ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Πρακτική Άσκηση σε σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης

Ενότητα 5: Η έννοια της μαθηματικής δραστηριότητας, Η Θεωρία Διδακτικών Καταστάσεων ως πλαίσιο σχεδιασμού δραστηριοτήτων

Δέσποινα Πόταρη, Γιώργος Ψυχάρης

Σχολή Θετικών επιστημών

Τμήμα Μαθηματικό

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (σελ. 4)

Το παρακάτω είναι περιγραφή μιας ιδέας που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν η βάση του μαθήματος :

Ποιο είναι μεγαλύτερο το $\frac{2}{3}$ ή το $\frac{201}{301}$;

Φυσικά υπάρχουν αρκετοί τρόποι εύρεσης της απάντησης. Και αυτοί κατηγοριοποιούνται σε ένα από τους 2 τύπους:

ΤΥΠΟΣ Α : ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΟΣ

Αυτός ο τύπος απάντησης περιλαμβάνει μετατροπή και των 2 παρονομαστών σε 903, δηλαδή ομώνυμα. Και είτε με χιαστή πολλαπλασιασμό είτε με μετατροπή των αντίστοιχων κλασμάτων σε ισοδύναμα κλάσματα με παρονομαστή το 903, τα κλάσματα μπορούν μετά να συγκριθούν άμεσα. Μια διαφορετική προσέγγιση που θα μπορούσε επίσης να οριστεί αλγοριθμικά θα είναι η μετατροπή των κλασμάτων σε δεκαδικά πιθανόν με τη χρήση υπολογιστών τσέπης και μετά συγκρίνοντας τις δεκαδικές παραστάσεις. Σημειώστε ότι αυτό είναι πραγματικά δυσκολότερο απ΄ ό,τι φαίνεται στο ότι οι δεκαδικοί που πρόκειται να συγκριθούν είναι οι 0,66677774086 και 0,666666667 και είναι πιθανόν δυσκολότερο για τους μαθητές να τους συγκρίνουν παρά το αρχικό έργο.

ΤΥΠΟΣ Β: ΔΙΑΙΣΘΗΤΙΚΟΣ

Αυτός θα περιλάμβανε μεθόδους τέτοιες όπως η αναγνώριση ότι η πραγματική σύγκριση είναι $\frac{200}{300}$ και $\frac{201}{301}$. Επειδή αυτό είναι πολύπλοκο, μια απλούστερη σύγκριση μπορεί να γίνει όπως $\frac{2}{3}$ και $\frac{3}{4}$, όπου η μονάδα (1) έχει προστεθεί στον αριθμητή και παρονομαστή, το οποίο φανερά κάνει το δεύτερο κλάσμα μεγαλύτερο. Αυτό μπορεί μετά να δοκιμαστεί με διάφορα παραδείγματα και να βγει συμπέρασμα για την αρχική σύγκριση. Μια άλλη μέθοδος είναι η παρακάτω που περιγράφεται από ένα καθηγητή που είχε θέσει το ερώτημα σε κάποιους καθηγητές στις Η.Π.Α. Ένας από αυτού απάντησε:

Μπορούμε να σκεφτούμε το $\frac{200}{300}$σαν τις επιτυχίες στις ελεύθερες βολές ενός παίκτη του μπάσκετ, ως οι 200 επιτυχείς ρίψεις σε ένα σύνολο 300 προσπαθειών. Πηγαίνοντας στο 201/301, ο παίκτης του μπάσκετ έκανε άλλη μια ρίψη, που ήταν επιτυχής κι άρα ο μέσος όρος των επιτυχιών του πρέπει να βελτιώθηκε. Οπότε το $\frac{201}{301}$ πρέπει να είναι μεγαλύτερο.

Αυτή η τρίτη προσέγγιση είναι άμεσα διαισθητική. …….(?)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (σελ. 23)

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ

Ας προσπαθήσουμε να εξερευνήσουμε με τους μαθητές κατά πόσο η παρακάτω εξίσωση

$45 \times 24 = 90 \times 12$

είναι αληθής ή όχι.

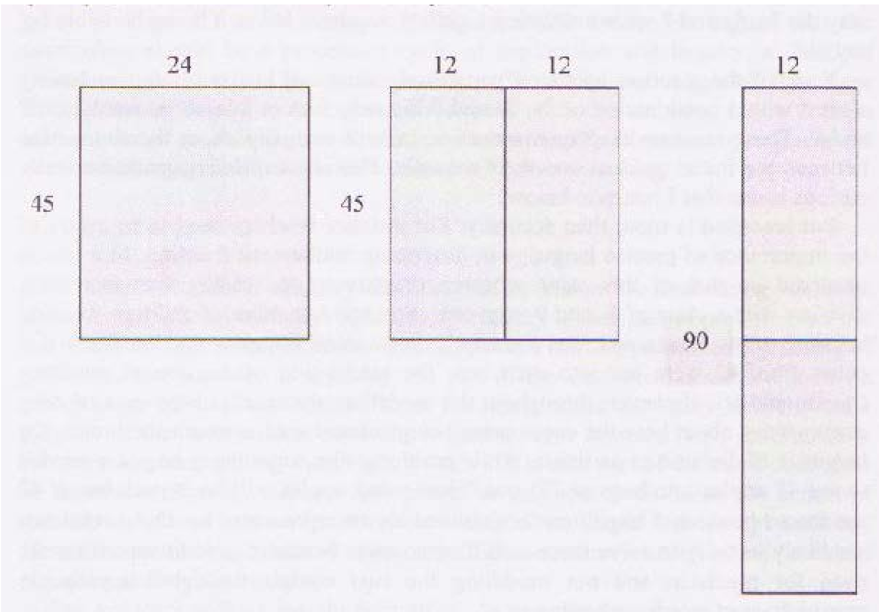
Δουλεύοντας στην βάση της ακρίβειας, ένας τρόπος για να απαντηθεί αυτό είναι να το ελέγξουμε · υπολογίζοντας το γινόμενο σε κάθε μέλος της εξίσωσης θα αποκαλυφθεί ότι η εξίσωση είναι αληθής. Μια προσεκτική έρευνα των αριθμών που εμπλέκονται είναι πιθανό να δείξει ότι υπάρχει μια σχέση μεταξύ τους. Αυτό θα μπορούσε να δοκιμαστεί και με άλλα παρόμοια παραδείγματα κι έτσι να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι ο διπλασιασμός του ενός αριθμού κι ο υποδιπλασιασμός του άλλου συντηρεί (preserve ?) την απάντηση. Αυτή η εμπειρική προσέγγιση στην Γενίκευση δεν θεμελιώνει γιατί το παραπάνω συμπέρασμα είναι αληθές, ή κατά πόσο θα συνεχίσει να είναι αληθής. Και δεν προκαλεί την περιέργεια κατά πόσο αυτό μπορεί να γενικευθεί παραπέρα- θα «δούλευε» και πάλι αν τριπλασιάζαμε τον ένα αριθμό και υποτριπλασιάζαμε τον άλλον; Καταλήγουμε σε μια γενίκευση, αλλά είναι ένας κανόνα χωρίς λογική βάση.

Αντί για αυτό ας προσπαθήσουμε να το μοντελοποιήσουμε με μια διάταξη.

(Οι διατάξεις παρέχουν ένα ισχυρό μοντέλο για τον έλεγχο της δομής του πολλαπλασιασμού κι έτσι προτείνω, ανήκουν και στην παιδαγωγική γνώση περιεχομένου αλλά και στην γνώση περιεχομένου)

Κάποια απλά διαγράμματα, όπως φαίνονται παρακάτω, με μια ανοιχτή διάταξη γρήγορα εγκαθιστούν την αλήθεια της εξίσωσης .

Τα σχήματα:



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 (σελ. 56)

Πώς θα εξηγούσατε στους μαθητές σας ότι $\frac{2}{3} \div 2 = \frac{1}{3}$; Γιατί $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6} = 4$;

Η πλειοψηφία των καθηγητών έδωσε αιτιολογημένες εξηγήσεις για την διαίρεση ενός κλάσματος με φυσικό αριθμό, με επικρατούσα την εξήγηση : «*η διαίρεση ενός αριθμού ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό του αντίστροφού του*». Μια άλλη εξήγηση που δόθηκε ήταν «*διαίρεση της μονάδας σε τρία ίσα μέρη, κάθε μέρος θα πρέπει να είναι ίσο με* $^1/_3$ *κι άρα τα 2 μέρη θα είναι* $^2/_3 \times {}^2/_3 \div 2$ *που σημαίνει να χωρίσουμε το* $^2/_3$ *σε 2 μέρη, κι άρα το ένα κομμάτι θα πρέπει να είναι ίσο με* $^1/_3$ » ή «*το μισό του* $^2/_3$ *είναι το* $^1/_3$» . Η ίδια εξήγηση δόθηκε και για την δεύτερη σχέση από την πλειοψηφία των καθηγητών δηλαδή αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω. Λίγοι έδωσαν ως εξήγηση «*διαίρεση της μονάδας σε έξη ίσα μέρη, κάθε μέρος θα πρέπει να είναι ίσο με* $^1/_6$, *τέσσερα μέρη θα είναι* $^4/_6$. *Με άλλα λόγια τα* $^4/_6$ *περιέχουν τέσσερα* $^1/_6$, *δηλαδή* $^4/_6 \div {}^1/_6$=4. *Επειδή το* $^4/_6$ *είναι ισοδύναμο με το* $^2/_3$, *άρα* $^2/_3 \div {}^1/_6$ =4».

