



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ  
*επένδυση στην κοινωνία της γνώσης*  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ  
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ 2007-13\Ε.Π. Ε&ΔΒΜ\Α.Π. 1-2-3  
«ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21<sup>ου</sup> αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, Οριζόντια Πράξη» MIS: 295450  
Με συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης (Ε. Κ. Τ.)

# Πρόγραμμα Σπουδών

Μαθηματικά στην Δευτεροβάθμια  
Εκπαίδευση (Γυμνάσιο)

2011





ΕΣΠΑ 2007-13\Ε.Π. Ε&ΔΒΜ\Α.Π. 1-2-3

**«ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21<sup>ου</sup> αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, Οριζόντια Πράξη» MIS: 295450**  
**Με συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης (Ε. Κ. Τ.)**

Το παρόν έργο έχει παραχθεί από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο στο πλαίσιο υλοποίησης της Πράξης «*ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο πρόγραμμα σπουδών, στους Άξονες Προτεραιότητας 1,2,3, -Οριζόντια Πράξη*», με κωδικό MIS 295450 και ειδικότερα στο πλαίσιο του Υποέργου 1: «*Εκπόνηση Προγραμμάτων Σπουδών Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και οδηγιών για τον εκπαιδευτικό «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων*».

Επιστημονικό Πεδίο: **Μαθηματικά**

**Υπεύθυνη Επιστημονικού Πεδίου:**

**Πότση Δέσποινα**, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Τμήματος Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών

**Εμπειρογνώμονες Εκπόνησης του Προγράμματος Σπουδών**

1. **Αθανασιάδης Ηλίας**, Αναπληρωτής Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε., Πανεπιστήμιο Αιγαίου
2. **Βρυώνης Κωνσταντίνος**, Εκπαιδευτικός Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης
3. **Βερούκιος Πέτρος**, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
4. **Γεωργιάδου – Καμπουρίδη Βαρβάρα**, Σχολικός Σύμβουλος Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης
5. **Γλένης Σπυρίδων**, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
6. **Ζαχαριάδης Θεοδόσιος**, Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών
7. **Ζυμπίδης Δημήτριος**, Σχολικός Σύμβουλος Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης
8. **Θωμαΐδης Ιωάννης**, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
9. **Καλδρυμίδου Μαρία**, Καθηγήτρια Τμήματος Νηπιαγωγών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
10. **Κασκαντάμης Μιχαήλ**, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
11. **Κασώτη Όλγα**, Εκπαιδευτικός Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης

12. **Καφούση Σουλτάνα**, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Τμήματος Επιστημών Προσχολικής Αγωγής και Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού του Πανεπιστημίου Αιγαίου
13. **Κλιάπης Πέτρος**, Σχολικός Σύμβουλος Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης
14. **Κλώθου Άννα**, Εκπαιδευτικός Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης
15. **Κολέζα Ευγενία**, Καθηγήτρια Π.Τ.Δ.Ε., Πανεπιστήμιο Πατρών
16. **Κυνηγός Χρόνης**, Καθηγητής Φ.Π.Ψ, Πανεπιστήμιο Αθηνών
17. **Λεμονίδης Χαράλαμπος**, Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε., Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
18. **Μαρκόπουλος Χρήστος**, Λέκτορας, Π.Τ.Δ.Ε, Πανεπιστήμιο Πατρών
19. **Μεταξάς Νικόλαος**, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
20. **Παγγέ Πολυξένη**, Καθηγήτρια Τμήματος Νηπιαγωγών, Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
21. **Παπασταυρίδης Σταύρος**, Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών
22. **Πετροπούλου Γεωργία**, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
23. **Σακονίδης Χαράλαμπος**, Αναπληρωτής Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε., Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης
24. **Σδρόλιας Κωνσταντίνος**, Εκπαιδευτικός Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης
25. **Σκούρας Αθανάσιος**, Σύμβουλος Π.Ι. για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση
26. **Σταματόπουλος Κωνσταντίνος**, Εκπαιδευτικός Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης
27. **Στουραϊτής Κωνσταντίνος**, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
28. **Τζεκάκη Μαριάννα**, Καθηγήτρια Τμήματος Νηπιαγωγών, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
29. **Τριανταφυλλίδης Τριαντάφυλλος**, Αναπληρωτής Καθηγητής, Π.Τ.Δ.Ε., Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
30. **Τύπας Γεώργιος**, Σύμβουλος Π.Ι. για την Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση
31. **Φακούδης Ευάγγελος**, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
32. **Χριστοδούλου Ιφιγένεια**, Εκπαιδευτικός Προσχολικής Εκπαίδευσης
33. **Ψυχάρης Γεώργιος**, Λέκτορας Τμήματος Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών

## ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b> .....	1
<b>ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</b> .....	1
Στόχοι μάθησης και διδασκαλίας.....	3
Στόχοι μάθησης στα μαθηματικά: ανάπτυξη βασικών ικανοτήτων .....	4
Στόχοι μάθησης στα μαθηματικά: ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης .....	6
Στόχοι μάθησης στα μαθηματικά: ανάπτυξη ιδιαίτερων μαθηματικών διεργασιών .....	6
<b>ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</b> .....	10
Τροχιές μάθησης και διδασκαλίας στα σχολικά μαθηματικά	10
Βασικά μαθηματικά περιεχόμενα .....	12
Επιλογή και χρήση εργαλείων .....	26
Μαθηματική δραστηριότητα .....	27
Συνθετική εργασία .....	28
Αξιολόγηση.....	29
Πίνακες θεματικών ενοτήτων – Κωδικοί – Σύμβολα .....	31
<b>ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΕΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΟΤΗΤΩΝ (Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα- Βασικά θέματα- Δραστηριότητες- Εκπαιδευτικό Υλικό)</b> .....	34
<b>Τρίτος Ηλικιακός Κύκλος</b>	
Πίνακας Θεματικών Ενοτήτων Α΄ Γυμνασίου .....	34
Πίνακας Θεματικών Ενοτήτων Β΄ Γυμνασίου .....	51
Πίνακας Θεματικών Ενοτήτων Γ΄ Γυμνασίου .....	68
Συνθετικές εργασίες Τρίτου Κύκλου .....	82
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ</b> .....	111



## **ΕΙΣΑΓΩΓΗ**

Το νέο πρόγραμμα σπουδών για τα μαθηματικά που προτείνεται είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς μελών μιας επιτροπής εμπειρογνομόνων με εμπειρίες που πηγάζουν από την ερευνητική τους ενασχόληση με τα Μαθηματικά και τη Διδακτική των Μαθηματικών ή/και από την πολύχρονη διδασκαλία τους στη σχολική τάξη και στην αρχική και συνεχιζόμενη εκπαίδευση. Η διαφορετική οπτική, συχνά συμπληρωματική, των μελών της επιτροπής οδήγησε σε ένα πρόγραμμα που θεωρούμε ότι έχει από τη μια μεριά έναν επιστημονικό προσανατολισμό που στηρίζεται στη διεθνή έρευνα και εμπειρία σχετικά με τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών και από την άλλη τη δυνατότητα να μπορεί να εφαρμοστεί στην πράξη. Το βασικό κίνητρο όλων των μελών της επιτροπής ήταν να συμβάλλουν στην αναβάθμιση της ποιότητας της μαθηματικής εκπαίδευσης στην υποχρεωτική εκπαίδευση στην Ελλάδα. Γνωρίζουμε όμως ότι το πρόγραμμα σπουδών είναι μόνο η αφετηρία για μια τέτοια αναβάθμιση και ελπίζουμε ότι ο συνδυασμός του με την ανάπτυξη κατάλληλου εκπαιδευτικού υλικού και παροχής συνεχούς εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών να μπορέσει να κάνει πιο ουσιαστική και ενδιαφέρουσα τη μαθηματική εμπειρία των μαθητών. Το πρόγραμμα απευθύνεται άμεσα στον εκπαιδευτικό θεωρώντας τον ως επιστήμονα που σχεδιάζει τη διδασκαλία του, κάνει επιλογές τεκμηριωμένες και έχει μια συνολική εικόνα της μαθησιακής πορείας των μαθητών του.

