ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Πρακτική Άσκηση σε σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης

Ενότητα 6: Ρεαλιστικά μαθηματικά και μοντελοποίηση

Δέσποινα Πόταρη, Γιώργος Ψυχάρης

Σχολή Θετικών επιστημών

Τμήμα Μαθηματικό

Δραστηριότητες για την Α’-Β΄& Γ’ Λυκείου

1η Δραστηριότητα: ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Διάρκεια της δραστηριότητας: 2-3 διδακτικές ώρες

Τάξη: Α΄ Λυκείου

Γνωστικά αντικείμενα:
- Η έννοια της γραφικής παράστασης συνάρτησης
- Αντιστρόφως ανάλογα ποσά
- Ομοιότητα τριγώνων

Η κατάσταση προβλήματος:
Κατά τον πρώιμο αλλά και κατά τον ύστερο Μεσαίωνα, κυρίως δε κατά τη διάρκεια της Αναγέννησης, χρησιμοποιήθηκαν απλά εργαλεία μέτρησης ενός απομακρυσμένου αντικειμένου τα οποία αξιοποίησαν τις οπτικές μας ακτίνες και την οπτική γωνία. Ωστόσο, η πρώτη συστηματική προσπάθεια μέτρησης με απλό εργαλείο είναι καταγεγραμμένη στα *Οπτικά* του Ευκλείδη, το δε εργαλείο είναι ένας απλός καθρέπτης. Με ποιον όμως τρόπο ο χρήστης ενός τέτοιου εργαλείου μπορεί να κάνει μία μέτρηση; Ποια μαθηματικά τεκμηριώνουν την αξιοπιστία των μετρήσεων;
Αυτά είναι τα βασικά ερωτήματα με τα οποία θα εμπλακούν οι μαθητές, καθώς θα μελετούν στις δύο επόμενες δραστηριότητες τις προσομοιώσεις των εργαλείων.

Φύλλο εργασίας 1
Βρισκόσαστε μπροστά σε ένα κτήριο και στο έδαφος υπάρχει ένα μικρός καθρέφτης.

Προχωράτε μπρος πίσω, μέχρι να δείτε την κορυφή του κτηρίου στον καθρέφτη. Μπορείτε να υπολογίσετε το ύψος του κτηρίου;

Με τη δραστηριότητα αυτή θα διαπιστώσετε ότι δεν πρόκειται για μια ιδιαίτερα δύσκολη διαδικασία, αρκεί βέβαια να είναι γνωστές μερικές αποστάσεις, όπως η απόσταση του καθρέφτη από το κτήριο και η απόστασή μας από τον καθρέφτη.

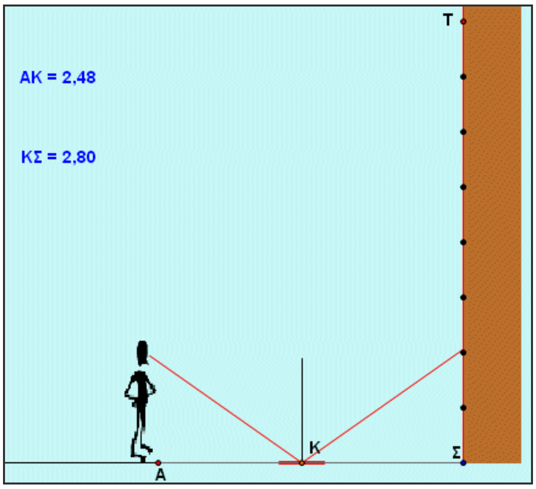
Ανοίξτε το αρχείο katoptro metrisis_1 του λογισμικού. Στην οθόνη προβάλλονται:

α) Ένας άνθρωπος που κοιτάζει στον καθρέφτη που βρίσκεται στο έδαφος. Ας υποθέσουμε ότι η οπτική του ακτίνα ξεκινά από τα μάτια του, ανακλάται στον καθρέφτη και καταλήγει σε κάποιο ύψος του κτηρίου. (Στη φύση η πορεία της φωτεινής ακτίνας είναι βέβαια αντίστροφη.)

β) Αν θέλουμε να μετακινήσουμε τον άνθρωπο, θα πρέπει σύρουμε το σημείο Α. Η οπτική ακτίνα ακολουθεί το βασικό νόμο της ανάκλασης, δηλαδή η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης. Η απόσταση ΑΚ του ανθρώπου από το κάτοπτρο Κ εμφανίζεται στην οθόνη.

γ) Αν θέλουμε να μετακινήσουμε το κάτοπτρο, θα πρέπει να σύρουμε το σημείο Κ.

δ) Η προσομοίωση της πρόσοψης ΣΤ του κτηρίου έχει μεταβλητό ύψος, το οποίο μπορούμε να μεταβάλλουμε σύροντας το σημείο Τ. Επιπλέον, είναι χωρισμένη σε ίσα τμήματα. Σύρετε τα σημεία Α και Τ, για να διαπιστώσετε πώς αλλάζουν τα μήκη των τμημάτων.



Ας ξεκινήσουμε τώρα τη μελέτη των μεγεθών που μεταβάλλονται.

1) Τοποθετήστε τον άνθρωπο σε μια μικρή απόσταση από το κάτοπτρο, π.χ. 1 μονάδα (αν στη θέση αυτή ο άνθρωπος δεν βλέπει το κτήριο στον καθρέφτη, τότε μετακινήστε και τον καθρέφτη). Αν διπλασιάσουμε την απόσταση του ανθρώπου από το κάτοπτρο, πώς θα μεταβληθεί το ύψος στο οποίο βλέπει ο άνθρωπος;

2) Τοποθετήστε τον άνθρωπο σε αρκετή απόσταση από τον καθρέφτη. Αν τον σύρετε στη μισή απόσταση, πώς θα μεταβληθεί το ύψος στο οποίο βλέπει ο άνθρωπος;

3) Επαναλάβετε τις παραπάνω ενέργειες, τριπλασιάζοντας την απόσταση ή μειώνοντάς τη στο 1/3 της αρχικής. Υπάρχει κάποιος κανόνας με τον οποίο φαίνεται να μεταβάλλονται τα δύο ποσά;

Οδηγίες και προτάσεις υλοποίησης (1η φάση)

Στη φάση αυτή η μαθητές, αφού εξοικειωθούν με το περιβάλλον και τη λειτουργία του λογισμικού, θα ερευνήσουν, με βάση τις πληροφορίες που τους παρέχονται στην οθόνη, τον τρόπο που συμμεταβάλλεται η απόσταση του ανθρώπου από το κάτοπτρο και το ύψος στο οποίο φτάνει η ανάκλαση της οπτικής του ακτίνας.

