πεδία εφαρμοσιμότητας των μοντέλων για προβλέψεις και ερμηνείες των φαινομένων του κόσμου.

Η μοντελοποίηση με H/Y έχει επιδράσει καταλυτικά στη σύγχρονη επιστήμη, χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η αποκάλυψη με την χρήση H/Y της χασοτικής φύσης του πλανητικού συστήματος καθιστώντας έτσι το Νευτωνικό μοντέλο εφαρμόσιμο για πεπερασμένα χρονικά διαστήματα [7].

Η έννοια του Μοντέλου

Άτυπα, 'Μοντέλο' είναι μια εξιδανίκευση και απλοποίηση ενός συστήματος του πραγματικού κόσμου που παράγεται με επιλεκτική αφαίρεση και πιθανά μπορεί να εμφανίσει συμπεριφορά ανάλογη με μέρος της συμπεριφοράς του αρχικού συστήματος.

Ένα μοντέλο μπορεί να παρέχει πληροφορίες για τη δομή και τη συμπεριφορά ενός συστήματος χωρίς να είναι απαραίτητη η αλληλεπίδραση με το ίδιο το σύστημα.

Στην εργασία αυτή θα χρησιμοποιούμε τον όρο μοντέλο με την παραπάνω έννοια και δε θα αναφερθούμε καθόλου στη θεωρητική έννοια των μαθηματικών μοντέλων της λογικής.

Κριτήρια αξιολόγησης μοντέλων

Για ένα σύστημα μπορούν να προταθούν πολλά διαφορετικά μοντέλα, τα οποία υπόκεινται σε τροποποιήσεις και βελτιώσεις. Τα μοντέλα αυτά αξιολογούνται με βάση την πιστότητα της προσομοίωσης της συμπεριφοράς και της δομής του αρχικού συστήματος στα πλαίσια της επίλυσης ενός προβλήματος. Αξιολογούμε τα μοντέλα με άλλα λόγια βάση:

α) *της ερμηνευτικής τους ισχύος*: Δυνατότητα απάντησης σε ερωτήσεις της μορφής: «**Υπό ποιες συνθήκες μπορεί το σύστημα να παράγει μια δεδομένη συμπεριφορά;**» π.χ. αν έχουμε ένα μοντέλο μιας γέφυρας που κατέρρευσε θα θέλαμε να ξέρουμε σε ποιες συνθήκες είναι δυνατόν να οφείλεται η καταστροφή και να έχουμε μια ερμηνεία του γεγονότος.

β) *της προβλεπτικής του ικανότητας*: Δυνατότητα απάντησης σε ερωτήσεις της μορφής: «**Τι θα γίνει αν...;**». Με τις ερωτήσεις αυτές θέτουμε τις τιμές παραμέτρων και ζητάμε να μάθουμε τη συμπεριφορά του συστήματος προβλέποντας έτσι το μέλλον. Μπορούμε επίσης να εκτιμήσουμε τα αποτελέσματα και τις επιδράσεις μιας ή περισσότερων παρεμβάσεων σε ένα σύστημα.

γ) *Του κόστους τους*: Ειδικότερα σήμερα που τα περισσότερα μοντέλα είναι λογισμικά το κόστος αναφέρεται στην υπολογιστική τους πολυπλοκότητα.

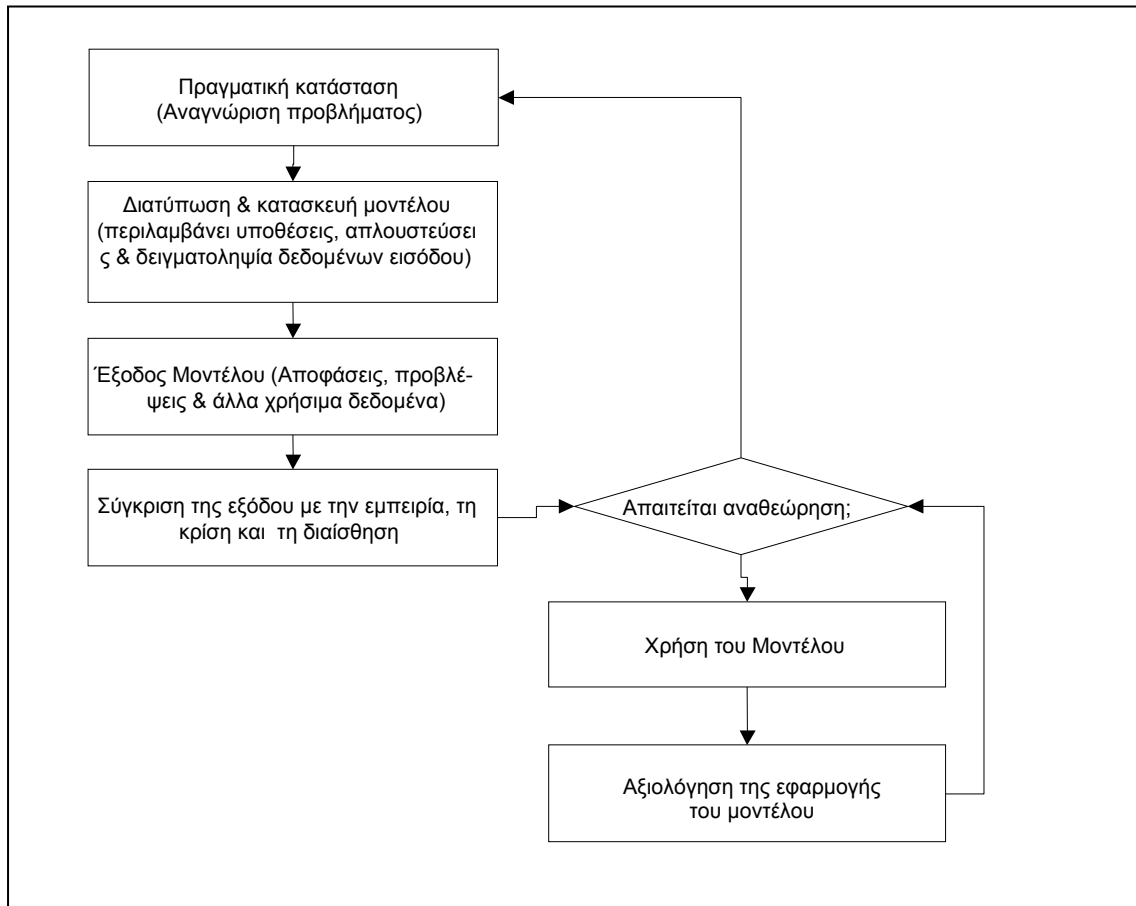
Μέσα κατασκευής μοντέλων

Μέσα κατασκευής και διατύπωσης των μοντέλων που μας απασχολούν αποτελούν τα διάφορα συστήματα αναπαράστασης. Τα μοντέλα μπορούν να είναι υλικά (π.χ οι μακέτες των κτιρίων, μηχανικά ανάλογα, κλπ), αφηρημένα-συμβολικά (π.χ μαθηματικά, αλγόριθμοι, γράφοι, πίνακες υπολογισμών, λογικά, κλπ) και υβριδικά (π.χ. ρομπότ, ενσωματωμένα σε μηχανισμούς λογισμικά συστήματα). Τα διάφορα επιστημονικά πεδία έχουν αναπτύξει συστήματα αναπαράστασης κατάλληλα για τον χώρο των προβλημάτων που αντιμετωπίζουν ενώ κοινό σύστημα αναπαράστασης μοντέλων αποτελεί η μαθηματική τους έκφραση. Τελευταία, όλο και περισσότερα λογισμικά περιβάλλοντα μοντελοποίησης χρησιμοποιούνται από διαφορετικές επιστημονικές κοινότητες. Ορισμένα μάλιστα από αυτά, όπως οι πίνακες υπολογισμών, χρησιμοποιούνται και για πρακτική επίλυση προβλημάτων από επαγγελματικές κοινότητες.