Κάποιοι μαθητές προσπάθησαν να ζωγραφίσουν ένα κύκλο για να αιτιολογήσουν τις εξηγήσεις τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 (σελ. 76)

1. Η Αλίκη η Μπόνη και η Τζέσσικα μπορούν να παρασκευάσουν 350, 250 και 200 τούβλα την ημέρα αντίστοιχα. Πόσο χρόνο θα χρειαστούν αν εργάζονται μαζί προκειμένου να φτιάξουν 1500 τούβλα;

2. Αν η Αλίκη δουλεύει μια ημέρα και η Μπόνη και η Τζέσσικα δουλεύουν μαζί τους, πόσο χρόνο θα χρειαστούν για τελειώσουν το έργο; Έστω ότι x ο αριθμός των ημερών σχηματίστε την εξίσωση με άγνωστο τον x. (πρόβλημα συνεργασίας, παρμένο από το The Greek Anthology, (Paton, 1979)).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 (σελ. 77)

Εισαγωγή των φανταστικών αριθμών

Αυτή γίνεται μέσω της ιστορίας της ανάπτυξης των μιγαδικών αριθμών. Συνήθως η εισαγωγή της έννοιας του φανταστικού αριθμού γίνεται μέσω της επίλυσης της εξίσωσης αλλά όμως δεν κινητοποιούνται με αυτό τον τρόπο οι μαθητές ώστε να πεισθούν να μάθουν το αντικείμενο. Έτσι χρησιμοποιείται το πρόβλημα του Leibniz για να εισαχθεί το θέμα ως εξής:

Μέχρι εδώ οι μαθητές έχουν εξερευνήσει το σύνολο $\mathcal{R}$ των πραγματικών αριθμών. Υπάρχουν όμως αριθμοί που να είναι διαφορετικοί από τους πραγματικούς αριθμούς; Παρακαλώ εξερευνήστε το παρακάτω πρόβλημα:

Έστω $x^2 \;\; +y^2 \; = 1$, $x.y = 2$, να βρεθούν (1) $x + y = ?$ και (2) οι τιμές των $x,$

Μπορούμε να βρούμε τις τιμές των $x + y$ ($\pm\sqrt{6}$), αλλά δεν μπορούμε να βρούμε την πραγματική τιμή του x και y αντίστοιχα. Η ύπαρξη της $x + y$ μας διαβεβαιώνει ότι πρέπει οι τιμές των x και y να υπάρχουν, αλλά δεν είναι πραγματικοί αριθμοί. Τι είναι; Ας ρίξουμε μια πιο προσεχτική ματιά στην φύση των x και y . Βασιζόμενοι στην εξίσωση $x + y = \sqrt{6}$ και $x.y = 2$, μπορούμε να δούμε τα ,x, y ως τις δυο ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης με ένα άγνωστο. Αλλά δεν υπάρχει πραγματική ρίζα σε σχέση με αυτήν την εξίσωση. Είναι απαραίτητο να εισαχθεί ένα νέο είδος αριθμού ώστε να επιλυθεί αυτό το πρόβλημα. Το κλειδί στο πρόβλημα αυτό είναι εκφράσουμε τις ρίζες όταν η διακρίνουσα είναι αρνητική. Έτσι προκύπτει με φυσικό τρόπο η αναγκαιότητα εισαγωγής των φανταστικών αριθμών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 (σελ. 81)

Σημειώνεται

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 (σελ. 117)

Ανατίθεται το παρακάτω έργο στους αναγνώστες :

Γράψτε ένα στοιχείο πολλαπλής επιλογής αναφορικά με τους δεκαδικούς αριθμούς που οι καθηγητές θα μπορούν να απαντήσουν αλλά θα είναι μια πρόκληση ακόμα και για τους μαθηματικούς.

Δίνεται το παρακάτω παράδειγμα στο παραπάνω έργο:

Ο κος Fitzgerald βοηθάει τους μαθητές τους πώς να μάθουν να συγκρίνουν δεκαδικούς. Προσπαθεί να επινοήσει μια εργασία που να του δείχνει κατά πόσο οι μαθητές του μπορούν να τοποθετήσουν σωστά μια λίστα από δεκαδικούς σε τάξη μεγέθους. Ποια από τις παρακάτω ομάδες αριθμών ικανοποιούν καλύτερα το σκοπό του;

a) ,5 7 ,01 11,4
b) ,60 2,53 3,14 ,45
c) ,60 4,25 ,565 2,5
d) Οποιαδήποτε τετράδα από τις παραπάνω είναι καλή για το συγκεκριμένο σκοπό. Όλες ζητούν από τους μαθητές να διαβάσουν και να ερμηνεύσουν τους δεκαδικούς αριθμούς.

Οι δάσκαλοι που είναι γνώστες της διδασκαλίας των δεκαδικών αριθμών γνωρίζουν καλά ότι οι μαθητές μπορούν να ταξινομήσουν τους δεκαδικούς αριθμούς στις περιπτώσεις a, b, αγνοώντας το δεκαδικό σημείο και ταξινομώντας τους ακεραίους που προκύπτουν (π.χ. για την περίπτωση a θεωρούν τους αριθμούς 5, 7, 1, 114 τους οποίους και ταξινομούν σωστά ως 1, 5, 7, 114 – που είναι μια σωστή σειρά για τους ,01 ,5 7 και 11,4) Ωστόσο, μια τέτοια προσέγγιση για την περίπτωση c δίνει 205, ,60 4,25 ,565 μια λάθος σειρά τάξης μεγέθους.

Η εξοικείωση των καθηγητών με την τάση των μαθητών για υπεργενίκευση της γνώσης των ακεραίων αριθμών στους δεκαδικούς τους βοηθά να κάνουν την επιθυμητή διάκριση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 (σελ. 122)

Φανταστείτε ότι δουλεύετε με μια τάξη στον πολλαπλασιασμό μεγάλων αριθμών.

Ανάμεσα στις εργασίες των μαθητών σας, παρατηρείτε ότι κάποιοι έχουν καταγράψει την εργασία τους ως εξής:

ΜΑΘΗΤΗΣ Α	ΜΑΘΗΤΗΣ Β	ΜΑΘΗΤΗΣ Γ
35 x 25 125 75 875	35 x 25 175 700 875	35 x 25 25 150 100 600 875

Ποιος από αυτούς τους μαθητές χρησιμοποιεί μια μέθοδο που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ώστε να πολλαπλασιάζουμε δυο οποιουσδήποτε ακεραίους;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 (σελ.123)

Ενώ ετοίμαζε ένα εισαγωγικό μάθημα στους πρώτους και σύνθετους αριθμούς ο κος Rubenstein αναλογίζεται ποιους αριθμούς να χρησιμοποιήσει ως αρχικά παραδείγματα. Ανησυχεί καθώς γνωρίζει ότι η επιλογή φτωχών παραδειγμάτων μπορεί να παραπλανήσει τους μαθητές για αυτές τις σημαντικές ιδέες.

Από τις παρακάτω επιλογές ποια ομάδα αριθμών θα ήταν η καλύτερη για την εισαγωγή των πρώτων και σύνθετων αριθμών;

Πρώτοι	Σύνθετοι
a) 3, 5, 11	6, 30, 44

b) 2, 5, 17 8, 14, 32
c) 3, 7, 11 4, 16, 25
d) Όλες οι παραπάνω ομάδες είναι καλές επιλογές για την εισαγωγή των πρώτων και σύνθετων αριθμών.

Αυτό το παράδειγμα είναι σχεδιασμένο για να εξετάσει την Γνώση του περιεχομένου και την Διδασκαλία. Καθώς οι αριθμοί που δίνονται στις 4 επιλογές είναι όλοι σωστά κατηγοριοποιημένοι ως πρώτοι ή σύνθετοι, αυτό το στοιχείο εξαρτάται λιγότερο από την γνώση των καθηγητών αναφορικά με το ποιοι αριθμοί είναι πρώτοι και ποιοι σύνθετοι (Γνώση περιεχομένου) και περισσότερο στο πώς να επιλέγουν παραδείγματα και αναπαραστάσεις (μια πτυχή της διδασκαλίας) δοθέντος ότι είναι γνώστες του τρόπου σκέψης των μαθητών. Ο Hill και συνάδελφοι υποστηρίζουν ότι η επιτυχής επιλογή της κατάλληλης ομάδας εξαρτάται από την γνώση των καθηγητών ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να κατατάξουν τον αριθμό 2 στην ομάδα των πρώτων αριθμών, και τείνουν να σκέφτονται ότι «*οι μονοί αριθμοί δεν μπορεί να είναι σύνθετοι». Έ*τσι η επιλογή d με τον αριθμό 2 στην ομάδα των πρώτων αριθμών και με σύνθετο μονό αριθμό, τον 9, είναι η μόνη ομάδα που προκαλεί αυτές τις λανθασμένες ιδέες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 (σελ. 136)

ΕΝΑ ΣΕΝΑΡΙΟ ΕΝΟΣ ΔΑΣΚΑΛΟΥ ΠΟΥ ΥΠΟΔΥΕΤΑΙ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

Προτείνεται το παρακάτω σενάριο ως παράδειγμα μιας ποιοτικής αναπαράστασης του προγράμματος σπουδών. Η αφήγηση είναι μια πλασματική αναφορά της εμπειρίας ενός δασκάλου στην διδασκαλία των κλασμάτων, που βασίζεται στην έρευνά μου, το διάβασμά μου, και την ευκαιρία να παρατηρήσω κάποιους υποδειγματικούς δασκάλους εν δράσει. Προκειμένου να γίνει αυτή η συζήτηση πιο συγκεκριμένη, τοποθετώ (situate) την κα Χ που είναι έτοιμη να διδάξει την ενότητα της Σύγκρισης κλασμάτων (δηλ. ο προσδιορισμός του σχετικού μεγέθους δυο κλασμάτων) σε μια ομάδα 13-χρονων μαθητών της 7^{ης} τάξης, και να περιγράψει τα βήματα που έκανε για την προετοιμασία και διδασκαλία αυτής της θεματικής ενότητας.