- Καταρχάς μπορούν να χρησιμοποιήσουν τη διαίρεση της πρόσοψης του κτηρίου σε ίσα μέρη, ώστε να διαπιστώνουν με απλό τρόπο αν το ύψος της ανακλώμενης ακτίνας πάνω στο κτήριο διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται ή υποδιπλασιάζεται, υποτριπλασιάζεται κ.λπ.

- Η τοποθέτηση του ανθρώπου και του κατόπτρου στην αρχή της δραστηριότητας μπορεί να γίνει με δύο τρόπους: είτε η απόσταση ΕΚ θα είναι ακέραιος αριθμός, ώστε ο μαθητής να αναγνωρίζει εύκολα το διπλασιασμό ή τον υποδιπλασιασμό της, είτε η ανακλώμενη ακτίνα θα πρέπει να βρίσκεται πάνω σε σημείο της πρόσοψης του κτηρίου.

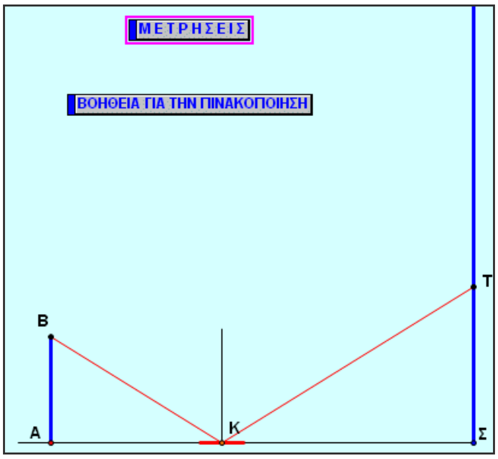
- Στη δεύτερη περίπτωση φροντίζουμε να μετακινηθεί ο άνθρωπος, ώστε η ανακλώμενη ακτίνα να φτάνει και πάλι σε σημείο διπλάσιας ή μισής απόστασης από το Σ.

- Σε κάθε περίπτωση, οι μαθητές θα παρατηρήσουν ότι τα δύο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, κάτι που θα πρέπει να επιβεβαιωθεί με αρκετές δοκιμές διπλασιασμού, τριπλασιασμού, καθώς και υποδιπλασιασμού, υποτριπλασιασμού κ.λπ.

Φύλλο εργασίας 2

Στην προηγούμενη δραστηριότητα προέκυψαν κάποια συμπεράσματα για τον τρόπο που συνδέεται η απόσταση του ανθρώπου από τον καθρέφτη, καθώς και για το ύψος του κτηρίου στο οποίο βλέπει ο άνθρωπος. Τα συμπεράσματα όμως αυτά θα πρέπει να τα ελέγξουμε με μαθηματικά εργαλεία, όπως είναι ο πίνακας τιμών και η γραφική παράσταση.

Ανοίξτε το αρχείο katoptro metrisis_2 του λογισμικού. Στην οθόνη προβάλλονται:
Ένα τμήμα ΑΒ που μπορεί να μετακινείται από το σημείο Α.
Η οπτική ακτίνα ΒΚ που είναι ουσιαστικά η ανάκλαση της ακτίνας ΤΚ πάνω στο κάτοπτρο Κ, το οποίο μπορεί να μετακινηθεί από το σημείο Κ.
Τα κουμπί «Μετρήσεις», από όπου εμφανίζονται μετρήσεις διαφόρων μεγεθών.
Επίσης, εμφανίζονται διάφορα κουμπιά βοήθειας για την κατασκευή συνάρτησης, για τη μέτρηση γωνιών και για την κατασκευή πινάκων από ζεύγη μετρήσεων.



1) Τοποθετήστε τον καθρέφτη σε μια σταθερή θέση, π.χ. σε απόσταση 3 μονάδων από το κτήριο, και μετακινήστε το τμήμα ΑΒ. Κατασκευάστε έναν πίνακα, που να περιλαμβάνει αρκετές τιμές, τοποθετώντας στην πρώτη στήλη του τις μετρήσεις για το ΑΚ και στη δεύτερη τις μετρήσεις για το ύψος ΣΤ στο οποίο φτάνει η οπτική ακτίνα.

2) Με βάση τη διάταξη των σημείων στους άξονες, επαληθεύεται ή απορρίπτεται ο κανόνας στον οποίο καταλήξατε στο πρώτο μέρος της δραστηριότητας; Τι σχέση έχουν τα δύο ποσά μεταξύ τους;

3) Πώς μπορούμε από τον πίνακα τιμών να εντοπίσουμε αυτή τη σχέση;

4) Μετρήστε τις γωνίες των δύο τριγώνων ΑΒΚ και ΣΤΚ. Τι παρατηρείτε; Ποια είναι η σχέση των δύο τριγώνων;

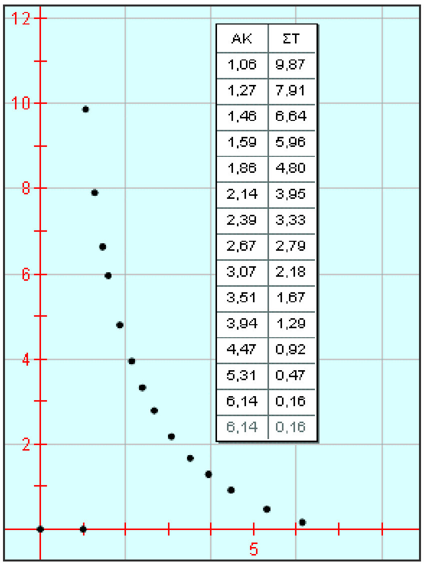
5) Πώς δικαιολογούμε, μέσω της σχέσης των δύο τριγώνων, τα συμπεράσματα για τα μήκη των τμημάτων ΑΚ και ΣΤ;