Αναφορικά με τη δομή του κειμένου, αρχικά παρουσιάζονται οι βασικές αρχές του προγράμματος σπουδών όπου καθορίζονται οι στόχοι της διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών καθώς και οι βασικές ικανότητες, δεξιότητες και διεργασίες που αναμένεται οι μαθητές να αποκτήσουν. Στη συνέχεια αναλύεται η δομή ανάπτυξης του προγράμματος εστιάζοντας στον τρόπο ανάπτυξης του περιεχομένου μέσα από τον καθορισμό τριών βασικών θεματικών αξόνων. Επίσης αναλύονται για κάθε βασική θεματική περιοχή η σημασία της, οι βασικές έννοιες και διεργασίες καθώς και η εξέλιξη τους στη διάρκεια της υποχρεωτικής εκπαίδευσης εστιάζοντας στις βασικές μεταβάσεις ανά ηλικιακό κύκλο. Στη δομή ανάπτυξης συμπεριλαμβάνεται η βασική φιλοσοφία ένταξης εργαλείων (χειραπτικών και ψηφιακών) στη διδασκαλία των μαθηματικών, των διδακτικών προσεγγίσεων (όπως της «δραστηριότητας» και της «συνθετικής εργασίας») καθώς και της διαδικασίας της αξιολόγησης. Ακολουθεί ανά τάξη πίνακας όπου παρουσιάζονται τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα, τα βασικά περιεχόμενα, οι ενδεικτικές δραστηριότητες και το προτεινόμενο εκπαιδευτικό υλικό για κάθε θεματικό άξονα. Οι ενδεικτικές δραστηριότητες συνοψίζονται σε πίνακα και αντιστοιχίζονται με τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα. Στο τέλος του κάθε ηλικιακού κύκλου παρουσιάζονται παραδείγματα συνθετικών εργασιών, μέρος των οποίων αξιοποιούν ψηφιακά εργαλεία. Τέλος δίνεται ένα παράδειγμα εργαλείου αξιολόγησης που μπορεί να χρησιμοποιηθεί «διαμορφωτικά» και «τελικά» και ακολουθεί ενδεικτική λίστα βιβλιογραφικών αναφορών που χρησιμοποιήθηκαν.

## **ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Κάθε προσπάθεια συγκρότησης ενός Προγράμματος Σπουδών για τα μαθηματικά βρίσκεται άμεσα αντιμέτωπη με μια σειρά από ερωτήματα που συχνά περιορίζονται στην επιλογή του περιεχομένου του: ποιες μαθηματικές γνώσεις είναι σημαντικό

να αναπτύξουν όλοι οι μελλοντικοί πολίτες; Ποια κριτήρια θα μπορούσαν να υιοθετηθούν για την επιλογή τους; Ποιες από τις γνώσεις που εμπεριέχονται στο ισχύον Πρόγραμμα Σπουδών χρειάζεται να εξαιρεθούν; Απαντήσεις σε αυτά και άλλα, ανάλογα ερωτήματα, παρά τη δυσκολία που παρουσιάζουν, προσδιορίζουν σε μεγάλο βαθμό την ταυτότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης που επιχειρείται να αναπτυχθεί στις εκάστοτε κοινωνικές και πολιτισμικές συνθήκες. Η αποτύπωση των βασικών στοιχείων αυτής της ταυτότητας πρέπει να αναζητηθεί στα κεντρικά χαρακτηριστικά και στη δυναμική της νοητικής δράσης που είναι επιθυμητό να αναπτυχθεί από τους μαθητές σε σχέση με το μαθηματικό περιεχόμενο.

Τα μαθηματικά αποτελούν ένα ιδιαίτερο αντικείμενο μάθησης. Αναγνωρισμένα ως ένας από τους πλέον κρίσιμους τομείς του ανθρώπινου πολιτισμού, εξαιτίας του εξαιρετικά ισχυρού τρόπου ερμηνείας του κόσμου που προσφέρουν, με σημαντική συνεισφορά στην ανάπτυξη της ατομικής αλλά και της συλλογικής σκέψης παγκοσμίως, κατέχουν κεντρική θέση στα Προγράμματα Σπουδών της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Αυτό καθιστά την επιτυχημένη σχολική μαθητεία σε αυτά καθοριστικό παράγοντα της γνωστικής και, κατ' επέκταση, της ακαδημαϊκής ανάπτυξης και της επαγγελματικής ανέλιξης κάθε πολίτη. Ωστόσο, η αφαιρετική τους φύση, η αυστηρότητα και η πολυπλοκότητα των εμπλεκόμενων ιδεών και της οργάνωσής τους, καθώς και η προβληματική τους προσέγγιση στο σχολείο εμποδίζουν πολλούς μαθητές, συχνά αυτούς που ανήκουν σε ευάλωτες κοινωνικές ομάδες, να επιτύχουν στα μαθηματικά και να αναπτύξουν θετικά συναισθήματα για αυτά.

Ποια είναι, όμως, εκείνα τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που καθιστούν τα μαθηματικά ένα τόσο ξεχωριστό αντικείμενο μάθησης και, κατά συνέπεια, και διδασκαλίας; Κατ' αρχήν, η ενεργή και εντατική εμπλοκή στην προσπάθεια επίλυσης ενός προβλήματος, ο ιδιαίτερος τρόπος μελέτης και επίλυσης προβλημάτων και ο επεξεργασμένος γλωσσικός και συμβολικός κώδικας έκφρασης των νοημάτων που χαρακτηρίζουν την αυθεντική μαθηματική δραστηριότητα. Το μαθηματικό περιεχόμενο προσφέρει απλώς το πλαίσιο για την ενεργοποίηση αυτών των στοιχείων και αποκτά σημασία στο βαθμό που συμβάλλει στην ισχυροποίησή τους προς την κατεύθυνση της επαν-ανακάλυψης της μαθηματικής γνώσης από τον μαθητευόμενο.

Η μαθηματική σκέψη προϋποθέτει την ικανότητα διαχείρισης των βασικών δομικών στοιχείων των μαθηματικών, όπως είναι οι έννοιες, οι ιδιότητές τους και οι τρόποι τεκμηρίωσης του μαθηματικού συλλογισμού, με τρόπο που να καθιστά φανερές τις σχέσεις των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών μεταξύ τους, δηλαδή, τη θέση τους σε ένα δίκτυο ιδεών. Ένα τέτοιο δίκτυο δημιουργείται γύρω από μια «θεμελιώδη ιδέα». Για παράδειγμα, στην περίπτωση της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων, η «θεμελιώδης ιδέα» είναι η έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων, η οποία στηρίζεται σε μια άλλη «θεμελιώδη ιδέα», ότι, οι αριθμοί, διατηρώντας την αξία τους, μπορούν να αναπαρασταθούν με διάφορους τρόπους, ως κλάσματα, ως δεκαδικοί, ως ποσοστά κ.ά.

Η συνεκτικότητα και η συνοχή που χαρακτηρίζουν τη μαθηματική επιστήμη και συνεισφέρουν στην ισχύ και στο εύρος των εφαρμογών της οφείλεται σε αυτό ακριβώς το γεγονός, δηλαδή, ότι τα μαθηματικά είναι μια επιστήμη δομών, η



κατανόηση των οποίων χαρακτηρίζει αυτό που ονομάζουμε μαθηματικό τρόπο σκέψης και συλλογισμού.

Οι σύγχρονες θεωρήσεις στο πεδίο της Μαθηματικής Εκπαίδευσης υποδεικνύουν ότι ένα σημερινό Πρόγραμμα Σπουδών για τα μαθηματικά οφείλει να αποθαρρύνει την έμφαση στην απλή γνώση και την εφαρμογή εννοιών και διαδικασιών, επενδύοντας στη μελέτη των συνδέσεων μεταξύ τους και στην ανάπτυξη μαθηματικών ικανοτήτων, στάσεων και πεποιθήσεων που θα βοηθήσουν τους μαθητές να αντιμετωπίσουν με αποτελεσματικό τρόπο προβλήματα μέσα στα μαθηματικά και μέσω των μαθηματικών. Μια τέτοια προσέγγιση αντανακλά την πορεία συγκρότησης της ίδιας της επιστήμης των μαθηματικών, δηλαδή, την προσπάθεια ερμηνείας και κατανόησης του κόσμου.

### **Στόχοι μάθησης και διδασκαλίας**

Η αναζήτηση γενικών στόχων της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών απασχόλησε και συνεχίζει να απασχολεί τους ερευνητές της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Μια σημαντική εξέλιξη σε αυτήν την κατεύθυνση υπήρξε η πρόταση του Winter (1975) (στο Wittmann, 2005) για την υιοθέτηση τέτοιων στόχων, που υπακούουν στις παρακάτω τρεις αρχές:

- Μετάβαση από τα «μαθηματικά – έτοιμο προϊόν» στη «μαθηματοποίηση» και στις διαδικασίες που τη συγκροτούν: «διερεύνηση», «συλλογισμός» και «επικοινωνία».
- Αποδοχή, ως βασικής διδακτικής αρχής, της μάθησης μέσω ανακάλυψης.
- Ανάδειξη της συμπληρωματικότητας της “καθαρής” και της “εφαρμοσμένης” άποψης των μαθηματικών.