1. *Τι συνέβη στα προηγούμενα μαθήματα*

Όταν η κα Χ άρχισε να διδάσκει την ενότητα των κλασμάτων σε αυτή την τάξη, γνώριζε ότι οι μαθητές της είχαν μια επαρκή κατανόηση της έννοιας μέρους-όλου των κλασμάτων. Με τον όρο αυτό, αναφέρομαι στην σύγκριση μέρους –όλου, που ο Larmon (2006) αναφέρει «*περιγράφει έναν αριθμό ισοδύναμων μερών μιας μονάδας από τον συνολικό αριθμό των ίσων μερών στην οποία η μονάδα χωρίζεται».* Η κα Χ συμπέρανε από τα διαβάσματά της ότι η ιδέα του μέρους-όλου έχει υπερτονιστεί σε πολλές τάξεις εν συγκρίσει με άλλες διδακτικές προσεγγίσεις των κλασμάτων μέτρηση, λόγος και τελεστής (Kieren, 1976 & Lamon, 2006). Η κα Χ είχε συμμετάσχει σε ένα διμερές πρόγραμμα επαγγελματικής εξέλιξης αρκετούς μήνες νωρίτερα όταν αυτές οι ιδέες είχαν συζητηθεί. Πριν από δυο μαθήματα, η δασκάλα ανέθεσε στους μαθητές μια δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος εστιασμένη σε στρατηγικές διαμέρισης. Η δραστηριότητα αποτελούνταν από τα παρακάτω: 10 μαθητές μπαίνουν μέσα στην τάξη ένας τη φορά, κι επιλέγουν τα σταθούν μπροστά από μια από τις 3 καρέκλες, η κάθε μια από τις οποίες φέρει στο κάθισμά της διαφορετικό αριθμό από σοκολάτες (μια πλάκα σοκολάτας, δυο πλάκες σοκολάτας και τρεις πλάκες σοκολάτας, αντίστοιχα), όταν όλοι οι μαθητές είναι μέσα στην αίθουσα. Πρέπει να μοιραστούν την σοκολάτα που είναι στην καρέκλα που επέλεξαν με όποιον άλλον επέλεξε την ίδια καρέκλα. Υπάρχει ένα υπόρητο συμπέρασμα αναφορικά με αυτή την δραστηριότητα, που με ευκολία είναι αποδεκτό εκ μέρους των μαθητών, ότι επιθυμητή είναι όσο περισσότερη σοκολάτα γίνεται.

Ένας κύριος σκοπός για αυτό το έργο επίλυσης προβλήματος ήταν οι μαθητές να συνειδητοποιήσουν (αν δεν το έχουν κάνει ήδη) ότι, για παράδειγμα, 3 πλάκες σοκολάτες μοιρασμένες μεταξύ 5 ανθρώπων *αυτόματα* σημαίνει ότι στον καθένα θα αναλογούσαν τα 3/5 της πλάκας της σοκολάτας, χωρίς την ανάγκη της διαμέρισης, ή να χρειαστεί να φανταστούν ότι μοιράζουν την σοκολάτα προκειμένου να καθορίσουν το μερίδιο του καθενός. Αυτή η δραστηριότητα έδωσε έμφαση στην αντιμετώπιση των κλασμάτων ως διαίρεση ή λόγος, δηλαδή ότι το a/bείναι το ίδιο με $a \div b$. Μετά το πέρας της δραστηριότητας αυτής οι μαθητές παραδέχθηκαν ότι πριν δεν είχαν ιδέα για αυτήν την έννοια, παρόλο που πολλοί είχαν μάθει την προηγούμενη χρονιά να μετατρέπουν τα κλάσματα σε δεκαδικούς με υπολογιστή τσέπης ή με το χέρι, κι άρα να αναπαριστούν αυτήν την αρχή.

Στο τέλος της δραστηριότητας προκειμένου να μεγιστοποιήσει τις πιθανότητες ότι η μαθηματική intent να είναι σαφής στους περισσότερους μαθητές, η κα Χ σχημάτισε μια οπτική εικόνα που οι μαθητές θα συγκρατούσαν ώστε να βοηθηθούν να θυμούνται την έννοια. Η δασκάλα ζήτησε από 3 μαθητές να κρατήσουν την καρέκλα με τις δυο πλάκες σοκολάτας πάνω από το κεφάλι τους. Ζήτησε από τους μαθητές να παρατηρήσουν τις 2 πλάκες πάνω από την γραμμή (η γραμμή αναπαριστά την γραμμή του κλάσματος) που ήταν πάνω από τους 3 μαθητές, και έδειξε τονίζοντας ότι «*2 πλάκες μοιρασμένες σε 3 ανθρώπους είναι 2 (χειρονομώντας) προς 3 , και άρα δυο –τρίτα*».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10 (σελ. 137)

Την επομένη η κα Χ προσπάθησε να χτίσει πάνω στην κατανόηση του *κλάσματος ως διαίρεση* (ή λόγος) με ένα άλλο παράδειγμα, αυτή τη φορά με πίτσες.

Το πρόβλημα είναι το παρακάτω:

«*Τρία αγόρια μοιράζονται μια πίτσα ισομερώς, και επτά κορίτσια μοιράζονται τρεις πίτσες ίδιου μεγέθους κι αυτές ισομερώς. Ποιος παίρνει περισσότερη πίτσα, το αγόρι ή το κορίτσι;* » Η κα Χ ενδιαφερόταν να δει πόσοι μαθητές θα έχτιζαν πάνω σε αυτά που είχαν μάθει στο προηγούμενο μάθημα, κι άρα να συγκρίνουν τα κλάσματα $1/3$ και $3/7$. Μόνο ένας μικρός αριθμός το έκανε. Στην πραγματικότητα, συνηθισμένες ήταν οι λύσεις της μορφής:

Στην περίπτωση των κοριτσιών για να είναι ισοδύναμες με τα αγόρια, 6 κορίτσια θα έπρεπε να μοιραστούν 3 πίτσες. Κι έτσι, μας περισσεύουν μια πίτσα κι ένα κορίτσι, κι άρα είναι ξεκάθαρο ότι τα κορίτσια θα πάρουν περισσότερη πίτσα κατά μέσο όρο.

Αυξάνοντας κλιμακωτά την περίπτωση των αγοριών, θα σήμαινε εννέα αγόρια και τρεις πίτσες, που μας δίνει δυο αγόρια παραπάνω για τον ίδιο αριθμό πίτσας όπως τα κορίτσια. Κι άρα τα κορίτσια παίρνουν περισσότερο.

Φυσικά αυτές οι δυο λύσεις ήταν καινοτόμες και πιο στρωτές (straightforward) από την σύγκριση των $1/3$ και $3/7$, αλλά ήταν ενδιαφέρον ότι λίγοι μαθητές είδαν τη σύνδεση με το προηγούμενο μάθημα. Κάνοντας μια σύντομη ανασκόπηση στις διαφορετικές στρατηγικές, κάποιοι μαθητές προσπάθησαν να συγκρίνουν τα $1/3$ και $3/7$, αλλά « συνάντησαν τείχος» χωρίς να είναι σίγουροι ποιος είναι μεγαλύτερος το $1/3$ ή το $3/7$;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11 (σελ.139)

Μια μεγάλη δυσκολία που οι μαθητές συναντούν είναι ότι οι περισσότεροι δεν σκέφτονται ότι τα κλάσματα έχουν «μέγεθος», αλλά μάλλον σαν ένα ακέραιο αριθμό προς ένα άλλο ακέραιο. Ακολουθεί ένα συγκεκριμένο παράδειγμα:

Ζητήθηκε από τους μαθητές να επιλέξουν «*τον πλησιέστερο ακέραιο αριθμό στο* $7/8 + 12/13$ » από τις παρακάτω επιλογές 1, 2, 19 και 21. Η πλειοψηφία των 13-χρονων στις Η.Π.Α. επέλεξε 19 ή 21, προσθέτοντας τους αριθμητές και τους παρονομαστές αντίστοιχα.

Η έρευνα προτείνει να μοιράζουν οι μαθητές τις λογικές στρατηγικές που χρησιμοποιούν με τους υπόλοιπους συμμαθητές τους. Επίσης συνιστούν περισσότερη χρήση της αριθμογραμμής, που βοηθά τους μαθητές να δουν πράγματα όπως οι σχέσεις μεταξύ ακεραίων, κλασμάτων και ποσοστών. Οι αριθμογραμμές στηρίζουν επίσης την ιδέα της πυκνότητας των ρητών αριθμών, δηλαδή ότι μεταξύ δυο οποιωνδήποτε διακριτών ρητών αριθμών, υπάρχει πάντα ένα άπειρο πλήθος ρητών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12 (σελ. 139)

Η κα Χ επέλεξε με προσοχή μια συλλογή από ζεύγη κλασμάτων, και ρώτησε αρκετούς εθελοντές (κάποιοι ήταν πιο ικανοί από κάποιους άλλους και κάποιοι τείνουν να προσεγγίζουν τα προβλήματα με καινοτόμες τρόπους) ατομικά πώς θα τα συνέκριναν. Τα ζεύγη ήταν

$5/8$ και $3/7$, $2/4$ και $4/2$, $5/6$ και $7/8$.