6) Με ποιον τρόπο μπορούμε πλέον να μετράμε, με έναν καθρέφτη, το ύψος ενός κτηρίου, όταν γνωρίζουμε τις αποστάσεις που είναι απαραίτητες για τη συγκεκριμένη μέτρηση;

Οδηγίες και προτάσεις υλοποίησης

Στόχος του δεύτερου μέρους της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να μελετήσουν, με τη βοήθεια των μαθηματικών, το πρόβλημα της μέτρησης και να καταλήξουν τόσο σε γεωμετρικά όσο και σε αλγεβρικά συμπεράσματα για τη σχέση των μεγεθών.

- Στην πρώτη άσκηση η διάταξη των σημείων θα πρέπει να οδηγήσει τους μαθητές στο συμπέρασμα ότι τα ποσά είναι μάλλον αντιστρόφως ανάλογα. Το γινόμενο δύο αντίστοιχων τιμών για τις μεταβλητές θα υποδείξει τη σταθερά λ στη σχέση ψ=λ/χ.



- Στην τρίτη άσκηση καλό θα είναι ο διδάσκων να υποδείξει στους μαθητές ότι η σταθερά λ είναι ίση περίπου (από τις μετρήσεις) με το γινόμενο του ύψους ΑΒ επί την απόσταση ΚΣ.

- Στην τέταρτη άσκηση οι μαθητές θα μετρήσουν τις γωνίες των δύο τριγώνων και θα διαπιστώσουν ότι είναι ίσες μία προς μία. Από αυτό μπορούν να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι τα δύο τρίγωνα είναι όμοια.

- Στην πέμπτη άσκηση οι μαθητές αναμένεται να γράψουν τις αναλογίες των πλευρών και μέσω αυτών να δικαιολογήσουν το γεγονός ότι τα δύο ποσά που συσχέτισαν είναι αντιστρόφως ανάλογα.

- Στόχος της τελευταίας άσκησης είναι οι μαθητές να περιγράψουν μία σειρά συγκεκριμένων δραστηριοτήτων μετρήσεων και πράξεων, με τις οποίες θα μπορούν να αξιοποιήσουν το κάτοπτρο για τη μέτρηση ενός ζητούμενου ύψους.

Επέκταση

Η δραστηριότητα θα μπορούσε να ολοκληρωθεί, αν οι μαθητές εφάρμοζαν τα συμπεράσματά τους σε πραγματικές συνθήκες. Συγκεκριμένα, θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν ένα μικρό καθρέφτη, να τοποθετηθούν σε απόσταση 1 ή 2 μ. από αυτόν και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της προσομοίωσης, να προσπαθήσουν να υπολογίσουν το ύψος του κτηρίου στο οποίο φτάνει η οπτική τους ακτίνα. Εδώ βέβαια θα χρειαζόταν ή ένας μαθητής με ύψος 1,85 μ. ή ένας με μικρότερο ύψος, ο οποίος θα ανέβει σε κάποιο αντικείμενο, ώστε το ύψος των ματιών του από το έδαφος να είναι 1,80 μ. Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι απαραίτητο, αν δεν χρησιμοποιηθεί η προσομοίωση, αφού θα μπορεί να εφαρμοστεί απευθείας ο τύπος που προέκυψε στο τέλος της δραστηριότητας.

2η Δραστηριότητα: Η ΠΙΣΙΝΑ

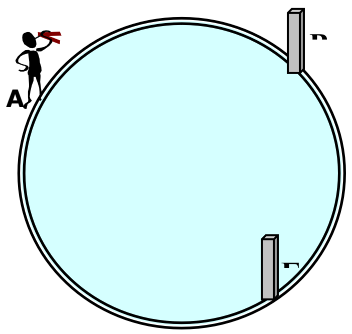
Διάρκεια της δραστηριότητας: 1-2 διδακτικές ώρες

Τάξη: Β΄ Λυκείου

Γνωστικό αντικείμενο:
- Ο νόμος των ημιτόνων

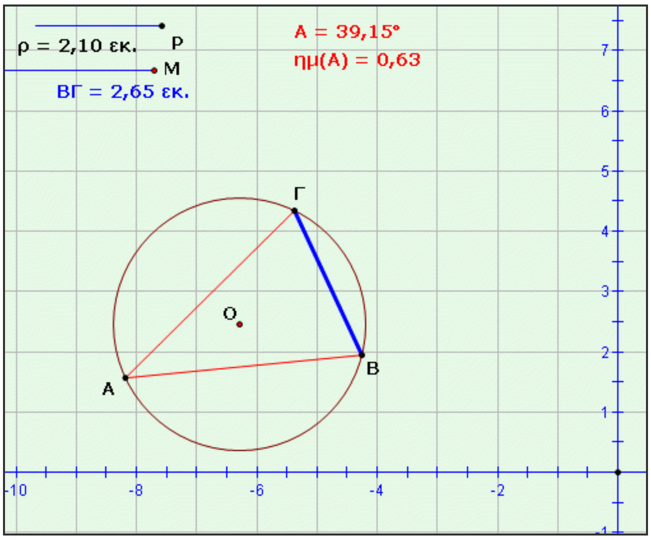
Η κατάσταση προβλήματος
Ο υπολογισμός της ακτίνας ενός κύκλου, όταν είναι γνωστή μία εγγεγραμμένη γωνία και η αντίστοιχη χορδή, μπορεί να αποτελέσει το μαθηματικό περιεχόμενο πραγματικών προβλημάτων. Ο κύκλος μπορεί να είναι το μαθηματικό μοντέλο μιας πισίνας, ενώ η εγγεγραμμένη γωνία μπορεί να προέρχεται από ένα γωνιόμετρο τοποθετημένο στην περιφέρειά της.
Οι μαθητές, με βάση ένα πρόβλημα υπολογισμού της ακτίνας μιας πισίνας, θα εντοπίσουν τη σχέση που συνδέει το ημίτονο μιας γωνίας τριγώνου με την απέναντι πλευρά και την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.