Η φύση της διαδικασίας μοντελοποίησης

Η διαδικασία της μοντελοποίησης είναι **επαναληπτική** και **προσαρμοστική**. Η προσαρμογή των μοντέλων προκύπτει από την αξιολόγηση τους όσο αφορά στην ερμηνευτική τους ισχύ και την προβλεπτική τους ικανότητα. Η διαδικασία της μοντελοποίησης είναι πολλές φορές διεπιστημονική. Η εξοικείωση με αυτή μπορεί να διευκολύνει την επικοινωνία μεταξύ

διαφορετικών επιστημονικών κλάδων και τη μεταφορά γνώσης από τον ένα στον άλλο. Σε γενικές γραμμές η διαδικασία μοντελοποίησης λαμβάνει τη μορφή του διαγράμματος στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1. Η διαδικασία της μοντελοποίησης

Η σχέση των Η/Υ με τη μοντελοποίηση

Οι Η/Υ κατέχουν κεντρική θέση στη διαδικασία της μοντελοποίησης. Τα μοντέλα σε Η/Υ πλεονεκτούν γιατί:

α) μπορούν να περιλαμβάνουν μεγάλο αριθμό αντικειμένων-μεταβλητών και να αφορούν μεγάλο αριθμό γεγονότων-μαθηματικών πράξεων μεγάλης ακρίβειας.

β) με τα λογισμικά μοντέλα οι επιστήμονες μπορούν να εργασθούν σε κλίμακες χρόνου πολύ διαφορετικές από τις συνήθεις ανθρώπινες και να πειραματισθούν με συστήματα που η φυσική αλληλεπίδραση και μελέτη τους δεν είναι εφικτή λόγω ειδικών συνθηκών ασφάλειας ή/και κόστους όπως π.χ τα ηφαίστεια οι σεισμοί, κλπ.

γ) καθιστούν εφαρμόσιμες νέες αναπαραστάσεις και επιτρέπουν τη δημιουργία αποδοτικών μοντέλων με την χρήση πολύπλοκων δομών δεδομένων και μοντέλων υπολογισμού (συστήματα

λογικής, συστήματα βασισμένα σε κανόνες, σημασιολογικά δίκτυα, συστήματα επίλυσης περιορισμών, νευρωνικά συστήματα, εξελικτικά συστήματα, εννοιολογικοί χάρτες, κ.α).

Διερεύνηση: Η μοντελοποίηση στην εκπαίδευση και στη διδασκαλία

Παρά την κεντρικότητα της μοντελοποίησης στην επιστημονική μεθοδολογία στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση η ισχύουσα πρακτική στη διδασκαλία των θετικών επιστημών δεν την καθιστά σαφή. Η μοντελοποίηση και η έννοια του μοντέλου δεν χρησιμοποιούνται συνειδητά στα σχολικά μαθήματα των θετικών επιστημών. Αντί για την έννοια μοντέλο χρησιμοποιούνται οι έννοιες νόμος και θεωρία, σαν αιώνιες αλήθειες που αποκαλύφθηκαν σε φωτισμένους επιστήμονες και δεν υπόκεινται σε αμφισβήτηση, περιορισμούς και βελτίωση. Οι νόμοι γνωστοποιούνται στους μαθητές οι οποίοι τους εφαρμόζουν άκριτα για την επίλυση ασκήσεων. Κυρίαρχο μέσο αναπαράστασης είναι η Γυμνασιακή Άλγεβρα. Αποτέλεσμα της τακτικής αυτής είναι και η μαθηματοποίηση των μαθημάτων της Φυσικής και της Χημείας [6, 9].

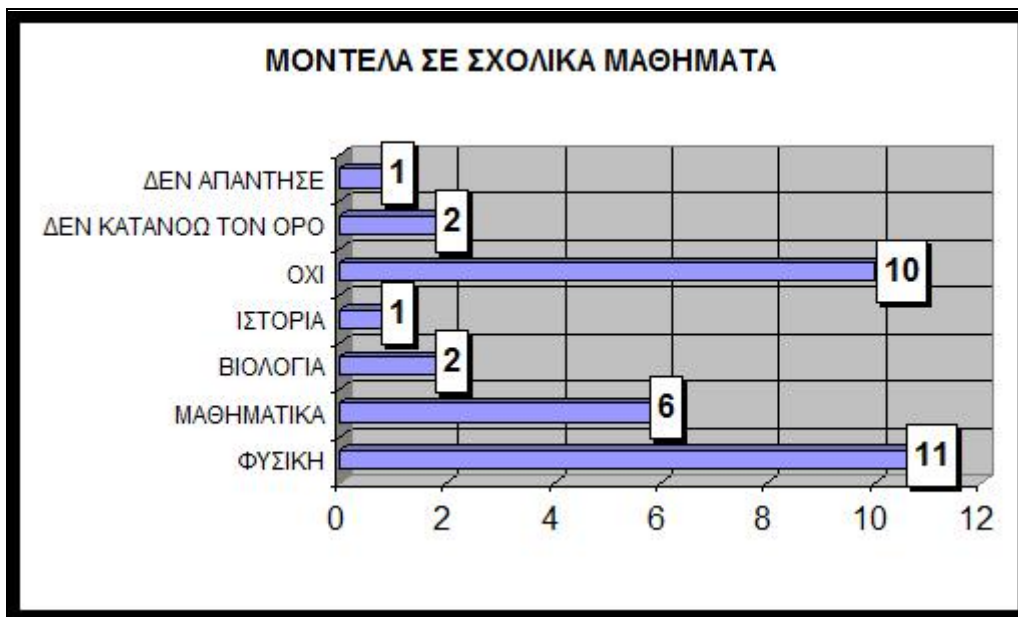
Για τη διερεύνηση της επίδρασης των παραπάνω στις απόψεις των μαθητών για τα μοντέλα και την επιστημολογική τους αξία πραγματοποιήθηκε πιλοτική έρευνα σε 29 μαθητές της Γ' τάξης του 4^{ου} Ενιαίου Λυκείου Ρόδου. Από την έρευνα επιλέγουμε να παρουσιάσουμε εδώ τέσσερις ανοικτές ερωτήσεις σε σχέση με τα μοντέλα. Οι ερωτήσεις και η σύνοψη των απαντήσεων έχουν ως εξής:

Ερώτηση 1. Έχετε συναντήσει μοντέλα σε κάποιο-κάποια από τα σχολικά μαθήματα μέχρι τώρα; Αν ναι σε ποια;