Είναι σημαντικό να αναφερθεί εδώ η δύναμη των προσεχτικά επιλεγμένων παραδειγμάτων στην εκμαίευση και βελτίωση της σκέψης των μαθητών και να φέρνει συνηθισμένες παρανοήσεις στο προσκήνιο. (Watson & Mason, 2005). Καθώς δούλευε με αυτούς τους μαθητές παρατήρησε ότι τα βρήκαν πολύ δύσκολα, αλλά αρκετοί χρησιμοποιούσαν κάποιες στρατηγικές που βασίζονταν στην λογική και λίγοι χρησιμοποιούσαν κοινούς παρονομαστές. Κάποιοι χρησιμοποιούσαν αυτό που η έρευνα ονομάζει *υπολειμματικές* (residual) στρατηγικές (Clarke, Sukenik, Roche & Mitchell, 2006), δηλαδή αποφασίζοντας για κάθε κλάσμα πόσο χρειάζεται ώστε να συμπληρώσει το κλάσμα την μονάδα (το «υπολειμματικό»). Για τα $5/6$ χρειάζεται μόνο $1/6$, ενώ για τα $7/8$ απαιτείται $1/8$, ένα μικρότερο υπολειμματικό, κι άρα το $7/8$ είναι μεγαλύτερο. Υπήρξαν και κάποια παραδείγματα *σημείου αναφοράς*, όπου οι μαθητές συγκρίνουν το κάθε κλάσμα με ένα πολύ γνωστό τους *αριθμό-σημείο αναφοράς*, όπως 0, ½, ή το 1. Ένας μαθητής συνέκρινε το $5/8$ με το $3/7$, σημειώνοντας ότι $3/7$ είναι κατά τι μικρότερο του $1/2$, ενώ το $5/8$ είναι κατά πολύ μεγαλύτερο του $1/2$, που είναι πολύ ενθαρρυντικό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13 (σελ. 234)

Ένα κατάλληλο έργο για την εισαγωγή στην έννοια της πιθανότητας για το δημοτικό είναι το ακόλουθο:

«Ας ρίξουμε δυο ζάρια και να θεωρήσουμε το άθροισμα των ψηφίων της άνω επιφάνειας που προκύπτουν από την κάθε ρίψη. Τι είναι προτιμότερο να ποντάρουμε με μονό ή σε ζυγό αποτέλεσμα;»

Πολλοί δάσκαλοι (συμπεριλαμβανομένων πάνω από το 1/3 αυτών που έμαθαν πιθανότητες στο Γυμνάσιο) απαντούν, «*ζυγός επειδή τα ζυγά αποτελέσματα είναι 2, 4, 6 , 8, 10, 12, ενώ τα μονά αποτελέσματα είναι 3, 5, 7, 9 και 11: μόνο 5 μονά αποτελέσματα εν σχέσει με 6 ζυγά αποτελέσματα*» . Μετά από συζήτηση, καθοδηγούμενη από τον καθηγητή (instructor) συνήθως οδηγεί τους δασκάλους στην σωστή λύση και στην επα-ανακάλυψη ότι της συνθήκης ότι τα αποτελέσματα πρέπει να είναι «ισοπίθανα», παρεμπιπτόντως παρατηρούμε ότι το ίδιο έργο είναι κατάλληλο για την προσέγγιση μιας από τις σημαντικές πτυχές της πιθανότητας στο δημοτικό.

Ένα άλλο παράδειγμα, πάλι για το δημοτικό, είναι το παρακάτω:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14 (σελ. 235)

«Ένα κουτί περιέχει 8 μετρητές αριθμημένους από το 1 ως το 8 αντίστοιχα. Επιλέγονται χωρίς επανατοποθέτηση. Οι τέσσερις πρώτοι αριθμοί που επιλέχθηκαν ήταν 1, 2, 4 και 8. Ποια είναι η πιθανότητα οι τρείς επόμενοι αριθμοί που θα επιλεγούν να είναι μονοί; »

Μια όχι κομψή, αλλά ασφαλής λύση είναι να θεωρήσουμε όλες τις δυνατότητες 3-5-7, 3-7-5, 5-3-7, 5-7-3, 7-3-5, 7-5-3, 6-3-5, 6-3-7,… μετά να υπολογίσουμε το λόγο των 6 επιθυμητών αποτελεσμάτων και των 24 δυνατών αποτελεσμάτων.

Μια άλλη στρατηγική μπορεί να βασιστεί στην έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας και στο θεώρημα της σύνθετης πιθανότητας: η πιθανότητα να πάρουμε ένα μονό αριθμό είναι 3/4 για την επιλογή του πέμπτου μετρητή, 2/3 για τον έκτο (δοθέντος ότι ο προηγούμενος ήταν μονός), 1/2 για τον έβδομο (δοθέντος ότι οι δυο προηγούμενες επιλογές ήταν μονοί αριθμοί) κι άρα η πιθανότητα να πάρουμε 3 μονούς αριθμούς στη σειρά είναι $3/4 \bullet 2/3 \bullet 1/2 = 1/4$. Θα μπορούσε κάποιος να καταλήξει στο ίδιο αποτέλεσμα αν λάβει υπόψη του ότι 1/4 είναι η πιθανότητα να επιλέξει τον μετρητή που φέρει τον αριθμό 6 ως ο τελευταίος μετρητής που θα έχει επιλεγεί.

Παρατηρήθηκε ότι οι πολλοί δάσκαλοι με ένα ευρύ υπόβαθρο στις πιθανότητες δεν επιλέγουν τον 2^{o} τρόπο τεκμηρίωσης (ακόμα κι αν ο εκπαιδευτής τους συμβουλεύει να αναζητήσουν κι «*άλλες λύσεις*»).

Για τους καθηγητές όλων των βαθμίδων προτείνεται το παρακάτω παράδειγμα «*το πείραμα του μαύρου μπουκαλιού*:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15 (σελ. 236)

Το «πείραμα του μαύρου κουτιού» μπορεί να οργανωθεί ως εξής:

Οι καθηγητές είναι χωρισμένοι σε ομάδες των 2-3 ατόμων. Κάθε ομάδα έχει ένα κλειστό μπουκάλι που περιέχει κάποιες άγνωστες ποσότητες κόκκινων και μπλε βόλων (π.χ. 6 κόκκινοι βόλοι και 4 μπλε βόλοι σε κάθε μπουκάλι). Το χρώμα είναι η μοναδική διαφορά μεταξύ των βόλων. Δεν είναι δυνατό να δουν το περιεχόμενο των μπουκαλιών. Όταν το μπουκάλι αναποδογυριστεί, είναι δυνατό να δουν μόνο ένα βώλο. Κάθε ομάδα πρέπει να αποφέρει μια συχνότητα της τάξης των 300-400 αποτελεσμάτων (σε διάστημα λιγότερο των 15 λεπτών) και μετά πρέπει να σχεδιάσουν ένα διάγραμμα των αθροιστικών συχνοτήτων (μετά από 20, 40, 60 κλπ αποτελέσματα). Τελικά απαντούν σε κάποιες ερωτήσεις :

- Ποια είναι τα χαρακτηριστικά του διαγράμματος ;
- Είναι δυνατό να μαντέψουμε τον αριθμό των κόκκινων βόλων;
- Ποια η διαφορά μεταξύ των κόκκινων και των μπλε βόλων;
- Τι πληροφορίες μπορούμε να πάρουμε από τα δεδομένα που συλλέξαμε;

Μέσα από την σύγκριση των διαγραμμάτων αθροιστικών συχνοτήτων και από τις απαντήσεις της κάθε ομάδας των καθηγητών στα παραπάνω ερωτήματα, οι καθηγητές μπορούν να συνειδητοποιήσουν ότι: «*δεν μπορούμε να συμπεράνουμε για τον αριθμό των κόκκινων βόλων στο μπουκάλι, μπορούμε μόνο να μαντέψουμε τον λόγο μεταξύ τον αριθμό των κόκκινων βόλων και του συνολικού αριθμού των βόλων που είναι μέσα στο μπουκάλι*» ή «*ο αριθμός των δοκιμών μπορεί να επηρεάσει την «σταθεροποίηση» του διαγράμματος συχνοτήτων κοντά σε μια τιμή που υποδηλώνει το λόγο μεταξύ τον αριθμό των κόκκινων βόλων και του συνολικού αριθμού των βόλων που είναι μέσα στο μπουκάλι* » ή «*η διαφορά μεταξύ του αριθμού των κόκκινων αποτελεσμάτων και των μπλε τείνει να αυξηθεί, παρόλο που ο λόγος μεταξύ των κόκκινων και των μπλε βόλων τείνει τα σταθεροποιηθεί*».

Το επόμενο βήμα είναι να απαντήσει ο κάθε καθηγητής μεμονωμένα την παρακάτω ερώτηση:

«*Σε κάποια διαγράμματα που η ομάδα παρουσίασε παρατηρούμε ότι παρόλη την αρχική υπεροχή του ενός χρώματος βόλων ή του άλλου, η τάση (όταν ο αριθμός των δοκιμών αυξάνει) είναι να προσεγγίσουμε την ίδια τιμή. Πώς μπορούμε να το εξηγήσουμε αυτό;*»

Εδώ μπορούμε να δούμε κάποιες συνηθισμένες παρανοήσεις των καθηγητών:

«*Η πιθανότητα αντισταθμίζει την αρχική υπεροχή των κόκκινων ή μπλε βόλων*» ή «*Μετά από τόσους κόκκινους βόλους, η πιθανότητα κάνει να βγουν πιο πολλοί μπλε, ώστε να υπάρξει εξισορρόπηση*». Κάποιοι άλλοι αρνούνται κατηγορηματικά τέτοιες εξηγήσεις, ωστόσο δεν μπορούν να δώσουν κάποια εξήγηση. Μόνο λίγοι γράφουν ότι : «*ο αυξανόμενος αριθμός δοκιμών έχει την αρχική υπεροχή των κόκκινων βόλων απορροφήσει μέσα στο λόγο* ».