Φύλλο εργασίας



Ο άνθρωπος στην παραπάνω εικόνα θέλει να υπολογίσει την ακτίνα της πισίνας, στην οποία όμως δεν έχει πρόσβαση, αφού είναι γεμάτη νερό. Διαθέτει ένα γωνιόμετρο, ένα όργανο δηλαδή με το οποίο μπορεί να μετρήσει τη γωνία ΒΑΓ, ενώ γνωρίζει ήδη την απόσταση ΒΓ των δύο πασάλων που βρίσκονται στα σημεία Β και Γ της περιφέρειας της πισίνας. Ας προσπαθήσουμε να λύσουμε το πρόβλημα αυτό μέσα από μια προσομοίωσή του.

Ανοίξτε το αρχείο Metrisi pisinas του λογισμικού. Στην οθόνη προβάλλονται:



Ένας κύκλος κέντρου Ο, στον οποίο έχει εγγραφεί ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Η κορυφή Α μπορεί να κινείται πάνω στον κύκλο με σύρσιμο.
Δύο μεταβολείς με άκρα Ρ και Μ, με τους οποίους μπορούμε να μεταβάλλουμε την ακτίνα ρ του κύκλου και το μήκος της πλευράς ΒΓ, αντίστοιχα.
Οι μετρήσεις της ακτίνας ρ και της πλευράς (χορδής) ΒΓ.
Η μέτρηση της γωνίας Α του τριγώνου, καθώς και το ημίτονο της γωνίας.
Ένα κουμπί βοήθειας με το οποίο εμφανίζονται υποδείξεις για την κατασκευή ενός δυναμικού σημείου με συγκεκριμένες συντεταγμένες.
Ένα δεύτερο κουμπί βοήθειας, το οποίο θα σας χρησιμεύσει όταν κληθείτε να κάνετε κάποια απόδειξη.

1) Σύρετε το σημείο Ρ και στη συνέχεια το σημείο Μ. Σημειώστε τα ποσά που μεταβάλλονται κάθε φορά.

2) Στόχος μας είναι να εντοπίσουμε τις σχέσεις μεταξύ των ποσών αυτών. Παρατηρήστε και καταγράψτε αρκετές μετρήσεις των ποσών που μεταβάλλονται, μόλις σύρετε το σημείο Ρ. Φαίνεται από τις μετρήσεις να ισχύει κάποια σχέση;

3) Παρατηρήστε και καταγράψτε αρκετές μετρήσεις των ποσών που μεταβάλλονται, μόλις σύρετε το σημείο Μ. Φαίνεται από τις μετρήσεις να ισχύει κάποια σχέση;

4) Κατασκευάστε ένα δυναμικό σημείο με συντεταγμένες (ημ(Α), ρ) και εμφανίστε το ίχνος του. Μεταβάλετε την ακτίνα ρ. Διαπραγματευτείτε την καμπύλη που φαίνεται να διαγράφει το δυναμικό σημείο. Ποια σχέση θα μπορούσε να συνδέει τα δύο ποσά;

5) Με τη βοήθεια των μετρήσεων επιβεβαιώστε ή απορρίψτε την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

6) Κατασκευάστε ένα δυναμικό σημείο με συντεταγμένες (ημ(Α), ΒΓ) και εμφανίστε το ίχνος του. Μεταβάλετε την πλευρά ΒΓ. Διαπραγματευτείτε την καμπύλη που φαίνεται να διαγράφει το δυναμικό σημείο. Ποια σχέση θα μπορούσε να συνδέει τα δύο ποσά;

7) Με τη βοήθεια των μετρήσεων επιβεβαιώστε ή απορρίψτε την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

8) Διατυπώστε μία πρόταση με την οποία θα εκφράζετε τον τρόπο που συνδέονται τα ποσά ΒΓ, Ρ, ημ(Α).

9) Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλετε να περιγράψετε στον άνθρωπο του αρχικού προβλήματος μία διαδικασία με την οποία θα καταφέρει να μετρήσει την ακτίνα της πισίνας. Τι θα τον συμβουλεύατε να κάνει, χρησιμοποιώντας και το γωνιόμετρο;

10) Ωστόσο, μία πρόταση, η οποία στηρίζεται μόνο σε μετρήσεις και γραφικές παραστάσεις, κινδυνεύει να θεωρηθεί μη έγκυρη από αυστηρά μαθηματική άποψη. Κάντε μία γενική απόδειξη της πρότασης, χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη βοήθεια από την οθόνη.

Οδηγίες και προτάσεις υλοποίησης

Αρχικά ο διδάσκων ζητά από τους μαθητές να αναγνωρίσουν την προσομοίωση της πραγματικής κατάστασης στο αρχείο που ήδη έχουν ανοίξει.

- Στόχος της πρώτης άσκησης είναι οι μαθητές να διαπιστώσουν ότι με το σημείο Ρ μεταβάλλεται η ακτίνα, η γωνία Α και το ημίτονό της, ενώ με το σημείο Μ μεταβάλλεται η χορδή ΒΓ, η γωνία Α και το ημίτονό της.

- Στη δεύτερη άσκηση οι μαθητές αναμένεται να διαπιστώσουν ότι καθώς αυξάνεται η ακτίνα ρ, μειώνεται η τιμή του ημιτόνου της γωνίας Α. Ο διδάσκων μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να ελέγξουν αν τα δύο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, επιλέγοντας και καταγράφοντας τις κατάλληλες τιμές για την ακτίνα ρ και τις αντίστοιχες τιμές του ημιτόνου της γωνίας Α.