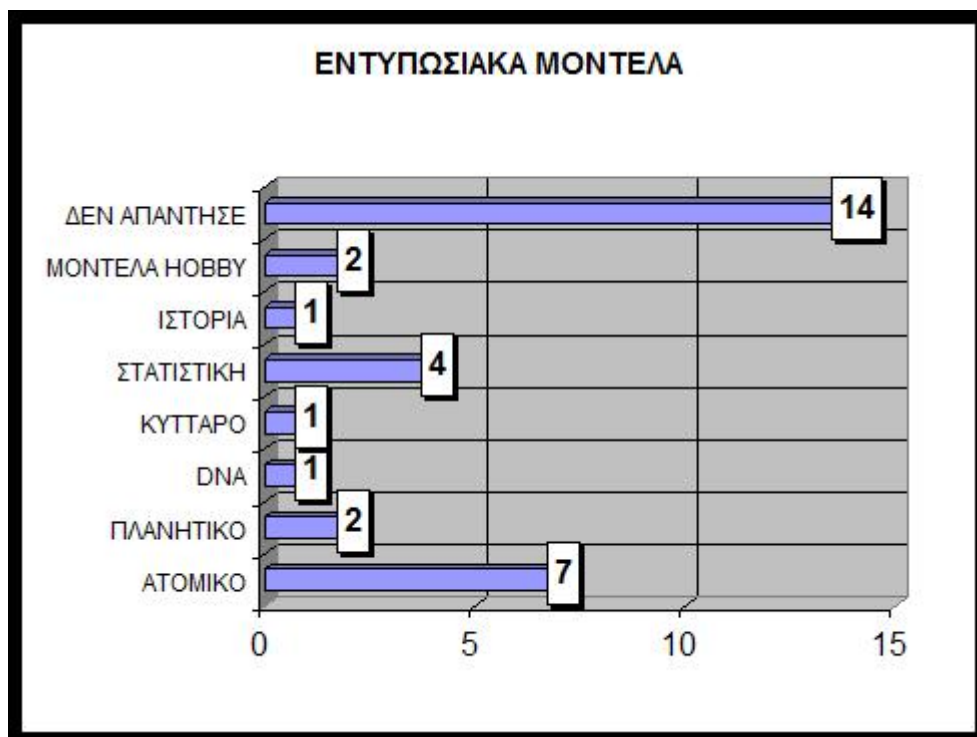
Από το Σχήμα 2 είναι φανερό ότι μεγάλο ποσοστό των μαθητών δεν έχει καλή σχέση με την έννοια του μοντέλου μέσα από τα σχετικά μαθήματα ενώ η Φυσική κυριαρχεί στην επαφή των μαθητών με τα μοντέλα. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η παρατήρηση ότι μόνο ένας μαθητής απάντησε αναφέροντας τρία μαθήματα στα οποία έχει δει μοντέλα και ακόμα ένας σε δύο μαθήματα.

Ερώτηση 2. Περιγράψτε ένα μοντέλο που σας έχει κάνει ιδιαίτερη εντύπωση.

Από τις απαντήσεις των μαθητών (Σχήμα 3) φαίνεται να είναι αρκετά δημοφιλές το ατομικό μοντέλο, ενώ το ποσοστό των μαθητών, που δε δίνει συγκεκριμένη απάντηση ενώ είχε δηλώσει ότι έχει συναντήσει μοντέλα στα σχολικά μαθήματα, είναι πιθανόν να γνωρίζει τον όρο μόνο λεξικογραφικά.



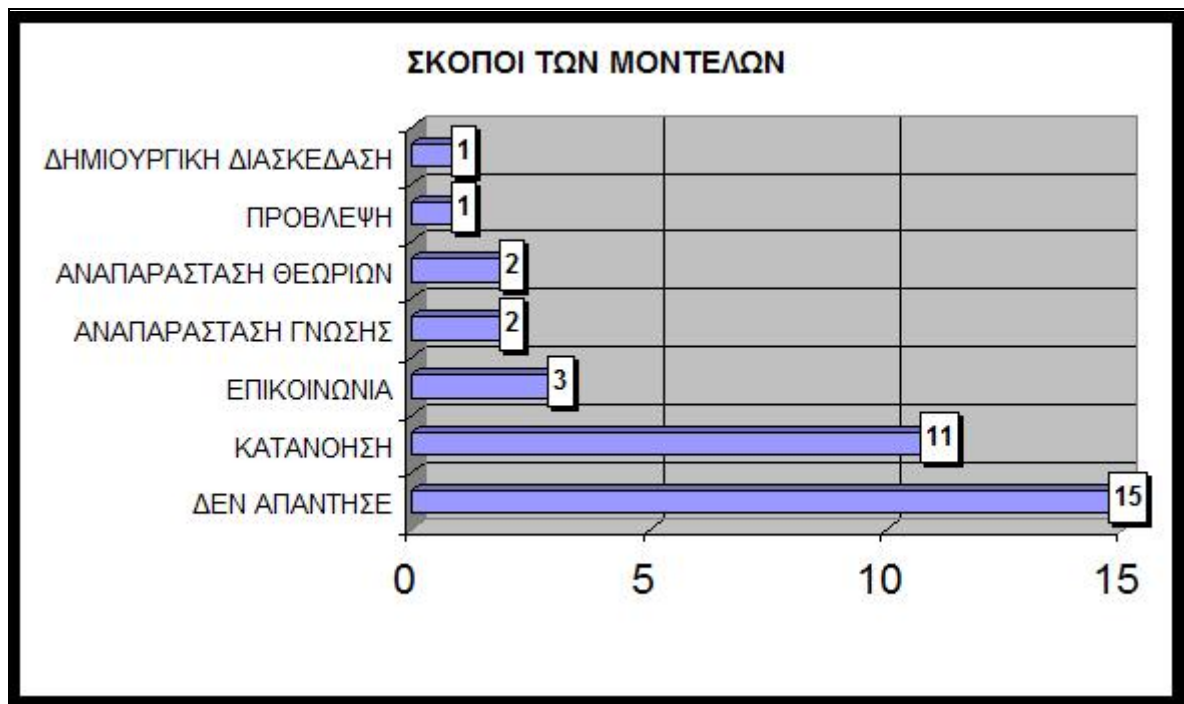
Σχήμα 2. Απαντήσεις στην ερώτηση 1



Σχήμα 3. Απαντήσεις στην ερώτηση 2

Ερώτηση 3. Ποιους σκοπούς εξυπηρετεί το μοντέλο που περιγράφετε και τα μοντέλα γενικότερα;