Οι παραπάνω αρχές ανέδειξαν μια από τις κυρίαρχες σήμερα στοχεύσεις των Προγραμμάτων Σπουδών για τα μαθηματικά, του *μαθηματικού γραμματισμού*. Πρόκειται για την ικανότητα κάποιου α) να αναλύει, να ερμηνεύει και να επεμβαίνει στο κοινωνικό του περιβάλλον, χρησιμοποιώντας ως εργαλείο τα μαθηματικά και β) να αναλύει και ερμηνεύει τον τρόπο που χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά για τη λήψη αποφάσεων στο κοινωνικό περιβάλλον. Έτσι, ένα “μαθηματικά εγγράμματο” άτομο:

- Αντιλαμβάνεται ότι “οι μαθηματικές έννοιες, οι δομές και οι ιδέες έχουν εφευρεθεί ως εργαλεία για να οργανώσουν τα φαινόμενα του φυσικού, κοινωνικού και πνευματικού κόσμου” (Freudenthal, 1983),
- Διαθέτει την “ικανότητα να κατανοεί, να κρίνει, να δημιουργεί και να χρησιμοποιεί τα μαθηματικά σε μια ποικιλία ενδο- και εξω-μαθηματικών πλαισίων και καταστάσεων, στις οποίες τα μαθηματικά παίζουν ή θα μπορούσαν να παίξουν κάποιο ρόλο” (Niss, 1996, 2003)) και, έτσι, μπορεί να λειτουργήσει κριτικά σε μια δημοκρατική κοινωνία.

Μια δεύτερη κεντρική στόχευση που προκύπτει από τη σύγχρονη θέαση της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι η ανάγκη διδασκαλίας *αξιοποιήσιμων μαθηματικών*, δηλαδή, μαθηματικών που βοηθούν το μαθητεύόμενο να κατανοήσει και να οργανώσει αποτελεσματικά τόσο την πραγματικότητά του όσο και τα ίδια τα μαθηματικά. Σε αυτήν την κατεύθυνση, αποκτά ιδιαίτερη σημασία η σύνδεση της

άτυπης με την τυπική γνώση των μαθηματικών, με τρόπο που να ενθαρρύνει την οικοδόμηση μιας διαλεκτικής σχέσης μεταξύ τους.

Συνοψίζοντας, τα σύγχρονα ερευνητικά δεδομένα αναγνωρίζουν την ανάγκη στόχευσης ενός Προγράμματος Σπουδών για τα μαθηματικά της υποχρεωτικής εκπαίδευσης στη μάθηση μαθηματικών που είναι χρήσιμα για όλους τους μαθητές και «παραμένουν μαθηματικά». Σε αυτήν την κατεύθυνση, κεντρική επιδίωξη της αντίστοιχης διδασκαλίας θα πρέπει να είναι η ανάδειξη των βασικών χαρακτηριστικών της μαθηματικής γνώσης: της γενίκευσης, της βεβαιότητας, της ακρίβειας και της συντομίας.

### **Στόχοι μάθησης στα μαθηματικά: ανάπτυξη βασικών ικανοτήτων**

Η υποχρεωτική μαθηματική εκπαίδευση στοχεύει στη συγκρότηση σκεπτόμενων πολιτών, ορισμένοι από τους οποίους θα συνεχίσουν, ενδεχομένως, τη μελέτη των μαθηματικών σε υψηλότερα επίπεδα. Για την επιτυχία αυτού του στόχου στις σύγχρονες πολύπλοκες κοινωνικές, οικονομικές και πολιτισμικές συνθήκες, είναι αναγκαία η ανάπτυξη κάποιων, καταρχήν, *γενικών ικανοτήτων και δεξιοτήτων*, οι οποίες συνδέονται οριζοντίως με όλα τα γνωστικά αντικείμενα που εμφανίζονται στα Προγράμματα Σπουδών της υποχρεωτικής εκπαίδευσης και περιγράφονται, στη συνέχεια, συνοπτικά:

- Η ικανότητα *αποτελεσματικής χρήσης εργαλείων, κοινωνικο-πολιτισμικών (γλώσσας, συμβόλων, κειμένων) και ψηφιακών*. Τα διάφορα «εργαλεία» ενέχουν πολλαπλές ερμηνείες και είναι απαραίτητα για έναν ενεργό διάλογο με το περιβάλλον.
- Η ικανότητα *αλληλεπίδρασης και συνεργασίας σε ετερογενείς ομάδες*. Είναι σημαντικό για το άτομο να μπορεί να κατανοεί τη σκέψη και τη στάση των άλλων, να επιλύει συγκρούσεις, να διαχειρίζεται διαφορές και αντιφάσεις, να υπερβαίνει πολιτισμικές διαφορές, να εξισορροπεί μεταξύ της δέσμευσης για την ομάδα και της προσωπικής του αυτονομίας.
- Η ικανότητα *αυτόνομης και υπεύθυνης λειτουργίας*. Τα άτομα χρειάζεται να είναι σε θέση να λειτουργούν όχι μόνον στο πλαίσιο μιας ομάδας αλλά και αυτόνομα, να μπορούν να υπερασπίζονται τις απόψεις τους, να συνειδητοποιούν τα όρια και τις ανάγκες τους, να αναζητούν πληροφορίες και να αξιολογούν τις πηγές προέλευσής τους, να αξιολογούν τη μάθησή τους, να κατανοούν και να νοηματοδοτούν την εμπειρία τους (μεταγνώση).

Οι παραπάνω γενικές ικανότητες μπορούν να αναλυθούν σε επιμέρους ικανότητες και δεξιότητες, ιδιαίτερα σημαντικές για τον σύγχρονο πολίτη.

Ένας σκεπτόμενος, ενεργός πολίτης χρειάζεται να διαθέτει *ικανότητα λήψης αποφάσεων και επίλυσης προβλημάτων*. Για παράδειγμα, αν εξαιρέσουμε τα «σχολικά» προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στα μαθηματικά, όπου δίνονται όλες οι πληροφορίες για την επίλυσή τους και ο δρόμος προς τη λύση είναι συνήθως μονόδρομος, στην πραγματική ζωή, τα περισσότερα προβλήματα χαρακτηρίζονται από ασάφεια, έλλειψη δεδομένων, ή περίσσεια στοιχείων. Προκειμένου να επιλυθεί ένα τέτοιο πρόβλημα, πρέπει καταρχήν να κατανοηθεί.

Η *κατανόηση* ενός προβλήματος δεν είναι απλή διαδικασία, καθώς προϋποθέτει μια σειρά από σημαντικές δεξιότητες, όπως *διαχείρισης της πολυπλοκότητας*

(αναγνώριση και ανάλυση κανονικοτήτων, εντοπισμός αναλογιών μεταξύ των γνωστών και νέων καταστάσεων), *διάκρισης* (αναγνώριση σχετικών και άσχετων στοιχείων σε σχέση με μια κατάσταση ή έναν στόχο) και *επιλογής* (επιλογή μεταξύ διάφορων ενδεχομένων σε σχέση με τον επιδιωκόμενο στόχο).

Αφού κατανοηθεί, το πραγματικό πρόβλημα πρέπει να μετατραπεί, στη συνέχεια, σε μαθηματικό πρόβλημα, προκειμένου να αναζητηθούν τα κατάλληλα εργαλεία (σύμβολα, αλγόριθμοι, τεχνολογικά εργαλεία) επίλυσής του. Αυτή η διαδικασία, γνωστή ως *μαθηματικοποίηση ή μοντελοποίηση*, συνιστά βασική ικανότητα που πρέπει να διαθέτει κάθε άτομο. Εφόσον βρεθεί η λύση, πρέπει να καταγραφεί και, συχνά, να δημοσιοποιηθεί. Επομένως, χρειάζεται μια γλώσσα επικοινωνίας των σκέψεων και των επιχειρημάτων πάνω στις οποίες στηρίχτηκε ο συλλογισμός επίλυσης. Η *ικανότητα επικοινωνίας* είναι θεμελιώδης τόσο για αυτόν που παρουσιάζει μια λύση όσο και για εκείνον που τη δέχεται. Βασικό της χαρακτηριστικό είναι ότι απαιτεί συχνά μετατροπή μιας μορφής αναπαράστασης σε μια άλλη (π.χ., από πίνακα σε διάγραμμα). Συνεπώς, η *ικανότητα έκφρασης με χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων* και (συμπληρωματικά) η *ικανότητα ανάλυσης και ερμηνείας δεδομένων* συνιστούν δυο σημαντικές ικανότητες που πρέπει να διαθέτει κάθε πολίτης.