Το τελικό βήμα συνήθως αποτελείται από μια συλλογική συζήτηση πάνω στην ερώτηση: «*Πόσες δοκιμές πρέπει να εκτελέσουμε ώστε να είμαστε βέβαιοι ότι η αναλογία των κόκκινων και των μπλε βόλων στο μπουκάλι είναι αυτή που δίνεται από το διάγραμμα συχνοτήτων;*»

Στο δημοτική εκπαίδευση των δασκάλων, στόχος της ερώτησης αυτής είναι να ενθαρρύνουμε την έννοια της «*απάντησης με βεβαιότητα*». Είναι εύκολο να βρεθεί ένα τουλάχιστον διάγραμμα, ανάμεσα στο τόσα που θα υπάρχουν μεταξύ των ομάδων, που προτείνει την υπόθεση «μάλλον διαφορετικό» έναντι των υπολοίπων. Οι δάσκαλοι μπορούν και με την βοήθεια του εκπαιδευτή τους να καταλάβουν ότι ακόμα και μετά από 3000 ή 4000 δοκιμές, πρακτικά δύσκολο για τόσο μεγάλο αριθμό δοκιμών, είναι δυνατό να προκύψει ένα διάγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων που να δείχνει (suggest) μια «σχετικά κακή» υπόθεση. Οι δάσκαλοι θα καταλάβουν ότι η έννοια της «*απάντησης με βεβαιότητα*» δεν μπορεί να είναι απόλυτη, αλλά εξαρτάται από την «*αποδεκτή απόκλιση*» (συμφυής (inherent) στην χρήση εκφράσεων όπως «μάλλον διαφορετικό»), στον αριθμό των δοκιμών, και στο «αποδεκτό ρίσκο» για την εγκυρότητα της υπόθεσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16 (σελ. 238)

Ας θεωρήσουμε το μεμονωμένο έργο*:*

«Εκτιμήστε κατά πόσο τα παρακάτω κείμενα, που γράφτηκαν από μαθητές της 9ης τάξης, που μόλις έχουν αρχίσει να ασχολούνται με αποδείξεις στα μαθηματικά κρίνονται ικανοποιητικά, ώστε να «Αποδώσουν μια γενική τεκμηρίωση, δηλ. μια μαθηματική απόδειξη, για την πρόταση: το άθροισμα δυο διαδοχικών περιττών αριθμών διαιρείται με τέσσερα.» Αιτιολογήστε την εκτίμησή σας.»

(το γράμμα p αντιπροσωπεύει τους περιττούς και το a τους άρτιους)

Δίνονται οι παρακάτω 3 αποδείξεις για συζήτηση

Απόδειξη 1

p +p +2= 2p +2 =4p

που ο 4p διαιρείται από το 4.

Απόδειξη 2

Κάνοντας κάποιες δοκιμές, όπως για παράδειγμα, 3+5, 15+17, 31+ 33, διαπίστωσα ότι πάντα παίρνω αθροίσματα που αποτελούνται από τον πρώτο περιττό αριθμό και από τον ίδιο περιττό αριθμό αυξημένο κατά δυο, και άρα παίρνω το διπλάσιο ενός μονού αριθμού συν δυο. Το αποτέλεσμα διαιρείται με τέσσερα επειδή το άθροισμα δυο ίσων περιττών αριθμών θα ήταν (από μόνο του) ένας περιττός αριθμός που διαιρείται από το δυο, αλλά αν προσθέσω δυο θα πάρω τον επόμενο ζυγό αριθμό, που διαιρείται με τέσσερα επειδή οι ζυγοί αριθμοί ακολουθούν ο ένας τον άλλον με τον κανόνα ότι αν ο ένας διαιρείται με δυο, ο επόμενός του διαιρείται με τέσσερα (όπως: 2, 4, 6, 8, 22, 24, κλπ) επειδή τα πολλαπλάσια του τέσσερα απέχουν κατά τέσσερα μεταξύ τους.

Απόδειξη 3

p= a +1 , ο επόμενος μονός αριθμός είναι ο p+2=a+3. Σχηματίζοντας το άθροισμα p+ p+ 2 που δίνει a+ a+4 διότι p+ p+ 2= a+ 1+ a+ 3= a+ a+4.

Αυτό το έργο δίνεται συστηματικά ως εισαγωγικό στην επιμόρφωση των δασκάλων καθώς και καθηγητών του Γυμνασίου. Είναι ενδιαφέρον να αναλύσουμε πώς αντιδρούν σε αυτό το έργο και να παρατηρήσουμε τις διαφορές μεταξύ των δασκάλων και των καθηγητών του Γυμνασίου. Οι περισσότεροι δάσκαλοι και καθηγητές γράφουν ότι η *Απόδειξη 2* είναι «*μια λιγότερο μαθηματική απόδειξη από ότι οι Αποδείξεις 1 και 3»* και πάνω από τους μισούς καθηγητές του Γυμνασίου λένε ότι η Απόδειξη 2 «*δεν είναι μαθηματική απόδειξη επειδή χρησιμοποιεί παραδείγματα.*»

Η συζήτηση που ακολούθησε αποκάλυψε ότι και οι δάσκαλοι και οι καθηγητές δεν συμμετείχαν στην κατανόηση της Απόδειξης 2. Η παρουσία των «αλγεβρικών αποδείξεων» 1 και 3 αποκαλύπτει τις αντιλήψεις των καθηγητών για την μαθηματική απόδειξη ως ένα φορμαλιστικό αλγεβρικό παράγωγο (παρόλο που στο Γυμνάσιο η απόδειξη στην Ευκλείδεια Γεωμετρία ήταν μια διαρκής εμπειρία προφορικής απόδειξης για όλους τους). Βλέποντας κάποια παραδείγματα στην Απόδειξη 2 (χωρίς να λάβουν υπόψη τους την πραγματική λειτουργία τους στο κείμενο) οδηγεί την πλειοψηφία των εκπαιδευτικών να σκεφτεί ότι «*η εγκυρότητα των μαθηματικών αποδείξεων δεν μπορεί να βασίζεται στα παραδείγματα*». Λίγοι καθηγητές του Γυμνασίου συνειδητοποιούν, μετά από την παρότρυνση του εκπαιδευτή τους ότι «*εδώ τα παραδείγματα έχουν μια ευρετική ή επεξηγηματική λειτουργία, δεν είναι καλά σε ένα κανονικό κείμενο απόδειξης, αλλά αυτό το κείμενο δουλεύει αρκούντως καλά ως μαθηματική τεκμηρίωση.*»

Σε αντιδιαστολή οι περισσότεροι δάσκαλοι δεν θεωρούν τα παραδείγματα ως λάθη ή ακατάλληλες στην μαθηματική απόδειξη. Όταν ο εκπαιδευτής τους προτείνει να διαβάσουν ξανά την Απόδειξη 2 απλά συμπεραίνουν ότι «*δουλεύει*» παρόλο «*που είναι λιγότερο μαθηματική εν σχέσει με τις άλλες 2* ».

Πηγαίνοντας τώρα στις Αποδείξεις 1 και 3: οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί (ακόμα και οι δάσκαλοι) αναγνωρίζουν το λάθος στην Απόδειξη 1. Οι καθηγητές του Γυμνασίου εξηγούν ότι «*ο μαθητής δεν γνωρίζει τους κανόνες των αλγεβρικών μετασχηματισμών.*» Κάτω από την έκκληση του εκπαιδευτή τους καταλήγουν να πουν «*δεν υπάρχει τίποτα να σώσεις σε αυτήν την απόδειξη.*» Οι δάσκαλοι δίνουν πιο εύκολα άφεση αμαρτιών, κάποιοι λένε ότι (εάν θεωρήσουμε ότι είχε γίνει σωστά ο αλγεβρικός μετασχηματισμός) «*4p θα έδινε το σωστό αποτέλεσμα για την διαιρετότητα με το 4*».

Η Απόδειξη 3 συνήθως επιδέχεται διαφορετικές εκτιμήσεις από τους καθηγητές του Γυμνασίου και διαφορετικές από τους δασκάλους. Το γεγονός ότι δουλεύει σωστά ο αλγεβρικός μετασχηματισμός έχει σαν αποτέλεσμα οι μισοί περίπου καθηγητές και τα περίπου τα 3/4 των δασκάλων να είναι ικανοποιημένοι με αυτήν την απόδειξη. Πολλοί λίγοι δάσκαλοι αναγνωρίζουν την έλλειψη ενός σημαντικού βήματος (η απόδειξη της διαιρετότητας του a+ a+ 2 με το 4) . Σε αντιδιαστολή, το ένα τρίτο των καθηγητών δευτεροβάθμιας μιλάνε για «*ημιτελή απόδειξη*» (άλλοι γράφουν ότι «*είχα την διαίσθηση ότι δούλευε, αλλά δεν ένιωσα την ανάγκη να κάνω τα τελευταία βήματα*»). Κατόπιν παρότρυνσης του εκπαιδευτή τους να ξαναδούν την Απόδειξη 2, οι περισσότεροι δάσκαλοι και των δυο βαθμίδων δεν συνειδητοποιούν ότι ο συγγραφέας της Απόδειξης 2 μπόρεσε (στην ουσία) να μετακινηθεί προφορικά από το μονός+μονός+2 στην πλήρη αιτιολόγηση της διαιρετότητάς του με το 4.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 17 (σελ. 241)

Για την δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ένα από τα πιο χρήσιμα έργα (χρησιμοποιείται και σε υποψήφιους καθηγητές) είναι το παρακάτω:

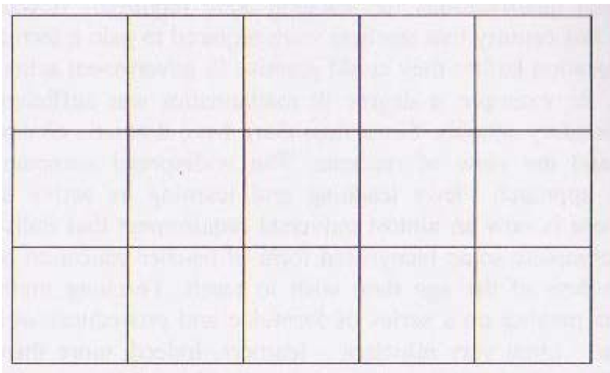
«*Γενικεύστε την πρόταση: Το άθροισμα δυο διαδοχικών περιττών αριθμών είναι διαιρετό από το 4 κι αποδείξτε την πρόταση γενίκευσης*» (δείτε Boero, Douek & Ferrari, 2002 για δυσκολίες και στρατηγικές) Η δυσκολία των καθηγητών να καταλάβουν τι θα μπορούσε να σημαίνει το «*Γενικεύστε*» σε αυτή τη περίπτωση, το πλήθος των πιθανών γενικεύσεων, η δυσκολία να αποδείξουν κάποια συμπεράσματα (που εξαρτώνται από την δυσκολία να τα μεταφράσουν σε κατάλληλες αλγεβρικές εκφράσεις) είναι αντικείμενο της CAC (Cultural Analysis of Content). Συχνά εγείρεται η παρακάτω ερώτηση από τους καθηγητές όταν ανακαλύπτουν ότι πολλές γενικεύσεις παρουσιάστηκαν από την ομάδα τους: «*Ποια είναι τα κριτήρια ώστε να αποφασίσουμε ότι πρόκειται για μια γενίκευση με νόημα; Και ποιος αποφασίζει ότι αυτά είναι μαθηματικά;*»

Στο τέλος των δραστηριοτήτων προκύπτει από τις προφορικές παρεμβάσεις τους και τα γραπτά τους ότι οι πεποιθήσεις τους στην συναγωγή συμπερασμάτων και την απόδειξη, έχουν τουλάχιστον μερικώς επαναπροσδιοριστεί: κάτω από ανοιχτά έργα

(«*Γράψτε τις ανακαλύψεις σας, επίμονες δυσκολίες, αμφιβολίες, ανοιχτού τύπου ερωτήσεις* ») τα κείμενα των καθηγητών δείχνουν ότι οι δραστηριότητες έθεσαν υπό αμφισβήτηση κάποια ακλόνητα πιστεύω: («*τώρα νιώθω πολύ πιο άνετα να γράψω τις σκέψεις μου και τις λύσεις μου στα μαθηματικά: οι δάσκαλοι μου πάντα με αποθάρρυναν να το κάνω αυτό, με το κίνητρο ότι έπρεπε να μάθω την μαθηματική γλώσσα, και το ίδιο αναπαρήγαγα και με τους μαθητές μου*» και συνέβαλαν στο άνοιγμα νέων παραθύρων για παραπέρα μάθηση («*μου φαίνεται ότι καλά επιλεγμένα αριθμητικά παραδείγματα μπορούν να δουλέψουν σαν γενεσιουργά (generic) παραδείγματα στην γεωμετρία από την οπτική της ανακάλυψης δομικών γεγονότων: λέω σωστά;*») με την οπτική της μεταφοράς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 18 (σελ. 248)

Ο δάσκαλος μπορεί να παρουσιάσει ένα ορθογώνιο 3x5, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα , να το περιστρέψει κατά 90^o ώστε να επιδείξει την αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού, δηλαδή 3x5= 5x3.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 19 (σελ. 251)

Ένας μαθητής έλυσε τις παρακάτω ασκήσεις ως εξής:

10 + 4 x 2 = 28

10 x 4 + 2 = 42

10 - 4 - 2 = 4

10 – 4 : 2 = 3

1. Διόρθωσε την εργασία του
2. Εξήγησε τα λάθη του
3. Δώσε μερικά ακόμα παραδείγματα που θα σε βοηθήσουν να διαγνώσεις τις γνώσεις του.
4. Ποιες είναι οι προαπαιτούμενες δεξιότητες που απαιτούνται για τα παραπάνω;
5. Πρότεινε πώς θα διδάξεις αυτό το παιδί

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 20 (σελ. 254)

Ένα δοχείο σχήματος κύβου έχει πλευρές με μήκη 0,5m 0,8 m και 0,25m. Για να γεμίσει μια δεξαμενή με 4 m^2 νερό χρειάζεται να χρησιμοποιηθεί το παραπάνω δοχείο 40 φορές.

Απαντήστε: αυτό είναι Αληθές / Ψευδές (επιλέξτε την σωστή απάντηση και εξηγήστε/ δείξτε γιατί)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21 (σελ. 283)

Απαντώντας στις ιδέες των μαθητών

<u>Επεξηγηματικό Επεισόδιο 1</u>

Ο Jason δίδασκε τις στοιχειώδεις έννοιες των κλασμάτων σε μαθητές της 3ης τάξης (7-8 ετών). Ο κάθε μαθητής είχε ένα μικρό ορθογώνιο λευκό πινακάκι κι αντίστοιχο μαρκαδόρο. Ο δάσκαλος τους ζήτησε να «μοιράσουν» το πίνακά τους στα δυο. Οι περισσότεροι μαθητές σχεδίασαν μια γραμμή από το μέσον του ορθογωνίου, παράλληλα σε μια από τις πλευρές του ορθογωνίου, αλλά ένα αγόρι, ο Elliot, σχεδίασε τη μια διαγώνιο. Ο δάσκαλος τον επαίνεσε για την πρωτοτυπία του, και μετά ζήτησε από την τάξη να χωρίσει ο καθένας το πίνακά του στα τέσσερα. Και πάλι, τα περισσότερα παιδιά σχεδίασαν δυο γραμμές παράλληλες στις πλευρές, αλλά ο Elliot σχεδίασε τις δυο διαγωνίους. Η ερώτηση που έθεσε ο δάσκαλος είχε στόχο να τραβήξει την προσοχή της τάξης κι αυτή να αποφασίσει αν η λύση του Elliot ήταν σωστή ή όχι. Ρωτά:

Δασκ.: Αυτό που έκανε ο Elliot σε τι διαφέρει από αυτό που έκανε η Rebecca;

Sophie: Έφερε τις διαγωνίους.

Δασκ.: ποια από τα δύο έχουν χωριστεί ισομερώς; (*Απευθύνεται σε ένα μαθητή*). Sam, ο Elliot χώρισε τον πίνακά του σε τέταρτα;

Sam: Χμ…ναι….όχι…

Δασκ.: η πρόκλησή σας για αυτό το μάθημα είναι να σκεφτείτε αυτό που έκανε ο Elliot και να σκεφτείτε αν το χώρισε σε 4 ίσα μέρη.

Αυτό που το κάνει ενδιαφέρον από μαθηματικής άποψης είναι ότι

1. τα τέσσερα μέρη που ο Elliot χώρισε το πίνακά του δεν είναι ίσα
2. είναι ισοδύναμα
3. δεν είναι προφανές και
4. μια στοιχειώδης επίδειξη της περίπτωσης 2 είναι ακόμα λιγότερο προφανής.

Επεξηγηματικό Επεισόδιο 2

Η Naomi εισήγαγε στην 1η τάξη (μαθητές 5-6 ετών) την αφαίρεση δομή «σύγκρισης» . Έθεσε ποικίλα προβλήματα σύγκρισης στο πλαίσιο 2 βατράχων σε μια λίμνη. Μαγνητάκια με μορφή βατράχων έχουν τοποθετηθεί στον πίνακα σε 2 σειρές. Στο πρώτο πρόβλημα, η Naomi λέει ότι η λιμνούλα της έχει 4 βατράχια και του γείτονά της έχει 2. Η τάξη συμφώνησε ότι είχε 2 παραπάνω βατράχια από του γείτονά της. Τότε ο Hugh πρότεινε:

Hugh: αν δώσεις ένα στο γείτονά σου θα έχετε και οι δυο από τρία βατράχια.

Όπως και στην περίπτωση του Jason η Naomi παραδέχτηκε την ιδέα του παιδιού, αλλά απέφυγε να δώσει παραπέρα έκταση στο θέμα και στις εναλλακτικές οδούς που αυτό πιθανό να οδηγούσε.

Η Naomi αποδέχεται την παρατήρηση του παιδιού, αλλά αρνείται να αλλάξει πορεία στο μάθημά της. Μπορεί κάποιος να δει ότι αν ήταν αρκετά γενναία (ή με αυτοπεποίθηση ή απερίσκεπτη) είχε την εναλλακτική να πάρει το σχόλιο του Hugh ως σημείο εκκίνησης μιας μάλλον καλής έρευνας. Σχεδόν σίγουρα θα έφερνε στην επιφάνεια την διερεύνηση της διαφοράς μεταξύ δυο αριθμών, όπως και παίρνοντας το μισό, η έννοια του αριθμητικού μέσου, και την διάκριση μεταξύ άρτιων και περιττών αριθμών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22 (σελ. 285)

Ο Bishop αναφέρει ένα ανέκδοτο για μια τάξη μαθητών 9-10 ετών που τους ζητήθηκε να δώσουν ένα κλάσμα μεταξύ του 1/2 και 3/4 . Μια μαθήτρια απάντησε 2/3. Όταν ο δάσκαλος την ρώτησε κατά πόσο γνωρίζει ότι το 2/3 είναι αναμεταξύ τους, η μαθήτρια απάντησε: «Γιατί στον αριθμητή μεταξύ του 1 και του 3 είναι το 2 και στον παρονομαστή αντίστοιχα είναι το 3. »

Αυτή την ιστορία την αναφέρει ο Bishop διότι είναι ένα παράδειγμα των «αποσκευών»- οι τρόποι με τους οποίους σκεφτόμαστε για τον κόσμο γενικά και για τις τάξεις των μαθηματικών ειδικά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (σελ. 41)

Ένα παράδειγμα από ένα επεισόδιο διδασκαλίας

Ο ΛΟΓΟΣ ΤΩΝ ΑΓΟΡΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΚΟΡΙΤΣΙΩΝ

Συχνά ανοίγω συζήτηση με τα παιδιά της $7^{ης}$ τάξης μου και βρίσκω τον εαυτό μου τελείως απροετοίμαστο για τις ερωτήσεις που μου θέτουν. Δεν είναι ότι νιώθω ότι πρέπει να έχω όλες τις απαντήσεις, αλλά θέλω να γίνεται παραγωγική συζήτηση.