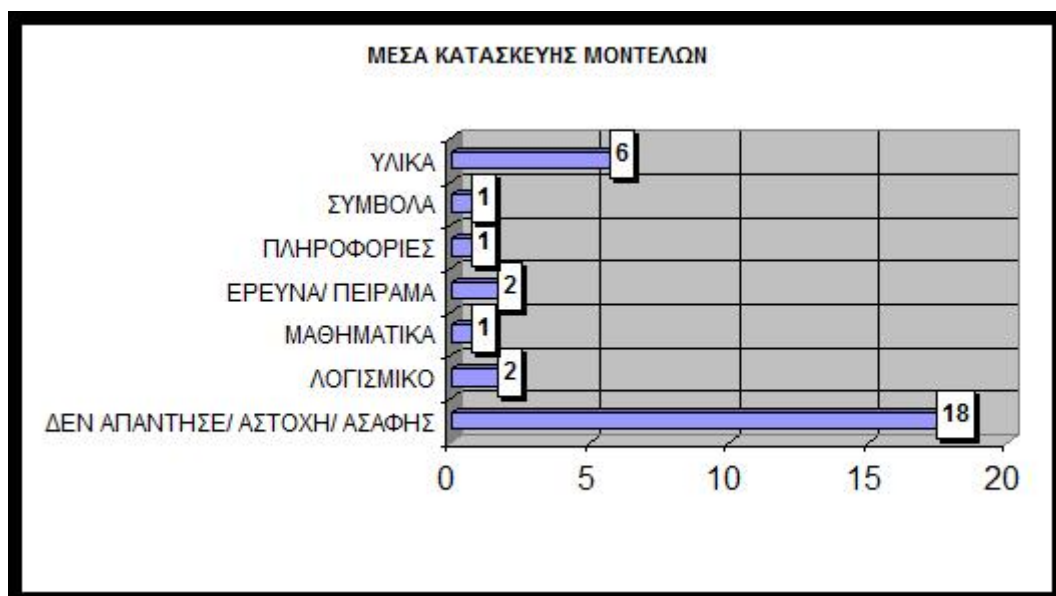
Οι περισσότεροι μαθητές συμφωνούν ότι τα μοντέλα σκοπεύουν στη διευκόλυνση της κατανόησης των συστημάτων που περιγράφουν (Σχήμα 4).



Σχήμα 4. Απαντήσεις στην ερώτηση 3

Ερώτηση 4. Με ποια μέσα μπορούν να κατασκευαστούν τα μοντέλα; Αναφέρετε μερικά παραδείγματα;

Απαντώντας στην ερώτηση αυτή (Σχήμα 5) κάποιοι μαθητές εστίασαν στην διαδικασία της μοντελοποίησης και όχι στα μέσα αναπαράστασης. Επιπλέον αρκετοί μαθητές αναφέρουν μόνο υλικές αναπαραστάσεις. Είναι φανερό ότι η πλειοψηφία των μαθητών δεν έχει καλή σχέση με τη διαδικασία της μοντελοποίησης και τα μέσα αναπαράστασης των μοντέλων.



Σχήμα 5. Απαντήσεις στην ερώτηση 4

Από τα προηγούμενα, γίνεται αισθητό ότι η μοντελοποίηση αν και βασική επιστημονική δραστηριότητα δε γίνεται συνειδητή από τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στο

βαθμό που θα ήταν επιθυμητό. Υπάρχει λοιπόν ένα κενό στην πρακτική εφαρμογή της διδακτικής των επιστημών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, η κάλυψη του οποίου μπορεί να αποτελέσει και όχημα για την αξιοποίηση των Η/Υ στη βαθμίδα αυτή. Με το ζήτημα της μοντελοποίησης και της εκπαίδευσης ασχολούνται και οι εργασίες [1,2,3,4,5,9,11,14,17,18,19]. Πώς όμως ο εκπαιδευτικός μπορεί να σχεδιάσει δραστηριότητες μοντελοποίησης για να εμπλουτίσει τη διδακτική του μεθοδολογία; Τα ερώτημα αυτό πραγματεύεται η επόμενη παράγραφος.

Η μοντελοποίηση με Η/Υ από διδακτική σκοπιά

Στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση γίνεται προσπάθεια να αξιοποιηθούν οι υπολογιστές περισσότερο ως δυναμικά εποπτικά μέσα και λιγότερο ως μέσα αναπαράστασης μοντέλων. Οι πολυπληθείς τίτλοι πολυμεσικών εφαρμογών για την εκπαίδευση αποτελούν ισχυρή ένδειξη για την παραπάνω θέση.

Ο εκπαιδευτικός που θέλει να σχεδιάσει δραστηριότητες μοντελοποίησης για τον εμπλουτισμό της διδακτικής του μεθοδολογίας θα πρέπει ως ένα βαθμό να είναι εξοικειωμένος με ένα τουλάχιστον περιβάλλον μοντελοποίησης κατάλληλο για το σχετικό γνωστικό αντικείμενο. Με την εμφάνιση των λογισμικών εργαλείων μοντελοποίησης και την ανάπτυξη της Πληροφορικής πληθαίνουν τα παραδείγματα περιβαλλόντων που χρησιμοποιούνται από διαφορετικά επιστημονικά πεδία [3]. Η λεπτομερής παρουσίαση των περιβαλλόντων μοντελοποίησης υπερβαίνει τους σκοπούς της παρούσας εργασίας. Στα επόμενα, θα αναφερόμαστε στους πίνακες υπολογισμών (γνωστά και ως λογιστικά φύλλα) επειδή είναι ευρύτατα διαθέσιμοι και υπάρχουν πολλοί εκπαιδευτικοί αλλά και μαθητές που είναι εξοικειωμένοι με τη χρήση τους.

Ανεξάρτητα από το περιβάλλον μοντελοποίησης που θα επιλεγεί ο σχεδιαστής δραστηριοτήτων μοντελοποίησης, είναι χρήσιμο να έχει υπόψη του τα ακόλουθα:

Τρόποι εμπλοκής των μαθητών σε δραστηριότητες μοντελοποίησης

Ένας μαθητής μπορεί να εμπλακεί σε δραστηριότητες μοντελοποίησης με δύο τρόπους:

1. Κατασκευάζοντας μοντέλα
2. Διερευνώντας και εξετάζοντας μοντέλα κατασκευασμένα από άλλους

Κατασκευάζοντας μοντέλα ο μαθητής εξωτερικεύει τις σκέψεις του και επιπλέον μπορεί να τις υποβάλει σε δοκιμασία ώστε να ελέγξει την πληρότητα και την ορθότητα τους. Διορθώνοντας και βελτιώνοντας ένα μοντέλο ο μαθητής βελτιώνει τα νοητικά γνωστικά του σχήματα.

Εξετάζοντας έτοιμα μοντέλα ο μαθητής έρχεται σε επαφή με τις ιδέες του κατασκευαστή τους. Μπορεί έτσι να συγκρίνει τα γνωστικά του σχήματα με αυτά που εκφράζονται μέσω του μοντέλου και να βελτιώσει ή να ασκήσει κριτική στο υπό μελέτη μοντέλο.

Είναι προφανές ότι η κατασκευή μοντέλων είναι ανώτερη πνευματική δραστηριότητα από τον έλεγχο και την προσομοίωση υπάρχοντων χωρίς αυτό να σημαίνει ότι η δεύτερη δεν έχει διδακτική και μαθησιακή αξία.