Η συνεργασία διευκολύνει την επίλυση προβλημάτων. Όμως, για να ευδοκιμήσει, χρειάζεται οι ενδιαφερόμενοι να οικοδομήσουν οικειοθελώς ένα πλαίσιο εμπιστοσύνης και αλληλοκατανόησης. Η σύγχρονη βιβλιογραφία υποδεικνύει ότι οι κοινότητες πρακτικής που συγκροτούνται στη βάση αμοιβαίων σχέσεων εμπιστοσύνης χαρακτηρίζονται από δημιουργικότητα και καινοτομία (Wenger et al., 2002). Επομένως, η *ικανότητα συνεργασίας στο πλαίσιο μιας ομάδας* και η *ικανότητα επικοινωνίας και διατύπωσης συλλογισμών και επιχειρημάτων* αποτελούν σημαντικά εφόδια για κάθε άτομο σε όλη τη διάρκεια της ζωής του.

Οι ικανότητες που περιγράφηκαν παραπάνω μπορεί να θεωρηθούν ως «βασικές», καθώς αποτελούν ενοποίηση θεμελιωδών γνώσεων, δεξιοτήτων, δυνατοτήτων και στάσεων ενός ατόμου και έχουν ένα ευρύ πεδίο εφαρμογής. Αυτή η συνύπαρξη γνωστικών και συναισθηματικών χαρακτηριστικών είναι δυναμική, εξελίσσεται κατά τη διάρκεια της ζωής του ατόμου και του επιτρέπει να αντιμετωπίζει καταστάσεις με ετοιμότητα και αποτελεσματικότητα. Κεντρικός, λοιπόν, στόχος της εννιάχρονης μαθηματικής εκπαίδευσης θα πρέπει να είναι η προσφορά ευκαιριών στους μαθητές να αναπτύξουν τις συγκεκριμένες βασικές ικανότητες, ώστε να είναι σε θέση να λειτουργήσουν κριτικά και δημιουργικά μέσα στα μαθηματικά αλλά και έξω από αυτά, σε καθημερινές καταστάσεις των οποίων η αντιμετώπιση απαιτεί μαθηματικά εργαλεία.

Συνοψίζοντας, αν και η επιλογή των περιεχομένων είναι ένα κρίσιμο ζήτημα για τους σχεδιαστές των Προγραμμάτων Σπουδών για τα μαθηματικά, η στήριξη των μαθητών, για να αναπτύξουν τις βασικές ικανότητες και τα εργαλεία που θα τους βοηθήσουν να αποδώσουν νόημα και να κατανοήσουν σε βάθος τις «θεμελιώδεις ιδέες» που διατρέχουν όλο το Πρόγραμμα Σπουδών φαίνεται να συνιστά ζήτημα αιχμής, καθώς προσφέρει εκείνη την υποδομή που μπορεί να στηρίξει αποτελεσματικά τη διαπραγμάτευση και τη συγκρότηση του μαθηματικού νοήματος από αυτούς.

### **Στόχοι μάθησης στα μαθηματικά: ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης**

Είναι γενικά αποδεκτό ότι, βασική προϋπόθεση ανάπτυξης των βασικών ικανοτήτων που αναφέρθηκαν παραπάνω αποτελεί η διαμόρφωση *θετικής διάθεσης / στάσης / έξης απέναντι στη διαδικασία μάθησης των μαθηματικών*. Στη βιβλιογραφία αναφέρονται μια σειρά από χαρακτηριστικά και εκδηλώσεις τέτοιων στάσεων, όπως η περιέργεια, η δεκτικότητα σε νέες ιδέες, η φαντασία, η δημιουργική αμφισβήτηση, ο σκεπτικισμός. Γενικά, τα χαρακτηριστικά αυτά αποτελούν προϋπόθεση για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης που μπορεί να ειπωθεί με βάση τις τρεις παρακάτω συνιστώσες της:

- *Δημιουργική σκέψη*: Ανοιχτός νους (σκέψη πέραν του προφανούς, περιορισμός προκαταλήψεων, διατύπωση υποθέσεων, αναγνώριση προοπτικής), περιέργεια (προϋπόθεση ενεργής εμπλοκής σε διαδικασία ανακάλυψης).
- *Αναστοχαστική σκέψη*: Μεταγνώση (ρύθμιση και αυτοέλεγχος νοητικής και φυσικής δράσης)
- *Κριτική σκέψη*: Προσπάθεια κατανόησης της κατάστασης (διερεύνηση και αξιολόγηση των διαθέσιμων στοιχείων, αναζήτηση σχέσεων μεταξύ των στοιχείων για την ενίσχυση της ενδεχόμενης θεωρίας, έλεγχος της θεωρίας για αντιπαραδείγματα και αντιφάσεις, αναζήτηση εναλλακτικών ερμηνειών), ανάπτυξη στρατηγικής δράσης / μεθόδου (διατύπωση σαφών στόχων και ανάπτυξη μιας υποθετικής διαδρομής επίτευξης τους) και επιφυλακτικότητα (διερεύνηση πέρα από τα δεδομένα, αναζήτηση ενδείξεων/αποδείξεων, μη άκριτη αποδοχή).

### **Στόχοι μάθησης στα μαθηματικά: ανάπτυξη ιδιαίτερων μαθηματικών διεργασιών**

Εκτός των γνωστικών και των συναισθηματικών χαρακτηριστικών, η εργασία στην τάξη των μαθηματικών οφείλει να προσφέρει τους μαθητές τη δυνατότητα να αναπτύξουν μια σειρά από μεθοδολογικά χαρακτηριστικά που διέπουν τη διαδικασία συγκρότησης της μαθηματικής γνώσης. Σε αυτήν την κατεύθυνση, ένας πρώτος σημαντικός στόχος είναι η μαθητεία σε *διαδικασίες πειραματισμού, διερεύνησης, διατύπωσης και ελέγχου υποθέσεων*.

Ο πειραματισμός υπήρξε πάντα και συνεχίζει να συνιστά μια σημαντική μέθοδο μαθηματικής ανακάλυψης. Εντούτοις, πολύ συχνά αποκρύπτεται, στη λογική μιας παράδοσης που θέλει οι μαθηματικοί ερευνητές να παρουσιάζουν μόνο κομψά, πλήρως αναπτυγμένα και αυστηρά τεκμηριωμένα αποτελέσματα. Αυτή η αντίληψη μεταφέρεται και στις σχολικές τάξεις: αφενός, ο χρόνος που δίνεται στους μαθητές για διερεύνηση είναι συνήθως περιορισμένος, αφετέρου τα προϊόντα της διερευνητικής διαδικασίας δεν οργανώνονται με τέτοιο τρόπο, ώστε οι μαθητές να διαμορφώσουν ολοκληρωμένα σχήματα των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών. Απλές ιδέες, όπως η συστηματική καταγραφή δεδομένων, η οργάνωσή τους σε πίνακα, οι δοκιμές με μικρούς αριθμούς, οι εναλλακτικές διατυπώσεις του προβλήματος κ.τ.λ. δεν αποτελούν μέρος της “κουλτούρας” των μαθητών κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων. Αντίθετα, ενθαρρύνονται να θυμηθούν στρατηγικές που έχουν εφαρμόσει με επιτυχία σε παρόμοιες καταστάσεις, ώστε να τις επαναλάβουν άκριτα.

Η *επίλυση προβλήματος* αποτελεί τον πυρήνα της διαδικασίας ανάπτυξης της

μαθηματικής γνώσης και του μαθηματικού τρόπου σκέψης. Οι μαθητές μαθαίνουν καλύτερα, όταν τους δίνεται η ευκαιρία να διερευνήσουν οι ίδιοι μαθηματικές ιδέες μέσω επίλυσης προβλημάτων, καθώς η εμπλοκή τους στη συγκεκριμένη διαδικασία τους βοηθά να “κατασκευάσουν” προοδευτικά τη μαθηματική τους γνώση, εμβαθύνοντας εννοιολογικά σε αυτήν και συνειδητοποιώντας τη λειτουργική της πτυχή αλλά και την πολιτισμική και ιστορική της διάσταση. Επομένως, η κατάλληλη επιλογή δραστηριοτήτων αποτελεί κομβικό σημείο για τη μάθηση των μαθηματικών. Αναγνωρίζοντας αυτόν τον κεντρικό ρόλο της διαδικασίας επίλυσης προβλήματος, η σχετική βιβλιογραφία προτείνει α) τη διδασκαλία των μαθηματικών μέσω της επίλυσης προβλήματος αλλά και για την επίλυση προβλημάτων και β) την ανάδειξη της επίλυσης προβλήματος σε κεντρικό στόχο του Προγράμματος Σπουδών για τα μαθηματικά, με έμφαση στις στρατηγικές επίλυσής του.