- Στην τρίτη άσκηση οι μαθητές αναμένεται να διαπιστώσουν ότι καθώς αυξάνεται η χορδή ΒΓ, αυξάνεται και η τιμή του ημιτόνου της γωνίας Α. Ο διδάσκων μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να ελέγξουν αν τα δύο ποσά είναι ανάλογα, επιλέγοντας και καταγράφοντας τις κατάλληλες τιμές για το τμήμα ΒΓ και τις αντίστοιχες τιμές του ημιτόνου της γωνίας Α.

- Στην τέταρτη άσκηση οι μαθητές θα κατασκευάσουν ένα δυναμικό σημείο με συντεταγμένες (ρ, ημΑ), εμφανίζοντας όμως τις αντίστοιχες οδηγίες με το κατάλληλο κουμπί. Το ίχνος του δυναμικού σημείου θα διαγράψει τμήμα καμπύλης που παραπέμπει σε υπερβολή και αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Με τον τρόπο αυτό θα ενισχυθεί η αρχική εικασία για τη σχέση των δύο αυτών ποσών.

- Στην πέμπτη άσκηση οι μαθητές θα βρουν το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών των δύο ποσών και θα διαπιστώσουν ότι αν μεταβάλλουν τις τιμές της ακτίνας ρ, το γινόμενο θα παραμείνει σταθερό.

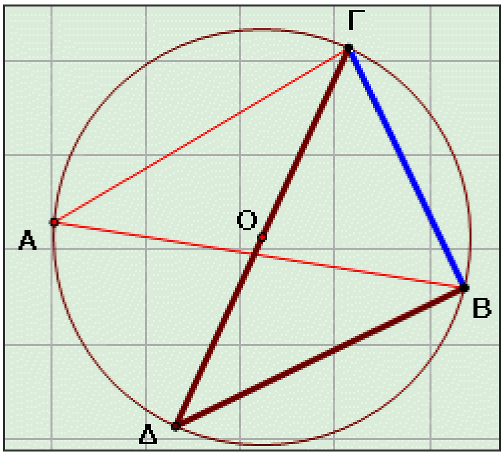
- Στην έκτη άσκηση οι μαθητές θα κατασκευάσουν ένα δυναμικό σημείο με συντεταγμένες (ημΑ, ΒΓ), εμφανίζοντας όμως τις αντίστοιχες οδηγίες με το ακατάλληλο κουμπί. Το ίχνος του δυναμικού σημείου θα διαγράψει τμήμα ευθείας που παραπέμπει σε ανάλογα ποσά. Με τον τρόπο αυτό θα ενισχυθεί η αρχική εικασία για τη σχέση των δύο αυτών ποσών.

- Στην έβδομη άσκηση οι μαθητές θα βρουν το λόγο των αντίστοιχων τιμών των δύο ποσών και θα διαπιστώσουν ότι αν μεταβάλλουν τις τιμές της χορδής ΒΓ, ο λόγος των δύο ποσών θα παραμείνει σταθερός και μάλιστα θα είναι ίσος με το διπλάσιο της ακτίνας.

- Στην όγδοη άσκηση μπορεί πλέον να γίνει μία διατύπωση του νόμου η οποία θα έχει τη μορφή: «Αν ένα τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, τότε ο λόγος μιας πλευράς προς το ημίτονο της απέναντι γωνίας είναι σταθερός και ίσος με το διπλάσιο της ακτίνας».

- Με βάση τον παραπάνω κανόνα, και ιδιαίτερα τη γραμμική σχέση που έχουν ανακαλύψει, οι μαθητές μπορούν να περιγράψουν έναν τρόπο υπολογισμού της απόστασης δύο σημείων που βρίσκονται στην περιφέρεια ενός κύκλου γνωστής ακτίνας.

- Στην τελευταία άσκηση οι μαθητές θα κάνουν μία απόδειξη του νόμου των ημιτόνων. Συγκεκριμένα, με το κουμπί της βοήθειας για την απόδειξη θα εμφανίσουν το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΒΔ, του οποίου η γωνία Δ είναι ίση με την Α και στο συγκεκριμένο τρίγωνο ισχύει ΒΓ/ημ(Δ)=2ρ.



3η Δραστηριότητα: Η ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΟΠΤΙΚΗ ΓΩΝΙΑ

Διάρκεια της δραστηριότητας: 1-2 διδακτικές ώρες

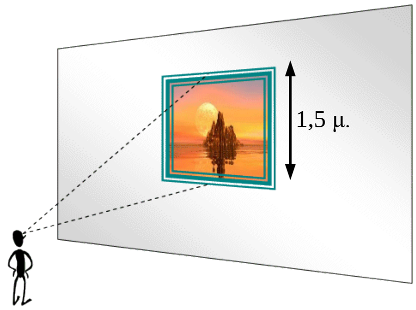
Τάξη: Γ΄ Λυκείου

Γνωστικό αντικείμενο:
- Εύρεση ακροτάτων συνάρτησης

Η κατάσταση προβλήματος
Η δραστηριότητα αυτή συνιστά μία εισαγωγή στη μελέτη του προβλήματος της μέγιστης **οπτικής γωνίας**. Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές οδηγούνται στην αναζήτηση του κατάλληλου μοντέλου αναμένεται να αποτελέσει πρότυπο επεξεργασίας σε ανάλογα προβλήματα.
Η πορεία της διερεύνησης έχει ως αφετηρία την εικόνα ενός επισκέπτη μιας έκθεσης ζωγραφικής, ο οποίος στέκεται μπροστά σε έναν πίνακα. Στην αρχή οι μαθητές θα κατασκευάσουν ένα γεωμετρικό μοντέλο της κατάστασης και στη συνέχεια θα επιχειρήσουν να συνδέσουν την οπτική γωνία με την απόσταση του επισκέπτη από τον πίνακα. Η φάση αυτή θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως φάση του στατικού γεωμετρικού μοντέλου και οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν βασικές τριγωνομετρικές έννοιες και σχέσεις, προκειμένου να συνδέσουν τα μεγέθη.
Ακολουθεί η φάση της μελέτης ενός δυναμικού μοντέλου, δηλαδή μιας εικονικής γεωμετρικής προσομοίωσης στον υπολογιστή. Οι μαθητές, μέσα από κατάλληλες ερωτήσεις και βοήθειες, θα μελετήσουν τη συμπεριφορά του μοντέλου, καθώς μεταβάλλονται οι παράμετροι του προβλήματος, για παράδειγμα, το ύψος στο

οποίο είναι αναρτημένος ο πίνακας, το ύψος του παρατηρητή και το μέγεθος του πίνακα.
Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν του τύπους των τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος και διαφοράς γωνιών.