Χαρακτηριστικά προβλημάτων που προσφέρονται για σχεδιασμό δραστηριοτήτων μοντελοποίησης με Η/Υ

Δραστηριότητες μοντελοποίησης που αξιοποιούν τον Η/Υ μπορούν να στηριχθούν σε προβλήματα για τα οποία:

1. υπάρχουν μαθηματικά μοντέλα γνωστά στους μαθητές που απαιτούν μεγάλο όγκο υπολογισμών για την πρακτική τους εφαρμογή.
2. οι μαθητές έχουν παραστάσεις και αρχίζουν να έχουν διαισθητικά μοντέλα, δεν τα διδάσκονται λόγω των αναπαραστάσεων που απαιτούνται (π.χ διαφορικός λογισμός) αλλά υπάρχει προσιτή υπολογιστική αναπαράσταση.

Οι διαπιστώσεις αυτές μας οδηγούν στην ανίχνευση των προβλημάτων που προσφέρονται για τη μοντελοποίηση σε Η/Υ.

Πειραματική εφαρμογή: Δραστηριότητες μοντελοποίησης στο μάθημα των πιθανοτήτων

Στο σημείο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω διαπιστώσεις για να σχεδιάσουμε μια ολοκληρωμένη δραστηριότητα μοντελοποίησης για το μάθημα των πιθανοτήτων της Γ' τάξης του Ενιαίου Λυκείου. Η δραστηριότητα αφορά διαδικαστικό μοντέλο σε πίνακα υπολογισμών (απαιτεί λογισμικό τύπου MS Excel, Lotus 123, κλπ). Η αναπαράσταση του πίνακα υπολογισμών επιλέγεται επειδή είναι ευρύτατα γνωστή και διαθέσιμη στον εκπαιδευτικό κόσμο. Είναι δηλαδή ένα σημείο εύκολης και γρήγορης εισόδου στον κόσμο της διδακτικής μοντελοποίησης.

Μια δραστηριότητα στον τομέα αυτό μπορεί να αξιοποιεί τη δυνατότητα που έχουν οι υπολογιστές να επαναλαμβάνουν ακούραστα τις ίδιες ενέργειες. Πολλά προγράμματα σπουδών για πιθανότητες προβλέπουν για τους μαθητές τη διεξαγωγή πειραμάτων τύχης χρησιμοποιώντας απλά υλικά όπως κέρματα και ζάρια [19]. Τα πειράματα εγκαταλείπονται γρήγορα όμως επειδή είναι χρονοβόρα και κουραστικά. Σύγχρονα υπολογιστικά εργαλεία, που είναι ευρύτατα διαθέσιμα, μπορούν να υποκαταστήσουν τα ζάρια μετά τα πρώτα στάδια.

Προσπάθειες για διδασκαλία πιθανοτήτων με μοντελοποίηση μπορεί ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης να αναζητήσει και στα [11] και [18].

Το πρόβλημα. Ποια η πιθανότητα μια οικογένεια με τέσσερα παιδιά να έχει περισσότερα αγόρια από κορίτσια;

Το πρόβλημα αυτό προσφέρεται για εισαγωγική δραστηριότητα στη μοντελοποίηση, μιας και μπορεί να επιλυθεί με τις υπάρχουσες θεωρητικές γνώσεις των μαθητών και κατά συνέπεια θα

έχουν τη δυνατότητα να ελέγξουν την αξιοπιστία της μοντελοποίησης. Επιπρόσθετα, προτείνουμε να ξεκινήσουν οι μαθητές με την προσομοίωση με φυσικά μέσα (ρίψη κέρματος), κάτι που θα συμβάλλει ώστε να μη γίνει σύγχυση της έννοιας του μοντέλου με τη λογισμική του αναπαράσταση. Για το πρόβλημα αυτό παρατίθεται σχέδιο υλοποίησης στο Πλαίσιο 1 που ακολουθεί. Για να εφαρμοστεί η προτεινόμενη δραστηριότητα, θα πρέπει οι μαθητές να εξοικειωθούν με το πρόγραμμα επεξεργασίας των πινάκων υπολογισμών. Αυτό μπορεί να γίνει σε συνεργασία με κάποιο από τα μαθήματα επιλογής όπως για παράδειγμα το «Εφαρμογές Η/Υ» που διδάσκεται στη Γ' Λυκείου. Ένας πίνακας υπολογισμών που αναπαριστά ένα μοντέλο για το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να είναι και ο επόμενος (Εικόνα 1).

| ΥΠΟΜΝΗΜΑ: | | 1=ΑΓΟΡΙ | 0=ΚΟΡΙΤΣΙ | | | 1=ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ | |
|-----------------|----|---------|-----------|----|--------------------|---------------|--|
| ΠΑΙΔΙΑ | | | | | | | |
| A/A ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑΣ | 1ο | 2ο | 3ο | 4ο | ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ ΑΓΟΡΙΑ | P | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0,3548387 | |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 0 | | | |
| 4 | | 1 | 1 | 0 | | | |
| 5 | | 0 | 0 | 0 | | | |
| 6 | | 1 | 1 | 1 | | | |
| 7 | | 1 | 1 | 1 | | | |
| 8 | | 1 | 0 | 1 | | | |
| 9 | | 1 | 0 | 1 | | | |
| 10 | | 0 | 0 | 0 | | | |
| 11 | | 1 | 1 | 1 | | | |
| 12 | | 1 | 0 | 1 | | | |
| 13 | | 1 | 0 | 1 | | | |
| 14 | | 0 | 0 | 0 | | | |
| 15 | | 0 | 1 | 1 | | | |
| 16 | | 1 | 1 | 1 | | | |
| 17 | | 1 | 1 | 0 | | | |
| 18 | | 1 | 0 | 0 | | | |
| 19 | | 0 | 1 | 1 | | | |
| 20 | | 1 | 0 | 1 | | | |

Callout 1: `=IF(RAND()>0,5;0;1)`

Callout 2: `=IF(SUM(B5:E5)>2;1;0)`

Callout 3: `=SUM(F5:F35)/31`

Εικόνα 1. Στοχαστικό μοντέλο σε πίνακα υπολογισμών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1: ΣΧΕΔΙΟ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΤΙΤΛΟΣ: “ΑΝΔΡΟΚΡΑΤΟΥΜΕΝΕΣ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ ΜΕ ΤΕΣΣΕΡΑ ΠΑΙΔΙΑ ”

ΣΚΟΠΟΣ:

Οι βασικοί στόχοι της δραστηριότητας είναι:

1. Εισαγωγή και εξοικείωση με την μοντελοποίηση στοχαστικών συστημάτων Εντοπισμός των τυχαίων μεταβλητών, καθορισμός του μηχανισμού παραγωγής δειγμάτων, αναπαράσταση των ενδεχομένων, ορισμός της διαδικασίας αναγνώρισης των θετικών ενδεχομένων, υπολογισμός της εμπειρικής πιθανότητας.
2. Ανάπτυξη μοντέλων με μολύβι και χαρτί. Προσομοίωση με παραγωγή τυχαίων δειγμάτων με την βοήθεια υλικών (κέρμα, ζάρι κλπ).
3. Μεταφορά των χειροκίνητων μοντέλων σε λογισμική αναπαράσταση (φύλλο υπολογισμού στην περίπτωση αυτή) εξοικείωση με την λογισμική αναπαράσταση.
4. Έλεγχος θεωρητικών αποτελεσμάτων και/ή αξιοπιστίας του μοντέλου με προσομοίωση και έλεγχο της σχέσης της εμπειρικής πιθανότητας με τη θεωρητική. (Υλοποίηση του μηχανισμού ανατροφοδότησης).
5. Έλεγχος της σύγκλισης της εμπειρικής πιθανότητας στη θεωρητική.
6. Εμπειρική επαφή με την μεταβλητότητα των δειγμάτων.