Σημαντική στιγμή κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων και, γενικά, κατά την επεξεργασία μαθηματικών ερωτημάτων αποτελεί ο *αναστοχασμός*, μια διαδικασία που αφορά τη σκέψη του ατόμου σχετικά με την προηγούμενη δράση του και δεν ενεργοποιείται αυθόρμητα. Χαρακτηρίζει συνήθως τους “καλούς λύτες” προβλημάτων, γιατί μέσω αυτής έχουν τη δυνατότητα να ελέγξουν την ισχύ και το εύρος εφαρμογής των λύσεων που προτείνουν, και, ενδεχομένως, να αναθεωρήσουν τον τρόπο σκέψης τους. Μέσω κατάλληλων ερωτήσεων, ακόμα και πολύ μικροί μαθητές μπορούν να ασκηθούν στη χρήση της αναστοχαστικής διαδικασίας, η οποία απαιτεί χρόνο και τη διατύπωση ερωτήσεων που να αποτελούν έναυσμα για τη μεταγνωστική ανάπτυξη των μαθητών.

Τέλος, μια ακόμη σημαντική πτυχή των μαθηματικών συνδέεται με το ρόλο, τη σημασία και τη διαχείριση της φυσικής και της συμβολικής γλώσσας έκφρασης των μαθηματικών ιδεών. Μάλιστα, πολλοί ισχυρίζονται ότι τα μαθηματικά είναι μια γλώσσα, με τα δικά της σύμβολα και τους δικούς της ιδιαίτερους κώδικες επικοινωνίας. Οι μαθητές χρειάζεται να είναι σε θέση να *διαχειρίζονται αποτελεσματικά αυτή τη γλώσσα, όχι μόνον σε επίπεδο συμβόλων, αλλά κυρίως σε επίπεδο διατύπωσης λογικών σχέσεων και επιχειρημάτων*. Συγκεκριμένα, χρειάζεται να είναι σε θέση να δίνουν ακριβείς περιγραφές των βημάτων που ακολουθούν σε μια διαδικασία σκέψης, να διατυπώνουν επιχειρήματα και να τα εκφράζουν με σαφήνεια, ώστε να γίνονται κατανοητά από τους άλλους και, γενικότερα, να μπορούν να αποτυπώνουν τα αποτελέσματα της εργασίας τους τόσο στη φυσική γλώσσα όσο και με χρήση μαθηματικών συμβόλων αλλά και άλλων μέσων αναπαράστασης (π.χ., διαγράμματα, δυναμικά ψηφιακά δομήματα, κ.ά.). Η ικανότητα για επικοινωνία στα μαθηματικά και για τα μαθηματικά αποτελεί βασικό στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Συνοψίζοντας όλα τα προηγούμενα, το τρέχον Πρόγραμμα Σπουδών για τα μαθηματικά, υιοθετώντας τόσο μια γνωστική όσο και μια κοινωνικοπολιτισμική θέαση των μαθηματικών, επιδιώκει, κυρίως, οι μαθητές:

- να αποκτήσουν την ικανότητα διατύπωσης και επίλυσης προβλημάτων μέσα στα μαθηματικά και μέσω αυτών και
- να διαμορφώσουν μια θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά, εκτιμώντας την κοινωνική και την αισθητική τους προοπτική αλλά και το ρόλο τους στην ανάπτυξη του ανθρώπινου πολιτισμού.

Η υλοποίηση των παραπάνω στόχων επιχειρείται να διασφαλιστεί μέσα από τέσσερις βασικές διεργασίες: α) του μαθηματικού συλλογισμού και της επιχειρηματολογίας, β) της δημιουργίας συνδέσεων/ δεσμών, γ) της επικοινωνίας μέσω της χρήσης εργαλείων, με βασικότερο τη φυσική γλώσσα, αλλά και τα σύμβολα, τις διάφορες μορφές αναπαράστασης, τα τεχνουργήματα και τα εργαλεία της τεχνολογίας και δ) της μεταγνωστικής ενημερότητας. Το περιεχόμενο και ο κεντρικός προσανατολισμός των τεσσάρων αυτών διεργασιών περιγράφονται στη συνέχεια.

*Διεργασία συλλογισμού και επιχειρηματολογίας:* Η διαδικασία του μαθηματικού συλλογισμού περιλαμβάνει τη διερεύνηση φαινομένων, τη διατύπωση και τον έλεγχο υποθέσεων και τη συγκρότηση τεκμηριωμένων επιχειρημάτων (μια μορφή των οποίων είναι η τυπική μαθηματική απόδειξη). Ο μαθηματικός συλλογισμός χρησιμοποιείται, προφανώς, κατά την επίλυση προβλημάτων αλλά η χρήση του είναι ευρύτερη. Αποτελεί τον κορμό της επικοινωνίας στην τάξη των μαθηματικών και συνεισφέρει ουσιαστικά στην κατανόησή τους. Ο δάσκαλος των μαθηματικών έχει χρέος να βοηθήσει τους μαθητές του να περάσουν από τις άτυπες διαισθητικές τους συλλογιστικές διαδικασίες σε πιο τυποποιημένες μορφές συλλογισμού. Για να το πετύχει χρειάζεται να έχει την ικανότητα να επιλέγει τις κατάλληλες ερωτήσεις που θα παροτρύνουν τους μαθητές να σκεφτούν σχετικά με θέματα που έως τότε θεωρούσαν προφανή (π.χ. σχετικά με το αν ο “πολλαπλασιασμός μεγαλώνει, ενώ η διαίρεση μικραίνει το αποτέλεσμα”).

*Διεργασία δημιουργίας συνδέσεων:* Σημαντικό στοιχείο του μαθηματικού συλλογισμού και, γενικά, του μαθηματικού τρόπου σκέψης αποτελεί η ικανότητα δημιουργίας συνδέσεων. Οι μαθητές κατανοούν σε βάθος τα μαθηματικά, όταν συνειδητοποιούν τις σχέσεις μεταξύ μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, όταν συνειδητοποιούν ότι τα μαθηματικά είναι μια επιστήμη που συγκροτείται στη βάση λογικών σχέσεων και δομών. Είναι σημαντικό το Πρόγραμμα Σπουδών να παρέχει ευκαιρίες στους μαθητές να δημιουργούν συνδέσεις μέσα στα μαθηματικά και μεταξύ των μαθηματικών και άλλων επιστημονικών περιοχών και του πραγματικού κόσμου.

*Διεργασία επικοινωνίας:* Οι μαθητές επικοινωνούν με διάφορους τρόπους (προφορικά, εικονικά, γραπτά), για διάφορους λόγους και για διαφορετικά ακροατήρια (συμμαθητές, δάσκαλοι, γονείς). Μέσω της επικοινωνίας μπορούν, όχι μόνο να εκφραστούν αλλά και να αναστοχασθούν πάνω στον τρόπο σκέψης τους και τον τρόπο σκέψης των συνομηθών τους. Η από κοινού δημιουργία νοήματος επιτρέπει τη συνεργασία, τη σε βάθος κατανόηση εννοιών και διαδικασιών, την αποσαφήνιση των ιδεών και την ανάλυση των επιχειρημάτων που ανταλλάσσονται.. Το Πρόγραμμα Σπουδών οφείλει να προσφέρει ευκαιρίες για επικοινωνία στους μαθητές, προβλέποντας σχετικές δραστηριότητες, όπου να δίνεται έμφαση στη σωστή χρήση της φυσικής και συμβολικής γλώσσας και στη σταδιακή απομάκρυνση από υποκειμενικές, άτυπες εκφράσεις για την περιγραφή μαθηματικών εννοιών, σχέσεων και διαδικασιών.

*Διεργασία επιλογής και χρήσης εργαλείων:* Η χρήση τεχνουργημάτων (artifacts), απτικών και ψηφιακών, και η σταδιακή μετατροπή τους σε νοητικά εργαλεία αποτελεί κοινή πρακτική στην ιστορία των μαθηματικών: άβακας, διαβήτη, κ.λπ.

αποτελούν την ενσωμάτωση αφηρημένων εννοιών, όπως ο αριθμός/ η αξία θέσης και ο κύκλος.