Σε ένα πρόσφατο μάθημα όπου εισήγαγα την έννοια της αναλογίας, είχα γράψει το κλάσμα $\frac{1}{2}$ στο πίνακα και υπενθύμισα στους μαθητές μου ότι σήμαινε *«1 διαιρείται με το 2»* αλλά και «*ένα δεύτερο*.»

«*Είναι και πρόβλημα διαίρεσης και λόγος διότι υποδηλώνει σύγκριση δυο αριθμών – των 1 και 2,* » εξήγησα. «*Ας συγκρίνουμε* τον αριθμό των αγοριών και των κοριτσιών στην τάξη μας.» Η τάξη κατέληξε ότι υπήρχαν 17 κορίτσια και 15 αγόρια.

«Ποιος είναι ο λόγος των κοριτσιών προς τα αγόρια;»

Αρκετοί μαθητές φώναξαν, *«17 προς 15»*. Έγραψα το κλάσμα $\frac{17}{15}$ στον πίνακα.

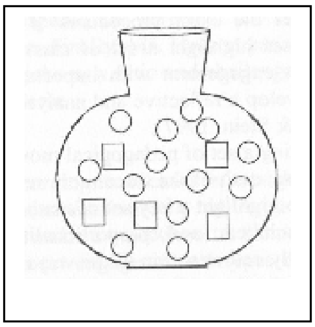
Η Κάρμεν φώναξε, «*Αυτό δεν μπορεί να είναι σωστό. Είπες ότι ένα κλάσμα σημαίνει ότι το πάνω διαιρείται με το κάτω. Αυτό θα είναι μεγαλύτερο από όλη την τάξη.*»

Η Λώρα παρατήρησε, «*Και είπες ότι μπορούμε να πούμε, «προς»- 17 δέκατα πέμπτα. Αυτό δεν μου φαίνεται σωστό- 17 δέκατα πέμπτα αγόρια προς κορίτσια*»

Συνειδητοποίησα ότι δεν ήμουν και πολύ ξεκάθαρη στον εαυτό μου πώς τα κλάσματα και οι λόγοι σχετίζονταν μεταξύ τους ή ποιο ρόλο παίζει το πλαίσιο στην περιγραφή των αναλογιών. Αυτές ήταν καλές ερωτήσεις και δεν ήμουν σίγουρος πώς να τις διαχειριστώ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (σελ. 44-45)

Η Marie Hanson και οι μαθητές της εξερευνούν αρκετά προβλήματα μα καραμέλες στο βάζο που αναφέρονται στην κατασκευή ισοδύναμων λόγων διακριτών αντικειμένων και αναζήτηση της ποσότητας που λείπει στις αναλογίες όταν η μια ποσότητα δεν δίνεται. Οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί μια μέθοδο εύρεσης της ποσότητας που λείπει κι άρα πρέπει να επινοήσουν τις δικές τους στρατηγικές αντί να εφαρμόσουν κανόνες που έχουν αποστηθίσει κι άρα χωρίς νόημα γι΄ αυτούς:



1.Το δοχείο περιέχει καραμέλες ορθογώνιες και καραμέλες κυκλικές στο σχήμα.

Ποιος είναι ο λόγος των ορθογωνίων προς τις κυκλικές καραμέλες;

Γράψε όσο πιο πολλούς λόγους μπορείς που να είναι ισοδύναμοι με το πρώτο λόγο που έγραψες πριν.

2. Αν υποθέσουμε ότι έχεις ένα μεγαλύτερο βάζο με τον ίδιο λόγο ορθογωνίων προς κυκλικές καραμέλες (5 προς 13), αλλά περιείχε 100 ορθογώνιες καραμέλες, πόσες θα ήταν τώρα οι κυκλικές καραμέλες;

Κατά την διάρκεια της συζήτησης με όλη την τάξη ένας μαθητής, ο Jordan, έδωσε ως λύση στο δεύτερο πρόβλημα την παρακάτω: «*αφού για να πάρουμε 100 ορθογώνιες καραμέλες πρέπει στις αρχικές 5 να προσθέσουμε 95, τον ίδιο αριθμό θα προσθέσω και στις κυκλικές καραμέλες κι έτσι θα έχω συνολικά 108 από αυτές.*»

Η καθηγήτρια ρωτά: *«Συμφωνείτε με τον Jordan;»* Ο Jerry, προθυμοποιήθηκε να απαντήσει λέγοντας ότι δεν συμφωνούσε καθώς *«το πρόβλημα τόνιζε ότι το νέο βάζο είχε τον ίδιο λόγο ορθογώνιων προς κυκλικών καραμελών και ότι ο λόγος στην απάντηση του Jordan ήταν κοντά στη μονάδα, κάτι που δεν ίσχυε στο αρχικό βάζο – 5 προς 13.* » Και συνεχίζει : «*Αν η μια ορθογώνια καραμέλα γίνεται 100, σημαίνει ότι θα την έχουμε πολλαπλασιάσει με 100. Κι άρα και οι 2.6 κυκλικές καραμέλες θα πρέπει να πολλαπλασιαστούν κι αυτές με 100. Εγώ πολλαπλασίασα και τους 2 αριθμούς με 100, ενώ εσύ πρόσθεσες.* »

Η καθηγήτρια επέλεξε αρχικά ένα μαθητή να παρουσιάσει μια λάθος στρατηγική και προσκαλεί την τάξη να πάρει θέση. Θέτει μια ερώτηση που «χτίζει» πάνω στην παρατήρηση του Jordan αναφορικά με το νέο λόγο και προκαλεί την τάξη να ελέγξει τις 2 λύσεις των μαθητών χρησιμοποιώντας αυτά τα κριτήρια.

Στην επίλυση του δεύτερου προβλήματος οι καθηγητές γενικά χρησιμοποιούν μια από τις 4 στρατηγικές (1) αλλαγή του παράγοντα (δηλ. αφού είναι 20-πλάσιος ο αριθμός των ορθογωνίων καραμελών το ίδιο θα πρέπει να ισχύει και για τις κυκλικές καραμέλες) , (2) αυξάνοντας κλιμακωτά (κατασκευή ισοδύναμων κλασμάτων με το 5: 13, όπως 10:26 , 100:260 με την χρήση ενός πίνακα αναλογιών ή με άλλα μέσα), (3) αναγωγή την μονάδα (4) πολλαπλασιασμός χιαστί.

Παρόλο που φαίνεται να είναι ένα απλό έργο, συχνά αποκαλύπτει τις παρανοήσεις των καθηγητών αναφορικά με τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις καθώς και την περιορισμένη κατανόηση που έχουν για τον αλγόριθμο του χιαστί πολλαπλασιασμού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 (σελ 52)

<u>Ο αριθμός που λείπει</u>

Ζητήθηκε από ένα μαθητή να λύσει την παρακάτω άσκηση:

$$35- [\ ] =12$$

Ο μαθητής είπε στον καθηγητή:

Θα κάνω 35 + 12 γιατί εδώ έχεις «μείον» και χρειάζεται να κάνω την αντίθετη πράξη, κι έτσι χρησιμοποιώ το «συν.»

Πώς θα απαντούσες;

Διαίρεση με υπόλοιπο

Ζητήθηκε από ένα μαθητή να συμπληρώσει το σωστό σύμβολο < ή = ή > στην παρακάτω παράσταση:

$$59 \div 42 \qquad \mathbf{?} \qquad 359 \div 342$$

Ο μαθητής απάντησε ότι θα βάλει το σύμβολο της ισότητας διότι:

$59 \div 42 = 1$ *υπόλοιπο* 17.

$359 \div 342 = 1$ *υπόλοιπο* 17.

Κι άρα και στις δυο ασκήσεις η απάντηση είναι 1 και το υπόλοιπο είναι 17, και γι' αυτό είναι ίσα.

Πώς θα του απαντούσατε;

Ύψος

Ρώτησαν ένα μαθητή την παρακάτω ερώτηση:

«*Το ύψος ενός δεκάχρονου αγοριού είναι 1.5 m. Ποιο νομίζεις ότι θα είναι το ύψος του όταν γίνει 20 χρονών;*» Ο μαθητής απάντησε : «*Στα μαθηματικά θα είναι 3 m, διότι* $\lfloor 1.5 \times 2 = 3 \rfloor$ *και στην καθημερινή ζωή θα είναι περίπου 1.8 m.*»

Πώς θα του απαντούσες;

Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις ενθαρρύνουν τους καθηγητές να αναπτύξουν θέματα παιδαγωγικού περιεχομένου όπως: τι καταλαβαίνει και τι δεν καταλαβαίνει ο μαθητής, πώς θα έπρεπε να απαντήσεις ο μαθητής και ποια θα ήταν η πιο αποτελεσματική απάντηση;. Κάποιες επίσης εγείρουν θέματα μαθηματικού περιεχομένου που μπορεί να είναι προκλητικά για τους καθηγητές ή ασαφή. Κι έτσι η εστίαση σε τέτοια θέματα είναι μαθηματικού περιεχομένου. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα με το υπόλοιπο της διαίρεσης κάποιοι μπορεί να υποστηρίξουν ότι ο μαθητής απάντησε σωστά και ότι θα έπρεπε να χρησιμοποιηθεί το σύμβολο της ισότητας καθώς οι δυο απαντήσεις είναι ίδιες. Άλλοι, παρόλο που καταλαβαίνουν ότι η κατάσταση δείχνει μια λάθος τοποθέτηση του συμβόλου της ισότητας, μπορεί να προτείνουν ότι η απάντηση του μαθητή είναι σωστή αν είναι σε μικρή τάξη, καθώς δεν θα γνωρίζει να διαιρεί χωρίς να δηλώνει (state)το υπόλοιπο.