ΥΛΙΚΑ/ΜΕΣΑ/ΧΡΟΝΟΣ – ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Ένα κέρμα για κάθε μαθητή, Διαφανοσκόπιο, Η/Υ με λογισμικό επεξεργασίας πίνακα υπολογισμών (π.χ MS Excel), Ο απαιτούμενος χρόνος της δραστηριότητας είναι 2x45min.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην πρώτη δραστηριότητα θα υπολογισθεί η πιθανότητα μια οικογένεια με τέσσερα παιδιά να έχει περισσότερα αγόρια από κορίτσια. Ο υπολογισμός της θεωρητικής πιθανότητας είναι στα πλαίσια της ύλης και των δυνατοτήτων των μαθητών της Γ τάξης του Ενιαίου Λυκείου. Το πρόβλημα είναι σχετικά απλό για να δοθεί περισσότερη προσοχή στη διαδικασία της μοντελοποίησης. Αρχικά θα γίνει μοντελοποίηση με υλικά στα οποία τα παιδιά έχουν εμπειρία (κέρμα, μολύβι και χαρτί) και κατόπιν θα χρησιμοποιηθεί το φύλλο υπολογισμών. Με τον τρόπο αυτό θα διευκολυνθεί η ομαλή αναγωγή της εμπειρίας της προσομοίωσης τυχαίας διαδικασίας στο νέο και πιθανά άγνωστο λογισμικό μέσο.

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

B1. Τα παιδιά χωρίζονται σε ομάδες 4-5 ατόμων. Τους διανέμεται ο φάκελος μαθητή και ο φάκελος ομάδας της δραστηριότητας.

B2. Γίνεται μια μικρή συζήτηση για τη σύνθεση των οικογενειών των μαθητών και ιδιαίτερα των τυχόν πολυμελών. Ο καθηγητής θα ρωτήσει ποια πιστεύουν οι μαθητές ότι είναι η πιθανότητα να γεννηθεί κορίτσι ή αγόρι. Κατόπιν θα ρωτήσει και θα καταγράψει μερικές συνθέσεις οικογενειών των μαθητών χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση $A=Aγόρι$, $K=Κορίτσι$ και τη σύμβαση ότι η θέση του συμβόλου δηλώνει τη σειρά γέννησης. π.χ μια οικογένεια με πρώτο παιδί αγόρι και τα επόμενα 2 κορίτσια θα καταγραφεί ως AKK . Ο καθηγητής θέτει το πρόβλημα:

«Ποια η πιθανότητα οικογένεια με 4 παιδιά να έχει περισσότερα αγόρια από κορίτσια;»

Ενημερώνει τους μαθητές ότι θα υπολογίσουν τη θεωρητική πιθανότητα ενώ κατόπιν θα προσπαθήσουν να ελέγξουμε πειραματικά το αποτέλεσμα.

B3. Οι μαθητές καλούνται να χρησιμοποιήσουν χαρτί από το φάκελο μαθητή για να υπολογίσει κάθε ένας χωριστά την πιθανότητα του προβλήματος και κατόπιν να συζητήσουν με τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας τους ώστε να καταλήξουν σε κάποια κοινή λύση. Η λύση του κάθε μαθητή και η τελική λύση κάθε ομάδας καταγράφεται στους φακέλους. Η σωστή λύση δε παρουσιάζεται ακόμα στους μαθητές..

B4. Ρωτάμε τους μαθητές για τις λύσεις που έχουν δώσει οι ομάδες και καταγράφουμε στον πίνακα τις απαντήσεις κατά ομάδα. Ζητάμε από τους εκπροσώπους των ομάδων να σχολιάσουν σύντομα το σκεπτικό τους, ιδιαίτερα αυτούς που έδωσαν διαφορετικές απαντήσεις (αν υπάρχουν). Προτείνουμε στα παιδιά να προσπαθήσουμε να παράγουμε πειραματικά εκτίμηση για την σωστή απάντηση χρησιμοποιώντας από το βιβλίο τους την γνωστή οριακή σχέση της εμπειρικής πιθανότητας με τη θεωρητική. Συζητάμε ότι για να γίνει κάτι τέτοιο στην πραγματικότητα θα πρέπει να κάνουμε μια μικρή απογραφή των οικογενειών με τέσσερα παιδιά. Αντί για το πραγματικό πείραμα προτείνεται η ιδεατή παραγωγή δειγμάτων με τη ρίψη κέρματος. Το σημείο αυτό είναι λεπτό και θα πρέπει να καταγραφούν οι αντιδράσεις και τα σχόλια των μαθητών όσον αφορά στην εγκυρότητα και στην πιστότητα μιας τέτοιας αναγωγής. Οι μαθητές θα πρέπει να ενθαρρυνθούν ώστε να διατυπώσουν τα σχόλια τους.

B5. Καταγράφονται οι ενδεχόμενες διαφωνίες και επιφυλάξεις των μαθητών για να εξετασθούν στη συνέχεια. Καλούνται τώρα οι μαθητές να συμπληρώσουν ένα φύλλο καταγραφής πειραματικών δεδομένων όπως στο επόμενο σχήμα:

| ΦΥΛΟ ΠΑΙΔΙΩΝ ΓΡΑΜΜΑΤΑ = ΑΓΟΡΙ ΚΕΦΑΛΗ=ΚΟΡΙΤΣΙ | | | | | Περισσότερα αγόρια από κορίτσια; (1=ΝΑΙ, 0=ΟΧΙ) |
|---|----------------|----------------|----------------|----------------|--|
| A/A | 1 ^ο | 2 ^ο | 3 ^ο | 4 ^ο | |
| 1 | A | A | A | K | 1 |
| 2 | K | A | A | K | 0 |
| | | | | | |
| ΣΥΝΟΛΟ: | | | | | |

Οι μαθητές ρίχνουν το κέρμα και συμπληρώνουν ένα πίνακα με μερικά δείγματα ο καθένας. Μετά την εκτέλεση του πειράματος υπολογίζουν την εμπειρική πιθανότητα που προκύπτει από τα πειράματά τους. Κατόπιν τα μέλη κάθε ομάδας συγχωνεύουν τα δείγματά τους και παράγουν μια ομαδική εμπειρική πιθανότητα. Ο καθηγητής συγκεντρώνει τις απαντήσεις των ομάδων σε κατάλληλη διαφάνεια και υπολογίζει τη συγκεντρωτική εμπειρική πιθανότητα.

Οι μαθητές καλούνται να σχολιάσουν τη διαδικασία και το αποτέλεσμα καθώς και τις διακυμάνσεις μεταξύ των εμπειρικών πιθανοτήτων των μελών των ομάδων η/και των ομάδων.