Φύλλο εργασίας
Ας υποθέσουμε ότι ο επισκέπτης μιας έκθεσης ζωγραφικής έχει ύψος α=1,70 μ. και θέλει να απολαύσει τον αγαπημένο του πίνακα που βρίσκεται σε μία από τις αίθουσες της έκθεσης. Το ύψος του πίνακα είναι υ=1,50 μ. και το πάνω μέρος του πίνακα απέχει από το πάτωμα h=3,5 μ. Το πρόβλημα που τίθεται είναι το εξής: Σε πόση απόσταση από τον πίνακα θα πρέπει να σταθεί, ώστε να έχει τη μέγιστη, άρα και τη βέλτιστη, οπτική γωνία;

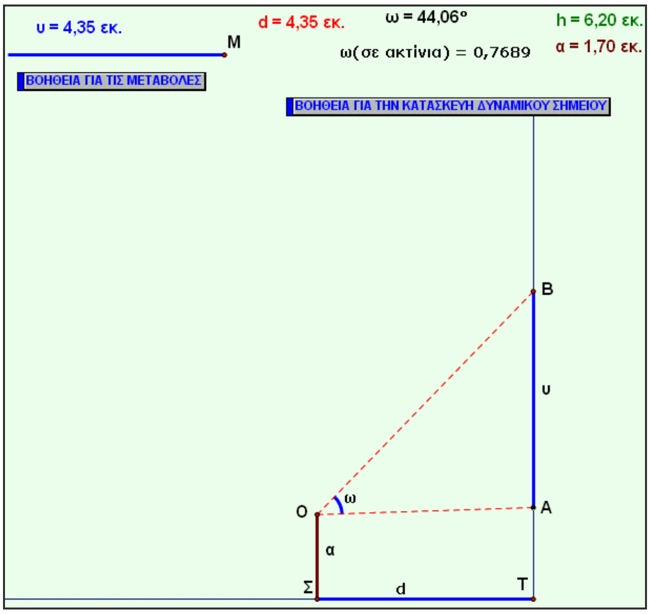


1. Κατασκευάστε ένα γεωμετρικό μοντέλο της πραγματικής κατάστασης.

2. Κατασκευάστε μία σχέση που να συνδέει την απόσταση d του επισκέπτη από τον τοίχο με την τριγωνομετρική εφαπτομένη της οπτικής του γωνίας ω.

3. Μελετήστε τον τύπο (μοντέλο) που έχει προκύψει και μέσω αυτού εκτιμήστε την απόσταση στην οποία θα πρέπει να σταθεί ο επισκέπτης, για να έχει τη μέγιστη οπτική γωνία. Χρησιμοποιήστε αποκλειστικά μαθηματικές μεθόδους για τον εντοπισμό μεγίστων ελαχίστων. Με ποιον τρόπο αυξάνεται ή ελαττώνεται η οπτική μας γωνία σε σχέση την απόσταση d;

4. Ανοίξτε το αρχείο model_1. Εντοπίστε τα μεγέθη που μεταβάλλονται και μελετήστε τον τρόπο με τον οποίο η μεταβολή καθενός από τα μεγέθη αυτά επηρεάζει τη μέγιστη τιμής της γωνίας. Χρησιμοποιήστε τις μετρήσεις που προβάλλονται στην οθόνη.



5. Κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης (μοντέλου) που δημιουργήσατε στη δεύτερη άσκηση. Ποιες ιδιότητες της συνάρτησης μπορούμε να αναγνωρίσουμε από τη γραφική παράσταση;

6. Βρείτε (κατά προσέγγιση) τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης με βάση τη γραφική της παράσταση. Σε ποια απόσταση εμφανίζεται η μέγιστη τιμή; Συγκρίνετε το αποτέλεσμα αυτό με την απάντηση που δώσατε στην τρίτη άσκηση.

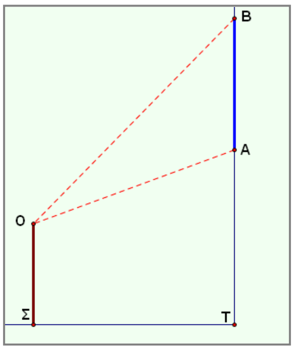
7. Ποιες μεταβολές υφίσταται η γραφική παράσταση, όταν μεταβάλλουμε το υ;

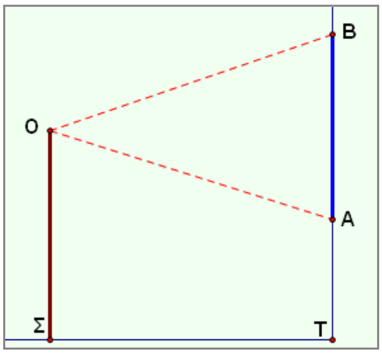
8. Ποιες μεταβολές υφίσταται η γραφική παράσταση, όταν μεταβάλλουμε το h;

Οδηγίες και προτάσεις υλοποίησης

Καταρχάς οι μαθητές θα μελετήσουν την έννοια της **οπτικής γωνίας**, ώστε να εισάγουν στη συνέχεια την έννοια αυτή στη μαθηματική επεξεργασία του προβλήματος. Επιπλέον, ο διδάσκων θα μπορούσε να δημιουργήσει μία πραγματική κατάσταση όμοια με εκείνη του προβλήματος. Συγκεκριμένα μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να σταθούν μπροστά σε μία εικόνα που έχει αναρτηθεί στον τοίχο και να διαπραγματευτεί μαζί τους τον τρόπο με τον οποίο επηρεάζεται η οπτική τους αντίληψη σε σχέση με την απόστασή τους από τον τοίχο.