Είναι σαφές ότι η απλή παρουσία εργαλείων (π.χ., ψηφιακών) δεν διασφαλίζει την κατασκευή της γνώσης, καθώς πολλοί μαθητές δυσκολεύονται στη χρήση τους (ακόμα και σε απλές περιπτώσεις, όπως του διαβήτη ή του μοιρογνωμονίου), ενώ συχνά η λειτουργική τους ενσωμάτωση στη διαδικασία μάθησης αποδεικνύεται μια εξαιρετικά δύσκολη υπόθεση. Οι μαθητές χρειάζεται να ενθαρρυνθούν να ξεπεράσουν αυτές τις δυσκολίες, να αναπτύξουν την ικανότητα να επιλέγουν απτικά και ψηφιακά εργαλεία και στρατηγικές που θα τους επιτρέψουν να ασκήσουν αυθεντική μαθηματική δράση (όπως είναι η αποτελεσματική διατύπωση και διερεύνηση εικασιών και προβλημάτων, η κατάλληλη αναπαράσταση μιας μαθηματικής ιδέας και η μοντελοποίηση μιας κατάστασης). Τέλος, είναι σημαντικό να γνωρίζουν τη σχέση μεταξύ των διαφόρων συστημάτων αναπαράστασης (πχ. εικονικές, γεωμετρικές, συμβολικές κ.λ.π.), να αποκτήσουν σταδιακά την ικανότητα της μετάβασης από ένα σύστημα αναπαράστασης σε ένα άλλο και να επιλέγουν το εκάστοτε κατάλληλο σύστημα αναπαράστασης μιας κατάστασης.

#### *Διεργασία μεταγνωστικής ενημερότητας:*

Οι μεταγνωστικές διεργασίες περιλαμβάνουν το συνειδητό έλεγχο της μάθησης, το σχεδιασμό και την επιλογή στρατηγικών, την παρακολούθηση της ανάπτυξης της γνώσης, τη διόρθωση των λαθών, την ανάλυση της αποτελεσματικότητας των στρατηγικών και την αλλαγή των στρατηγικών όταν αυτό είναι απαραίτητο. Ένα άτομο διαθέτει μεταγνωστική ικανότητα όταν έχει συνείδηση της γνωστικής του διαδικασίας και μπορεί να ελέγχει, να ρυθμίζει και να αξιολογεί τον τρόπο σκέψης του (Borkowski, 1992; Brown, Bransford, Ferrara & Campione, 1983). Οι μεταγνωστικές διεργασίες επιτρέπουν ευελιξία στη σκέψη και δυνατότητα προσαρμογής σε νέες μη οικείες καταστάσεις.(Share & Dover 1987). Ο Schoenfeld (1987) αναφέρει ότι υπάρχουν τρεις τρόποι να μιλήσει κάποιος για τη μεταγνώση στο πλαίσιο της μάθησης των Μαθηματικών: πεποιθήσεις και διαισθήσεις (: *ποιές ιδέες σχετικά με τα Μαθηματικά υιοθετείς και πως αυτό επηρεάζει τον τρόπο που μαθαίνεις;*), γνώση των δικών μας διαδικασιών σκέψης (*πόσο αποτελεσματικός είσαι στην περιγραφή του τρόπου σκέψης σου;*) και αυτορύθμιση ή παρακολούθηση και έλεγχος (*πόσο καλά μπορείς να παρακολουθείς τον τρόπο σκέψης σου, για παράδειγμα όταν λύνεις ένα πρόβλημα;*).

Συνοψίζοντας, η μάθηση των μαθηματικών είναι μια διαρκής, σπειροειδής διαδικασία γενίκευσης και αφαίρεσης, η οποία υλοποιείται στο παρόν Πρόγραμμα Σπουδών μέσα από την προσπάθεια ανάπτυξης των γενικών και των ειδικών ικανοτήτων και διεργασιών κατά μήκος των τροχιών μάθησης που εξελίσσονται μέσα στη ίδια τάξη και από τάξη σε τάξη. Αυτή η όλο και πιο αφαιρετική πορεία συγκρότησης της μαθηματικής γνώσης σηματοδοτείται συχνά από γνωστικές συγκρούσεις που οδηγούν στην αναθεώρηση, τροποποίηση ή ανατροπή όσων ήδη γνωρίζει. Πράγματα που θεωρούνταν δεδομένα σε κάποια φάση, τίθενται υπό αμφισβήτηση και γίνονται αντικείμενο συζήτησης και αναστοχασμού σε επόμενη φάση.

## **ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Για την υποστήριξη των παραπάνω στόχων και τη δυνατότητα υλοποίησης τους στη σχολική τάξη η ομάδα των εμπειρογνομόνων έκανε τις παρακάτω βασικές επιλογές στην ανάπτυξη του ΠΣ:

- Ανάπτυξη του περιεχομένου με βάση την έννοια της «τροχιάς μάθησης και διδασκαλίας».
- Επιλογή και χρήση χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων ως μέσων διερεύνησης μαθηματικών ιδεών, ανάπτυξης στρατηγικών και επίλυσης προβλημάτων.
- Ανάδειξη της «μαθηματικής δραστηριότητας» ως τη βάση ανάπτυξης των γενικών και ειδικών ικανοτήτων και διεργασιών.
- Εισαγωγή της «συνθετικής εργασίας» ως ένα μέσο οριζόντιας διασύνδεσης των μαθηματικών με άλλα μαθησιακά διδακτικά αντικείμενα.
- Σχεδιασμός της αξιολόγησης δίνοντας έμφαση στο διαμορφωτικό της χαρακτήρα και τη σύνδεση της με τη διδασκαλία.

Στη συνέχεια αναλύονται οι παραπάνω επιλογές και παρουσιάζεται πώς αυτές αναδεικνύονται στο ΠΣ.

### **Τροχίες μάθησης και διδασκαλίας στα σχολικά μαθηματικά**

Το πρόγραμμα αναπτύχθηκε σε τρεις ηλικιακούς κύκλους χρησιμοποιώντας ως βάση την ιδέα της μαθησιακής – διδακτικής τροχιάς. Ο πρώτος ηλικιακός κύκλος αφορά μαθητές του νηπιαγωγείου (5-6 χρονών), της Α΄ Δημοτικού (6-7 χρονών) και της Β΄ Δημοτικού (7-8 χρονών). Ο δεύτερος ηλικιακός κύκλος περιλαμβάνει την ηλικιακή περίοδο από 8 έως 12 χρονών που αντιστοιχούν στις τάξεις Γ΄, Δ΄, Ε΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού. Τέλος ο τρίτος κύκλος αφορά στην περίοδο φοίτησης των μαθητών στο Γυμνάσιο (12 – 15 χρονών).

Τα ερευνητικά δεδομένα στο πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών καθιστούν σαφές ότι οι μαθητές ακολουθούν μια εξελικτική πορεία μάθησης και ανάπτυξης των μαθηματικών νοημάτων. Όταν οι εκπαιδευτικοί κατανοούν αυτήν την πορεία και τους βασικούς σταθμούς της και οργανώνουν τη δραστηριοποίηση των παιδιών με αναφορά σε αυτήν, είναι αυτονόητο ότι οικοδομούν περιβάλλοντα μάθησης της μαθηματικής γνώσης που μπορούν να στηρίξουν αποτελεσματικά την επιτυχή μαθητεία του μαθητή στα μαθηματικά (Clements & Sarama, 2009). Σε αυτήν την κατεύθυνση είναι εξαιρετικά σημαντική η έννοια της τροχιάς μάθησης και διδασκαλίας, καθώς προσφέρει απαντήσεις σε κρίσιμα διδακτικά ερωτήματα, όπως «ποιοι είναι οι εκάστοτε στόχοι μάθησης, ποια είναι η αφετηρία εκκίνησης, πως και που μετακινείσαι κάθε φορά και πως επιτυγχάνεις, τελικά, το στόχο μάθησης που είχε αρχικά τεθεί».

Μια Τροχιά Μάθησης και Διδασκαλίας (ΤΜΔ) αποτυπώνει μια συνολική θέαση της μαθησιακής εμπειρίας των μαθητών σε μια συγκεκριμένη θεματική του Προγράμματος Σπουδών των μαθηματικών και στοχεύει στη διαφάνεια και στην προσβασιμότητα στην αντίστοιχη εκπαιδευτική τους πορεία (Heuvel – Panhuizen, 2001). Στην πραγματικότητα, μια τέτοια τροχιά:

- Προσφέρει μια βάση για την άσκηση της διδακτικής πράξης



- Ορίζει σημαντικούς σταθμούς μάθησης (ενδιαμέσους και τελικούς) αλλά δε συνιστά μια προ-αποφασισμένη πορεία μάθησης
- Καθιστά φανερές τις διαφορές μάθησης μεταξύ μαθητών αλλά δεν περιγράφει μια ατομική πορεία μάθησης
- Συνιστά μια πηγή έμπνευσης για διδακτική δράση αλλά όχι έναν διδακτικό οδηγό
- Μπορεί να αποβεί εκπαιδευτικά ωφέλιμη αλλά δεν αποτελεί το μοναδικό τρόπο αναβάθμισης της ποιότητας της διδασκαλίας.