B6. Σχολιάζεται σύντομα το αποτέλεσμα σε σχέση με τα θεωρητικά αποτελέσματα των ομάδων. Ζητάμε από τους μαθητές να υπολογίσουν πόσα δείγματα πήραμε συνολικά και ποια είναι η σχέση του πλήθους των δειγμάτων με την ποιότητα του αποτελέσματος. Δεδομένου ότι οι μαθητές έχουν συμμετάσχει σε εισαγωγή στα φύλλα υπολογισμών τους ζητάμε να προτείνουν τρόπους ώστε να χρησιμοποιήσουμε το φύλλο υπολογισμών για τη διαδικασία που μόλις εκτελέσαμε. Καταγράφονται οι απόψεις, και με την βοήθεια του καθηγητή σχεδιάζεται σταδιακά στον πίνακα ένα φύλλο υπολογισμών για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Είναι σημαντικό στην εισαγωγική δραστηριότητα να πετύχουν όλες οι ομάδες την παραγωγή του μοντέλου στο φύλλο υπολογισμών. Οι μαθητές κατασκευάζουν το φύλλο υπολογισμών στον Η/Υ και το χρησιμοποιούν για την παραγωγή ικανοποιητικού αριθμού δειγμάτων (σταδιακά αυξανόμενου) και εκτιμήσεων. Επισημαίνεται:

1. η σχέση του μεγέθους του δείγματος με τη σύγκλιση της εμπειρικής πιθανότητας (όσο πιο μεγάλο είναι το δείγμα τόσο πιο σταθερή φαίνεται να είναι από πείραμα σε πείραμα η εμπειρική πιθανότητα)
2. Η μεταβλητότητα από πείραμα σε πείραμα της εμπειρικής πιθανότητας σε σχέση με τη σταθερότητα της θεωρητικής πιθανότητας.

B7. Οι ομάδες καταγράφουν την εμπειρική πιθανότητα που υπολόγισαν με τη βοήθεια του Η/Υ και καλούνται να τη συγκρίνουν με τη θεωρητική και την προηγούμενη εμπειρική που υπολόγισαν. Καλούμε τους εκπροσώπους μερικών ομάδων να εκφράσουν τις σκέψεις και τα σχόλια τους. Ιδιαίτερα ενδιαφερόμαστε για τις απόψεις των ομάδων που τυχάνει να έχουν μεγάλες αποκλίσεις ή δεν είχαν υπολογίσει σωστά το θεωρητικό αποτέλεσμα. Στο τέλος ο καθηγητής της τάξης που έχει επισημάνει ομάδες με σωστή λύση καλεί κάποιο μαθητή να δώσει τη σωστή θεωρητική λύση ή την παρουσιάζει ο ίδιος.

B8. Γίνεται μια ανακεφαλαίωση της διαδικασίας και ζητάμε από τα παιδιά να σχολιάσουν την όλη εμπειρία παροτρύνοντας τους να σχολιάσουν τη χρησιμότητα, αλλά και την εγκυρότητα της διαδικασίας μοντελοποίησης και παράγοντες που τυχόν θα επηρέαζαν κάποιο από αυτά τα χαρακτηριστικά.

Πλαίσιο 1 . Σχέδιο υλοποίησης δραστηριότητας μοντελοποίησης

:

Το παράδειγμα που παρουσιάστηκε εδώ αφορά στην εφαρμογή της αρχής σχεδιασμού που εκμεταλλεύεται τη δυνατότητα των Η/Υ να ενισχύει γνωστά στους μαθητές μαθηματικά μοντέλα με την εκτέλεση μεγάλου όγκου μαθηματικών υπολογισμών. Στα πλαίσια πιλοτικής έρευνας

έχουν σχεδιαστεί και δοκιμαστεί σε πραγματικές συνθήκες άλλες τρεις δραστηριότητες για το μάθημα των πιθανοτήτων. Η εμπειρία της εφαρμογής κρίνεται θετική αλλά τα αποτελέσματα είναι ακόμα στο στάδιο της επεξεργασίας.

Δραστηριότητες μοντελοποίησης σε άλλα μαθήματα

A. Απειροστικός λογισμός

Εκτός από την αριθμητική προσομοίωση για τη διερεύνηση των συναρτήσεων και της έννοιας του ορίου, στην περίπτωση του απειροστικού λογισμού μπορούμε να παράγουμε πληθώρα δραστηριοτήτων στηριζόμενοι στη διακριτή προσέγγιση των διαφορικών εξισώσεων. Ο τομέας αυτός παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον αφού:

1. Δημιουργεί κατάλληλες παραστάσεις (εμπειρίες) για την καλύτερη αποδοχή της έννοιας του διαφορικού.
2. Η προσέγγιση των διαφορικών εξισώσεων με αριθμητικές μεθόδους είναι ευρύτατα εφαρμόσιμη μέθοδος στην επιστημονική πράξη. Υπάρχουν δε διαφορικές εξισώσεις που δεν έχει σταθεί ακόμα δυνατό να λυθούν με διαφορετικό τρόπο.
3. Επιτρέπει την εμπλοκή των μαθητών με εννοιολογικούς χώρους με τους οποίους λόγω του διαφορικού λογισμού έρχονται τυπικά σε επαφή πολύ καθυστερημένα και αφού έχουν δημιουργήσει διαισθητικά μοντέλα που μπορεί να είναι αρκετά σταθερά.

Περισσότερες λεπτομέρειες ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει στο [12]. Με βάση την διακριτοποίηση διαφορικών εξισώσεων μπορούν να σχεδιαστούν δραστηριότητες σε διεπιστημονικά θέματα όπως: Δυναμική πληθυσμών (οικολογικά μοντέλα), Χημική ισορροπία, Δίκτυα ροών (π.χ δικτύων ύδρευσης) κ.α

B. Φυσική

Παρόμοιες δραστηριότητες μοντελοποίησης μπορούν να σχεδιαστούν και στη Φυσική όπου θα μπορούσαμε, για παράδειγμα, να σχεδιάσουμε ένα πίνακα υπολογισμών για τη διερεύνηση των βολών. Εκμεταλλευόμενοι μάλιστα τις δυνατότητες παραγωγής γραφικών παραστάσεων που έχουν τα διάφορα λογισμικά επεξεργασίας πινάκων υπολογισμών μπορούμε να παράγουμε οικονομικά μεγάλο πλήθος σεναρίων αλλάζοντας παραμέτρους όπως η αρχική ταχύτητα και η γωνία βολής. Επιπλέον, μπορούμε να κάνουμε πιο ρεαλιστικά μοντέλα προσθέτοντας την επίδραση του αέρα, κλπ.

Γ. Διεπιστημονικά προβλήματα

Όπως έχει ήδη αναφερθεί παραπάνω, υπάρχει δυνατότητα για μοντελοποίηση σε θέματα διεπιστημονικά. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν χώροι όπως: Θεωρία γραφημάτων (προβλήματα συντομότερου δρόμου κλπ), Θεωρία ουρών (ρύθμιση φαναριών, καθορισμός απαιτούμενων ταμείων σε πολυκατάστημα, σχεδιασμός χώρου στάθμευσης κλπ), προσομοίωση διαδικασιών

παραγωγής fractals, εξέταση των αλγορίθμων των βασικών πράξεων και των μετατροπών αριθμητικών συστημάτων ειδικά με την αναπαράσταση των δικτύων Petri κ.α.