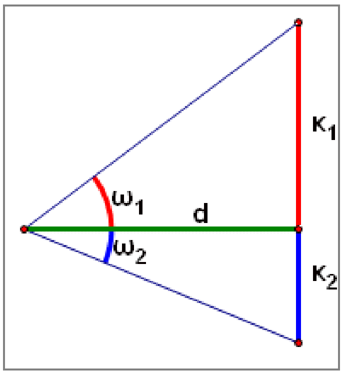
- Στην πρώτη άσκηση οι μαθητές θα κατασκευάσουν ένα γεωμετρικό μοντέλο της πραγματικής κατάστασης, αφού πρώτα διαπραγματευτούν τα γεωμετρικά μεγέθη που εμπλέκονται με αυτήν. Καλό θα είναι ο διδάσκων να οδηγήσει τους μαθητές, με κατάλληλες ερωτήσεις, να κατασκευάσουν δύο τουλάχιστον μοντέλα.





Αυτό που πρέπει να γίνει αντιληπτό από τους μαθητές είναι ότι μόνο το μοντέλο, στο οποίο το κάτω άκρο της εικόνα βρίσκεται σε ψηλότερο σημείο από ό,τι ο οφθαλμός του παρατηρητή, παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Το μοντέλο, στο οποίο η εικόνα βρίσκεται στο ύψος του παρατηρητή, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όσο πιο κοντά βρίσκεται ο παρατηρητής, τόσο μεγαλύτερη είναι και η οπτική του γωνία.

- Στη δεύτερη άσκηση οι μαθητές θα πρέπει να συμπληρώσουν κατάλληλα το μοντέλο, ώστε να δημιουργηθούν τα απαραίτητα τρίγωνα μέσα στα οποία θα ενσωματωθούν τα μεγέθη που πρόκειται να συνδεθούν.
  Στην περίπτωση που ο παρατηρητής βρίσκεται απέναντι από τον πίνακα, τότε η οπτική του γωνία ω θα μπορούσε να συνδεθεί με την απόσταση d του παρατηρητή και με το γραμμικό μέγεθος (ύψος κ) του πίνακα. Η σύνδεση αυτή θα πραγματοποιηθεί με την εφαρμογή των κατάλληλων τύπων της τριγωνομετρίας σε επιλεγμένα ορθογώνια τρίγωνα.
  Μία ενδεικτική συσχέτιση μεταξύ της γωνίας $\omega=\omega_1+\omega_2$ και της απόστασης d θα μπορούσε να γίνει ως εξής:

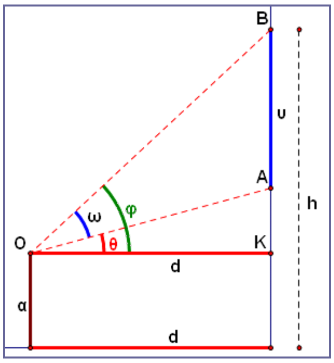


Αφού $\omega=\omega_1+\omega_2$, άρα $\varepsilon\varphi\omega=\varepsilon\varphi(\omega_1+\omega_2)$ και με βάση το σχήμα έχουμε

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{\varepsilon\varphi\omega_1+\varepsilon\varphi\omega_2}{1-\varepsilon\varphi\omega_1.\varepsilon\varphi\omega_2}, \text{ επομένως } \varepsilon\varphi\omega=\frac{\frac{\kappa_1}{d}+\frac{\kappa_2}{d}}{1-\frac{\kappa_1}{d}.\frac{\kappa_2}{d}}=\frac{\kappa}{d^2-\kappa_1\cdot\kappa_2}.$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει εδώ το γεγονός ότι η ποσότητα αυτή γίνεται μέγιστη, για σταθερό d, όταν $\kappa_1=\kappa_2$, δηλαδή όταν το τρίγωνο είναι ισοσκελές, κάτι που υπαγορεύει και η κοινή εμπειρία μας για τη βέλτιστη θέση απέναντι σε μία εικόνα.

Στην περίπτωση που το κάτω άκρο Α του πίνακα βρίσκεται σε ψηλότερο σημείο από τον οφθαλμό Ο του παρατηρητή, τότε η συσχέτιση της οπτικής γωνίας ω και της απόστασης d του παρατηρητή θα μπορούσε ενδεικτικά να γίνει ως εξής:



$εφω=εφ(φ-θ)(1)$, ενώ $εφφ=\frac{h-α}{d}$ και $εφθ=\frac{h-α-υ}{d}$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $εφω=\frac{εφφ-εφθ}{1+εφφ.εφθ}$ και επομένως

$εφω=\frac{\frac{h-α-h+α+υ}{d}}{1+\frac{(h-α).(h-α-υ)}{d^2}}$, από όπου προκύπτει ότι $εφω=\frac{υ.d}{d^2+(h-α)(h-α-υ)}$,

επομένως η συνάρτηση που υπολογίζει την τιμή της εφαπτομένης της γωνίας ω από την απόσταση d θα είναι η $f(x)=\frac{υ.x}{x^2+(h-α)(h-α-υ)}$.