Κάθε ΤΔΕ συναπαρτίζεται από τρία μέρη: ένα *μαθηματικό στόχο* (πρόκειται για συστάδες εννοιών, δεξιοτήτων και ικανοτήτων που είναι μαθηματικά και μαθησιακά θεμελιώδεις), μια *διαδρομή* (επάλληλα, προοδευτικά αναπτυσσόμενα επίπεδα σκέψης που οδηγούν στην επίτευξη του στόχου που τέθηκε), κατά την οποία οι μαθητές αναπτύσσονται για να επιτύχουν το συγκεκριμένο στόχο και ένα σύνολο από *διδακτικές δραστηριότητες*, αντίστοιχες των *επιπέδων σκέψης* που διακρίνονται στη διαδρομή ή τη χαρακτηρίζουν, οι οποίες θα προσφέρουν την κατάλληλη υποστήριξη στους μαθητές για να αναπτύξουν ανώτερα επίπεδα σκέψης.

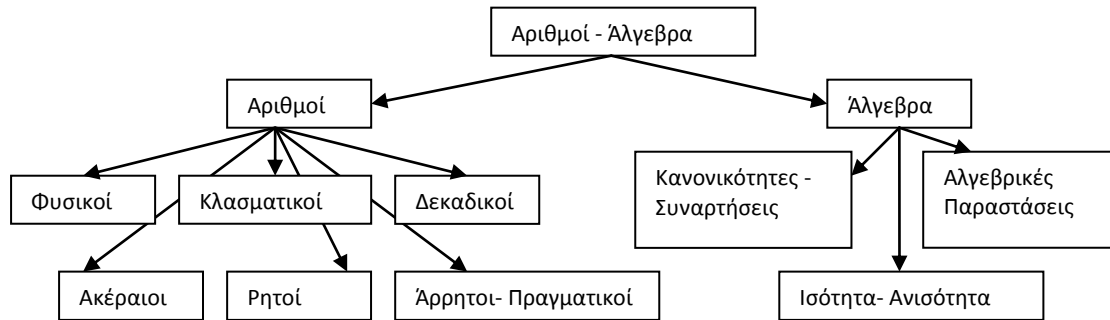
Σε μια προσπάθεια αποφυγής οποιαδήποτε σύγχυσης, είναι σημαντικό να τονιστεί ότι, μια ΤΜΔ δεν είναι μια γραμμική, βήμα-προς-βήμα περιγραφή πορείας, όπου κάθε βήμα συνδέεται αναγκαία με το επόμενο. Ούτε ένα μοναδικά ορισμένο μονοπάτι, καθώς καλείται να λάβει υπόψη του: τις ατομικές μαθησιακές πορείες, τις ασυνέχειες στη μαθησιακή διαδικασία (άλματα, οριοθετήσεις, υποτροπιάσεις), το γεγονός ότι πολλαπλές δεξιότητες και έννοιες αναπτύσσονται ταυτόχρονα στο πλαίσιο του ίδιου αντικειμένου μάθησης αλλά και εκτός αυτού και τις διαφορές μεταξύ της άτυπης και της τυπικής μάθησης.

Σε μια ΤΜΔ, αυτό που μαθαίνεται σε μια φάση επιτελείται σε ανώτερο επίπεδο στην αμέσως επόμενη, δηλαδή, η μαθησιακή διαδικασία εξελίσσεται σε επίπεδα. Καθώς ο μαθητής μετακινείται από επίπεδο σε επίπεδο, εργαζόμενος ατομικά ή συλλογικά, οι γνώσεις, οι δεξιότητες και οι ικανότητες που αναπτύσσει αποκτούν συνοχή. Τα επίπεδα προσφέρουν δυνατότητες οργάνωσης και ρύθμισης της διδασκαλίας, με στόχο την μετάβαση σε ανώτερα επίπεδα μάθησης. Θα πρέπει, ωστόσο, να διευκρινιστεί ότι τα επίπεδα δεν έχουν γενική ισχύ (επιτρέπουν την ανάδειξη των ιδιαιτεροτήτων στις μορφές μάθησης), ενώ δεν υπάρχει άμεση σύνδεση μεταξύ επιπέδων και των σταδίων νοητικής ανάπτυξης του μαθητή. Τέλος, είναι σημαντικό να επισημανθούν ορισμένοι περιορισμοί και δυσκολίες στην οργάνωση της διδασκαλίας με βάση τις ΤΜΔ. Καταρχήν, είναι σαφές ότι δεν είναι πάντοτε εύκολο να οριστούν με σαφήνεια και να οργανωθούν με αποτελεσματικό τρόπο οι ΤΜΔ ή μια σε σχέση με την άλλη. Επιπλέον, κατά την εργασία της διδασκαλίας στη βάση των ΤΜΔ θα πρέπει να ληφθεί ιδιαίτερη μέριμνα ώστε:

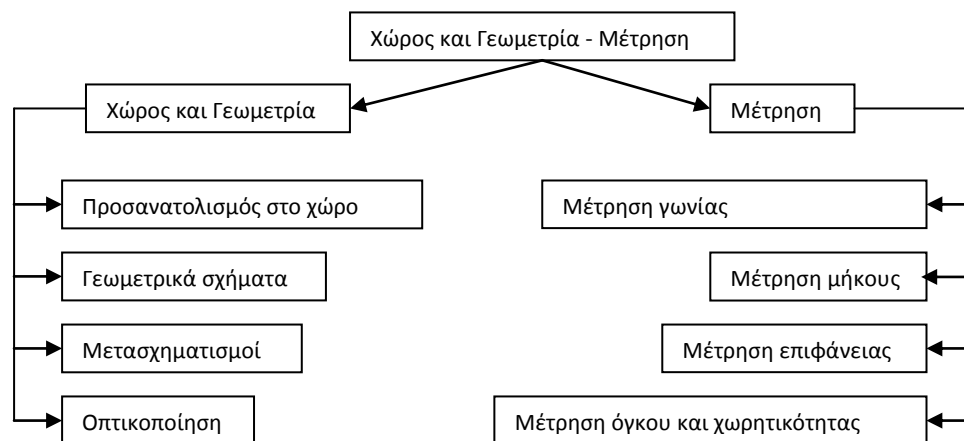
- Η εστίαση σε μια τροχιά να μην εμποδίζει τη θέαση των υπολοίπων
- Οι τροχιές να επιτρέπουν την συν-θέαση της γνωστικής, κοινωνικής και συναισθηματικής ανάπτυξης του μαθητή (αχώριστες αλλά όχι αδιάκριτες).
- Να είναι εμφανής ο τρόπος με τον οποίο οι τροχιές συσχετίζονται, διασταυρώνονται και ενοποιούνται.

### Βασικά μαθηματικά περιεχόμενα

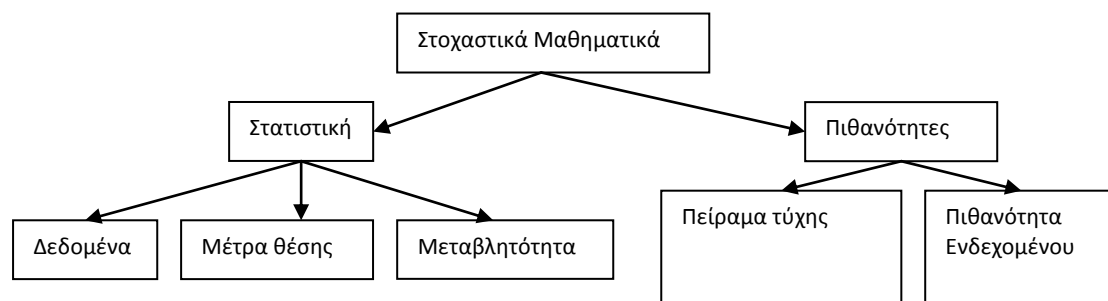
Οι βασικές θεματικές περιοχές γύρω από τις οποίες αναπτύσσονται τα περιεχόμενα και τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα είναι: Αριθμοί – Άλγεβρα, Χώρος και Γεωμετρία – Μετρήσεις και Στοχαστικά Μαθηματικά. Στα σχήματα 1, 2 και 3 παρουσιάζονται τα βασικά μαθηματικά περιεχόμενα ανά κάθε θεματική περιοχή με βάση τα οποία αναπτύχθηκαν οι τροχιές.