Σύνοψη - Συμπεράσματα

Στη σύγχρονη επιστημολογία η δραστηριότητα της μοντελοποίησης κατέχει κεντρική θέση. Τα λογισμικά περιβάλλοντα μοντελοποίησης έχουν γίνει βασικό εργαλείο έρευνας αλλά και διδασκαλίας στη τριτοβάθμια εκπαίδευση. Η δευτεροβάθμια εκπαίδευση στην Ελλάδα, δεν αξιοποιεί συνειδητά την έννοια του μοντέλου και της μοντελοποίησης στη διδασκαλία των θετικών επιστημών. Η ασαφής χρήση των μοντέλων αντικατοπτρίζεται στις απόψεις των μαθητών για τις παραπάνω έννοιες. Είναι δυνατό να σχεδιαστούν δραστηριότητες μοντελοποίησης για τα υπάρχοντα αναλυτικά προγράμματα, με την αξιοποίηση απλών και διαθέσιμων λογισμικών εργαλείων μοντελοποίησης που είναι προσιτά στην εκπαιδευτική κοινότητα. Οι μαθητές μπορούν συνεργατικά ή ατομικά να συμμετάσχουν σε δραστηριότητες μοντελοποίησης είτε κατασκευάζοντας μοντέλα είτε ελέγχοντας μοντέλα κατασκευασμένα από άλλους. Εμπλέκονται έτσι σε σημαντικές για αυτούς δραστηριότητες κατά τις οποίες η σχολική γνώση γίνεται λειτουργική. Με την χρήση των μοντέλων, οι μαθητές μπορούν να εξωτερικεύσουν με πλουσιότερους τρόπους τις ιδέες τους για τα γνωστικά αντικείμενα, να καταστήσουν ρητές και σαφείς τις υποθέσεις που συχνά κάνουν όταν αντιμετωπίζουν ένα πρόβλημα και να πάρουν ανατροφοδότηση για την ορθότητα των συλλογισμών τους αξιολογώντας τα μοντέλα με τα οποία αλληλεπιδρούν.

Οι Η/Υ χρησιμοποιούνται σήμερα στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση περισσότερο ως δυναμικά εποπτικά μέσα με αποτέλεσμα να εντάσσονται σε παραδοσιακές μεθόδους διδασκαλίας. Οι δραστηριότητες μοντελοποίησης αξιοποιούν τις τεχνολογίες της Πληροφορίας και των Επικοινωνιών ως επιστημολογικά εργαλεία. Οι μαθητές εμπλέκονται σε ατομικές ή συνεργατικές δραστηριότητες και χρησιμοποιούν τους Η/Υ για να εκφράσουν και να ελέγξουν τη σκέψη τους. Η εργασία αυτή μπορεί να συνεχισθεί με την παραπέρα διερεύνηση της διδακτικής αξιοποίησης τόσο των απλών περιβαλλόντων που επιτρέπουν μοντελοποίηση όσο και ειδικά σχεδιασμένων εκπαιδευτικών περιβαλλόντων μοντελοποίησης, καθώς και τη συστηματικοποίηση της διαδικασίας σχεδιασμού δραστηριοτήτων διδακτικής μοντελοποίησης.

Βιβλιογραφία

- [1]. **Cartier J. (2000)**. Assessment of explanatory models in genetics: Insights into Students' Conceptions of Scientific Models, *Research Report NCISLA*, <http://www.wcer.wisc.edu/ncisla>.
- [2]. **Cartier J. (2000)**. Using a modeling approach to explore scientific epistemology with high school biology students, *Research Report NCISLA*, <http://www.wcer.wisc.edu/ncisla>.
- [3]. **Dimitracopoulou A., Komis V., Apostolopoulos P. & Politis P. (1999)**. Design Principles of a new modelling environment for young students, supporting various types of reasoning and interdisciplinary approaches' *AI-ED99 Open Learning Environments*, Le Mans, 19-23 July 1999, France.
- [4]. **diSessa A. (1997)**. Open toolsets: New ends and new means in learning mathematics and science with computers. In E. Pehkonen (Ed.) *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol 1. Lahti, Finland, 47-62
- [5]. **diSessa A. A. (1997)**. Twenty reasons why you should use Boxer (instead of Logo). In M. Turcsanyi-Szabo (Ed.), *Learning & Exploring with Logo*, Proceedings of the Sixth European Logo Conference, Budapest Hungary, 7-27.
- [6]. **diSessa A. A. (1999)**. *Changing Mind. Computers, Learning, and Literacy*, to appear MIT Press
- [7]. **Ekerland I. (1996)**, *To Χάος*, Εκδόσεις Π. Τραυλός - Ε. Κωσταράκη
- [8]. **Eppen D. G., Gould J. F., Schmidt C. (1988)**. *Quantitative concepts for management*, Third Edition, Prentice Hall
- [9]. **Halloun I. (2000)**, Model-Laden Inquiry for Effective Physics Instruction, *Themes in Education*, Leader Books, Vol. 1, No 4.
- [10]. **Heylighen F. (1990)**. *Representation and Change. A Meta-representational Framework for the Foundations of Physical and Cognitive Science, Communications & Cognition*, Ghent, Belgium. Web edition (1999): <http://pcp.vub.ac.be/books/Rep&Change.pdf>
- [11]. **Konold Cl. (1995)**. Probability and statistics, *Journal of Statistics Education* Vol.3, No. 1
- [12]. **Kreith K. (1995)**, Απειροστικός λογισμός – ναι ή όχι;, *Ελληνικό Quantum*, Vol 2, No 1
- [13]. **Ljung L. (1987)**. *System Identification: Theory for the User*, Prentice Hall
- [14]. **Mellar H. Bliss J. Boohan R., Ogborn J., Tompsett C. (1994)**. *Learning with artificial worlds: computer based modeling in the curriculum*, The Farmer press
- [15]. **Quade S. E. (1989)**. *Analysis for Public Decisions*, Third Edition, Prentice Hall
- [16]. **R. J. Sciamanda (1997)**. *Πρελούδιο στη μελέτη της Φυσικής*, Ελληνική έκδοση Quantum, Τόμος 4, Τεύχος 1
- [17]. **Renate M., Kempf St. (1987)**. Teaching Object-Oriented programming with the KEE system, *OOPSLA '87 Proceedings*
- [18]. **Wilkeny, U. (1995)**. Making Sense of probability through paradox and programming: A case study in a connected mathematics framework, in "Kafai & Resnick (1996). *Constructionism in practice*", Lawrence Erlbaum Associates
- [19]. **Winter J. M., Carlson J. R. (2000)**. *Probability Simulations*, Key curriculum press
- [20]. **Κουνιάς Σ. & Μωυσιάδης Χ. (1985)**. *Πιθανότητες I. θεωρία & ασκήσεις*, Εκδόσεις Ζήτη Θεσσαλονίκη.
- [21]. **Χαραλαμπίδης Χ. Α. (1990)**. *Θεωρία πιθανοτήτων & εφαρμογές*, Εκδόσεις Συμμετρία