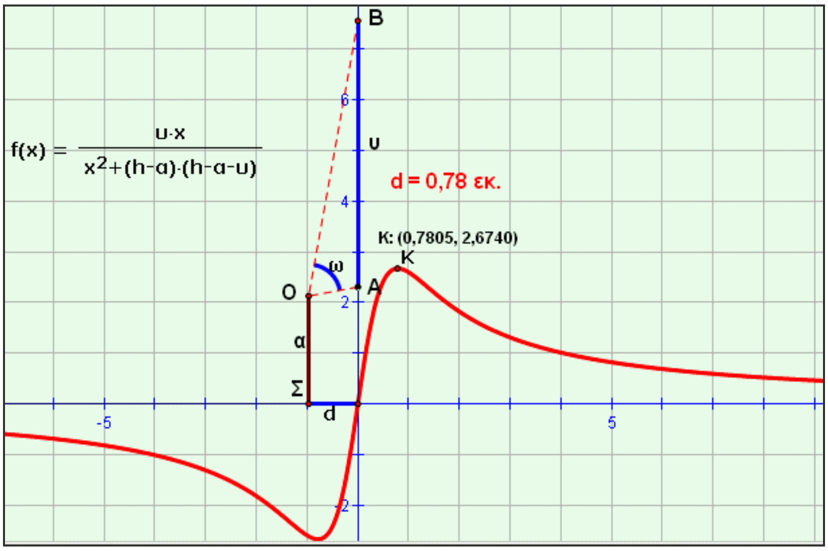
- Στην τρίτη άσκηση οι μαθητές θα μελετήσουν τη σχέση ή τις σχέσεις που έχουν κατασκευάσει, προκειμένου να εντοπίσουν, όσο είναι εφικτό, την κατάλληλη τιμή του d και να επιτευχθεί, έτσι, η μέγιστη γωνία ω.
  Στην πρώτη περίπτωση της προηγούμενης άσκησης είναι φανερό ότι η μέγιστη τιμή για τη γωνία ω επιτυγχάνεται, αν μηδενιστεί η απόσταση d. Στη δεύτερη περίπτωση ο διδάσκων θα πρέπει να διαπραγματευτεί το γεγονός ότι αν μεγιστοποιηθεί η τριγωνομετρική εφαπτομένη της ω, δηλαδή η συνάρτηση $f(x)=\frac{υ.x}{x^2+(h-α)(h-α-υ)}$, τότε θα μεγιστοποιηθεί και η γωνία ω, αφού η τριγωνομετρική εφαπτομένη ως συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.
  Εδώ οι μαθητές θα πρέπει να μελετήσουν την παράγωγο της συνάρτησης, τη μονοτονία και τα ακρότατα, με τη γνωστή μέθοδο που περιγράφουν τα σχολικά εγχειρίδια. Τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης θα τους επιτρέψουν να περιγράψουν τον τρόπο με τον οποίο αυξάνεται ή ελαττώνεται η εφαπτομένη της ω, άρα και η ίδια η ω.

- Στην τέταρτη άσκηση οι μαθητές θα μελετήσουν ένα έτοιμο μοντέλο της πραγματικής κατάστασης. Στην ουσία θα διερευνήσουν την κατάσταση προβλήματος μέσα από μία δυναμική γεωμετρική προσομοίωση.
  Στην αρχή θα πρέπει να αναγνωρίσουν τα διάφορα μεγέθη, που ήδη έχουν ενσωματώσει στο γεωμετρικό μοντέλο κατά τις προηγούμενες ασκήσεις, και να εξετάσουν τα σταθερά και μεταβλητά μεγέθη. Στη συνέχεια θα σύρουν το σημείο Σ και θα παρατηρήσουν ότι η τιμή της γωνίας ω γίνεται μέγιστη σε κάποιο σημείο της διαδρομής που έχει συγκεκριμένη απόσταση d από τον υποτιθέμενο τοίχο. Στη συνέχεια θα μεταβάλλουν το μήκος του τμήματος ΣΟ (ύψος του παρατηρητή) και θα μελετήσουν τη μετατόπιση του σημείου στο οποίο παρουσιάζεται το μέγιστο. Τέλος μπορούν να μεταβάλλουν τόσο το μέγεθος του πίνακα, σύροντας το σημείο Μ, όσο και

το ύψος στο οποίο είναι αναρτημένος, σύροντας το σημείο Β. Σε καθεμία από τις παραπάνω ενέργειες οι μαθητές θα επιχειρήσουν να ερμηνεύσουν τη μετατόπιση του σημείου στο οποίο παρουσιάζεται μέγιστο, με τη βοήθεια του τύπου που έχουν κατασκευάσει και συνδέει τα διάφορα μεγέθη που διερευνούν.

- Στην πέμπτη άσκηση οι μαθητές θα κατασκευάσουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τις δυνατότητες που διαθέτει το λογισμικό και τη βοήθεια που εμφανίζεται στην οθόνη. Η αναγνώριση της οριζόντιας ασύμπτωτης (άξονας χ΄χ), καθώς και του ότι η συνάρτηση είναι περιττή, μπορεί να γίνει άμεσα από τη μορφή της γραφικής παράστασης. Η γραφική παράσταση που θα προκύψει θα αποτελέσει αντικείμενο διαπραγμάτευσης τόσο για τη μορφή της όσο και για τον τρόπο που αυτή αναπαριστά την πραγματική κατάσταση. Συγκεκριμένα οι μαθητές θα πρέπει να αναγνωρίσουν το γεγονός ότι η γωνία αρχίζει να αυξάνεται καθώς απομακρυνόμαστε από τον τοίχο, όπου έχει μηδενική τιμή, φτάνει σε μία μέγιστη τιμή και κατόπιν ελαττώνεται συνεχώς, χωρίς όμως να μηδενίζεται.

- Η κατά προσέγγιση εκτίμηση του μεγίστου μπορεί να γίνει, αν οι μαθητές κατασκευάσουν ένα σημείο Κ πάνω στη γραφική παράσταση, εμφανίσουν τις συντεταγμένες του και το σύρουν μέχρι την κορυφή της καμπύλης.



Στο σημείο αυτό θα μπορούσε να γίνει επιβεβαίωση, αν οι μαθητές σύρουν το σημείο Σ σε απόσταση ίση με την τετμημένη του σημείου, και παρατηρήσουν ότι σε αυτό το σημείο η τιμή της γωνίας ω είναι μέγιστη.

- Τέλος οι μαθητές θα διερευνήσουν τον τρόπο με τον οποίο οι μεταβολές των παραμέτρων h και u επηρεάζουν τη μορφή της γραφικής παράστασης, καθώς και του μέγιστου της συνάρτησης.

ΠΗΓΗ: Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Έργο ΠΛΕΙΑΔΕΣ/ Νηρηίδες, Γ΄ ΚΠΣ 3 ΕΑ.ΙΤΥ / Υπ.Ε.Π.Θ., 2008, Εκδόσεις Καστανιώτης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.