Η περίπτωση με το ύψος εστιάζει σε πεποιθήσεις των μαθητών αναφορικά με τα μαθηματικά και την καθημερινή ζωή, η δυνατότητα να έχουμε δυο διαφορετικές απαντήσεις – μια μαθηματική και μια από την καθημερινή ζωή και η ενσωμάτωση της καθημερινής ζωής στα μαθηματικά.

Παρακάτω δίνονται κάποιες απαντήσεις καθηγητών στο παράδειγμα με την Διαίρεση με υπόλοιπο (κάποιες επινοημένες από τον συγγραφέα με στόχο να φωτίσει κάποια θέματα, ενώ κάποιες άλλες είχαν πράγματι προταθεί από εκπαιδευτικούς στην διάρκεια των διάφορων συζητήσεων). Ζητήθηκαν οι αντιδράσεις των καθηγητών σε αυτές τις «άλλες απαντήσεις».

Κάθε μια από τις 3 απαντήσεις των καθηγητών εισάγει ένα πιθανό μαθηματικό λάθος. Η τέταρτη απάντηση εγείρει ένα δίλημμα: είναι η απάντηση σωστή αν είναι στην 3^η τάξη, ενώ δεν ισχύει το ίδιο αν είναι στην 6^η; Η 5^η απάντηση δίνεται από ένα καθηγητή που γνωρίζει τα μαθηματικά που εμπλέκονται, αλλά δεν καταλαβαίνει τι δεν κατανοεί ο μαθητής. Στην τελευταία απάντηση ο καθηγητής βάζει το δάχτυλο στην ακριβή δυσκολία που εκφράζεται από το μαθητή και χρησιμοποιεί μικρούς αριθμούς και πίτσες για να εκφράσει το νόημα του Υπολοίπου.

1. θα δεχτούμε την απάντηση. Ζητήθηκε από το μαθητή να συμπληρώσει το σύμβολο. Δεν του ζητήθηκε να απαντήσει, αλλά παρέθεσε μια λογική εξήγηση. Ίσως αν μπορούσε να σκεφτεί με διαφορετικό τρόπο, θα μπορούσε ένα βρει την απάντηση κάνοντας υπολογισμούς. Θα μπορούσε να παρατηρήσει τους αριθμούς.

59	42
359	342

Ο ίδιος αριθμός (3) προστέθηκε και στο Διαιρετέο και στο Διαιρέτη. Έτσι παίρνουμε την ίδια απάντηση.

2. Η απάντηση είναι σωστή, αλλά θα έπρεπε να λύσεις την άσκηση ως εξής:

1.17 1.17

$59 \div 42 = 359 \div 3$

3. Ο μαθητής κάνει λάθος. Θα του εξηγήσω ότι η απάντηση σε αυτό το πρόβλημα είναι:

$59 \div 42 = 1\frac{17}{59}$ και $359 \div 342 = 1\frac{17}{59}$, επειδή διαιρούμε και το υπόλοιπο.

4. Ένας μαθητής στην 2^η ή 3^η τάξη μπορεί να βάλει το σύμβολο της ισότητας, αλλά ένας μαθητής μεγαλύτερης τάξης θα έπρεπε να γνωρίζει ότι η διαίρεση του 17 με το 42 δεν είναι το ίδιο με την διαίρεση του 17 με το 342.

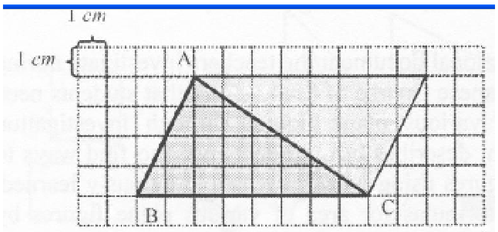
5. Πριν να ελέγξουμε αν η απάντηση είναι σωστή ή λάθος, θα ρωτήσω το μαθητή και όλη τη τάξη: Ποιο είναι μεγαλύτερο το $\frac{1}{2}$ ή το $\frac{1}{4}$;

Όταν ο μαθητής θα ισχυριστεί ότι $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$, θα τον ρωτήσω ποιο είναι τώρα μεγαλύτερο $\frac{10}{40}$ ή το $\frac{10}{20}$ και γιατί; Ο μαθητής θα απαντήσει ότι όταν οι αριθμητές είναι ίσοι, μεγαλύτερο είναι το κλάσμα με τον μικρότερο παρονομαστή. Μετά θα τον ρωτήσω: Ποιο είναι μεγαλύτερο $\frac{17}{342}$ ή το $\frac{17}{42}$; Φυσικά η απάντηση θα είναι: $\frac{17}{342} < \frac{17}{42}$. Το συμπέρασμα είναι ότι $59 \div 42 > 359 \div 342$ κι άρα η απάντηση του μαθητή είναι λάθος.

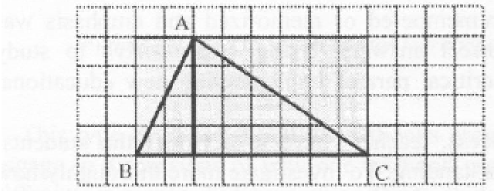
6. Κατά την άποψη μου ο μαθητής δεν κατανοεί την έννοια του υπολοίπου. Ακόμα κι να είναι ο μαθητής στην 3η τάξη, είναι σημαντικό να δουλέψει ο δάσκαλος μαζί του την έννοια του υπολοίπου αλλά με παραδείγματα που έχουν μικρούς αριθμούς. Για παράδειγμα: $3 \div 2 = 1$ και υπόλοιπο 1, $5 \div 4 = 1$ και υπόλοιπο 1. Θα του μιλήσω για πίτσες. Αν έχω 3 πίτσες και θέλω να τις μοιράσω σε 2 παιδιά ή αν έχω 5 πίτσες που θέλω να τις μοιράσω σε 4 παιδιά. Θα καταναλώσουν οι μαθητές και στις περιπτώσεις την ίδια ποσότητα πίτσας; Στη κάθε περίπτωση, το κάθε παιδί θα καταναλώσει μια ολόκληρη πίτσα αλλά στην 1η περίπτωση στο κάθε παιδί αναλογεί κι άλλη μισή πίτσα, ενώ στην 2η από ένα τέταρτο. Θεωρώ πως κι ένα παιδί του νηπιαγωγείου μπορεί να το καταλάβει αυτό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 (σελ. 96)

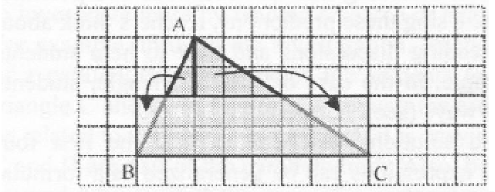
Στην περίπτωση του εμβαδού του τριγώνου, οι μαθητές μπορεί να λύσουν το πρόβλημα με ποικίλους τρόπους:



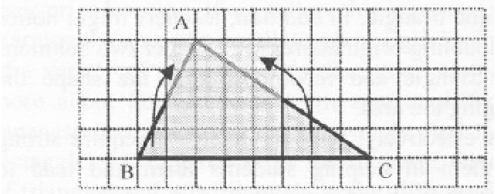
Σχετίζοντας το τρίγωνο με το παραλληλόγραμμο προσθέτοντας ένα ισοδύναμο τρίγωνο (διπλασιασμός του εμβαδού) $(8\times 4)\div 2 = 16$



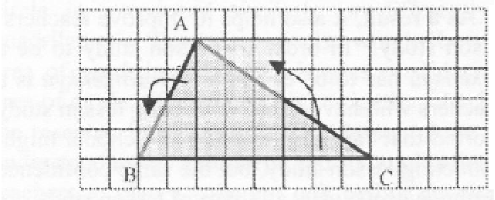
Σχετίζοντας το τρίγωνο με το ορθογώνιο προσθέτοντας ισοδύναμα τρίγωνα(διπλασιασμός του Εμβαδού) $(8\times 4)\div 2 = 16$



Σχετίζοντας το τρίγωνο με το ορθογώνιο αποσυναρμολογώντας το σχήμα και αναδιατάσσοντας το χωρίς να αλλάζει το Εμβαδό. $8\times(4\div 2) = 16$



Σχετίζοντας το τρίγωνο με το τετράγωνο αποσυναρμολογώντας το σχήμα και αναδιατάσσοντας το χωρίς να αλλάζει το Εμβαδό. $(8\div 2)\times 4 = 16$



Σχετίζοντας το τρίγωνο με το τετράγωνο και το ορθογώνιο αποσυναρμολογώντας το σχήμα και αναδιατάσσοντας το χωρίς να αλλάζει το Εμβαδό. $(2\times 2)+(3\times 4) = 16$

Γνωρίζοντας οι καθηγητές τις αναμενόμενες απαντήσεις των μαθητών μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις 4 πρώτες περιπτώσεις ώστε να δείξουν πώς οι μαθηματικές εκφράσεις μπορούν να γενικευθούν σε ένα τύπο. Επίσης μπορεί οι καθηγητές να αποφασίσουν ότι η πρώτη λύση είναι αυτή που πρέπει όλοι οι μαθητές να καταλάβουν, ακόμα και οι χαμηλού επιπέδου, γιατί είναι ο πιο απλός τρόπος να βρει κάποιος το εμβαδό του τριγώνου. Επιπροσθέτως, μπορεί οι καθηγητές να παρατηρήσουν ότι οι 2 πρώτες λύσεις περιέχουν το διπλασιασμό του αρχικού εμβαδού, ενώ οι επόμενες δυο αποσυνθέτουν το αρχικό τρίγωνο, κι επανασυνθέτονται στο σχήμα που οι μαθητές ήδη γνωρίζουν, χωρίς να αλλάζει το εμβαδό.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.