Σχήμα 1. Βασικά μαθηματικά περιεχόμενα της θεματικής περιοχής Αριθμοί – Άλγεβρα



Σχήμα 2. Βασικά μαθηματικά περιεχόμενα της θεματικής περιοχής Χώρος και Γεωμετρία- Μέτρηση



Σχήμα 3. Βασικά μαθηματικά περιεχόμενα της θεματικής περιοχής Στοχαστικά Μαθηματικά

Παρουσιάζεται παρακάτω η σημασία και ο ρόλος των τριών βασικών θεματικών περιοχών στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών καθώς και τα κύρια συστατικά των μαθησιακών-διδακτικών τροχιών.

### **Αριθμοί και άλγεβρα**

Από τη στιγμή της γέννησής τους τα παιδιά έρχονται αντιμέτωπα με μια πληθώρα από αριθμητικά φαινόμενα, τα οποία ελκύουν το ενδιαφέρον και την περιέργειά τους. Οι αριθμοί αντιπροσωπεύουν μια ανεξάντλητη και ερεθιστική πηγή ευκαιριών για ανακαλύψεις. Έτσι, η καθημερινότητά τους προσφέρει το πρώτο και πιο προκλητικό περιβάλλον για αλληλεπιδράσεις με νόημα και, επομένως, για την προώθηση της διαδικασίας μάθησης του αριθμού. Η διεύρυνση αυτού του πρώτου πεδίου 'αριθμητικής δράσης' με το σχολικό περιβάλλον διαμορφώνει νέους ορίζοντες μάθησης για τον αριθμό, καθώς με οργανωμένο, πλέον, τρόπο οι μαθητές οδηγούνται στη μετάβαση από την άτυπη αριθμητική γνώση στην τυπική, στη μύηση στο 'αριθμητικό/ μαθηματικό κεφάλαιο' του ανθρώπινου πολιτισμού. Προσκαλούνται, συγκεκριμένα, να γίνουν «ενάριθμοι» (numerate), να αναπτύξουν την *αίσθηση του αριθμού* (number sense): μια γενική κατανόηση του αριθμού και των πράξεων με αριθμούς, καθώς και την ικανότητα ευέλικτης αξιοποίησης αυτής της κατανόησης για τη συγκρότηση και διατύπωση μαθηματικών κρίσεων και την ανάπτυξη χρήσιμων στρατηγικών διαχείρισης των αριθμών και των πράξεων με αριθμούς.

Ένα εξαιρετικά μεγάλο μέρος της μαθηματικής εκπαίδευσης που προσφέρεται στην υποχρεωτική εκπαίδευση αφορά στη μελέτη διαφόρων αριθμητικών συνόλων. Παρόλα αυτά, οι σχετικές έρευνες καταγράφουν συνεχώς απογοητευτικά επίπεδα κατανόησης των αριθμητικών ιδεών. Οι λόγοι της περιορισμένης ανάπτυξης της αίσθησης του αριθμού αναζητούνται, κυρίως, στην αποτυχία της διδακτικής πράξης και της πολιτικής της μαθηματικής εκπαίδευσης να αναδείξει τα δομικά στοιχεία των αριθμητικών συνόλων που διδάσκονται στο σχολείο, στην υπέρμετρη έμφαση στη διαδικαστική παρά στην εννοιολογική κατανόηση των αριθμών, την αγνόηση της πλούσιας, άτυπης αριθμητικής γνώσης των μαθητών και στην απουσία ή στην αδυναμία υιοθέτησης λειτουργικών μηχανισμών παρακολούθησης και ανατροφοδότησης της μαθησιακής αλλά και της διδακτικής πορείας.

Η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού από τους μαθητές κατέχει κεντρική θέση στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών σε όλη την υποχρεωτική εκπαίδευση και οργανώθηκε με βάση τις παρακάτω κατευθυντήριες γραμμές:

- Τα αριθμητικά περιεχόμενα αναπτύσσονται σε όλες και τάξεις προοδευτικά και σε επάλληλα επίπεδα αφαίρεσης και γενίκευσης, προσφέροντας σε κάθε επίπεδο επαρκή χρόνο επεξεργασίας της εννοιολογικής και της διαδικαστικής μαθηματικής γνώσης που κρίνεται αναγκαία.
- Η οργάνωση της ανάπτυξης των αριθμητικών περιεχομένων γίνεται με βάση της σχετική βιβλιογραφία. Συγκεκριμένα, αποφάσεις ιεράρχησης, εμβάθυνσης, εστίασης, κ.ά. σχετικά με κάποιο συστατικό της επιδιωκόμενης μαθηματικής γνώσης στηρίχτηκαν σε αντίστοιχα ερευνητικά δεδομένα.

- Η ανάπτυξη του αριθμητικού περιεχομένου γίνεται με τρόπο που καθιστά δυνατή την παρακολούθησή της τόσο από το μαθητή όσο και από τον εκπαιδευτικό.

Με βάση τις παραπάνω κατευθύνσεις, υιοθετήθηκαν, τελικά, τροχιές ανάπτυξης της αίσθησης καθενός από τους φυσικούς, τους κλασματικούς, τους ακέραιους, τους ρητούς και, τέλος, τους πραγματικούς αριθμούς, οι οποίες επιμερίζονται στις παρακάτω υπο-τροχιές:

- Αναγνώριση και έκφραση του αριθμού, μέσω των διαφόρων αναπαραστάσεών του
- Σύγκριση και διάταξη του αριθμού
- Αναπαράσταση και διερεύνηση των πράξεων με αριθμούς
- Εκτέλεση/ υπολογισμός πράξεων και εκτίμηση του αποτελέσματος πράξεων
- Αξιοποίηση της εννοιολογικής και της διαδικαστικής αριθμητικής γνώσης για τη μοντελοποίηση καταστάσεων, την επίλυση προβλημάτων και την επικοινωνία με τους άλλους .

Για κάθε σύνολο αριθμών, οι παραπάνω τροχιές και υπο-τροχιές εξειδικεύονται ανά κύκλο και τάξη, καθιστώντας ορατή τόσο την εσωτερική (πρώτα αναπτύσσονται οι τροχιές εννοιολογικού χαρακτήρα και, στη συνέχεια, εκείνες που αφορούν στις εκτιμήσεις και στους υπολογισμούς) όσο και την εξωτερική τους δομή (οι κλασματικοί θεώνται ως επέκταση των φυσικών, οι ακέραιοι των κλασματικών, κ.τ.λ.).

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται ορισμένα από τα κεντρικά ερευνητικά πορίσματα για καθένα από τα σύνολα αριθμών που περιλαμβάνονται στο Πρόγραμμα Σπουδών (φυσικοί, κλασματικοί /δεκαδικοί, ακέραιοι, ρητοί και, τέλος, πραγματικοί), σε μια προσπάθεια σκιαγράφησης του επιθυμητού προσανατολισμού της μαθηματικής εκπαίδευσης που αφορά στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού από τους μαθητές (περισσότερες βιβλιογραφικές λεπτομέρειες μπορεί να αναζητηθούν, για παράδειγμα, στα Σακονίδης (2001), Millett et al. (2004), de Walle (2005), Τζεκάκη (2008) και Κολέζα & Φακούδης (2009) ).

**(α) Φυσικοί αριθμοί:** Παρά το γεγονός ότι οι φυσικοί αριθμοί καταλαμβάνουν μεγάλο μέρος του ΠΣ της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, οι σχετικές έρευνες συνεχίζουν να καταγράφουν δυσκολίες των μαθητών στην ανάπτυξη της αίσθησης του φυσικού αριθμού, οι κυριότερες από τις οποίες παρουσιάζονται παρακάτω.

*Κατανόηση της αξίας των ψηφίων:* Αρκετοί μαθητές αδυνατούν να διαχειριστούν με σαφήνεια το θέμα της θεσιακής αξίας των ψηφίων, ακόμη και στην αρχή της φοίτησής τους στο Γυμνάσιο, γεγονός που ενδεχομένως να τους δυσκολεύει στην εκτέλεση πράξεων με φυσικούς αριθμούς. Η σχετική βιβλιογραφία προτείνει την αξιοποίηση δραστηριοτήτων που αναδεικνύουν δομικά και σημασιολογικά στοιχεία του δεκαδικού συστήματος γραφής και ανάγνωσης αριθμών από τις πρώτες κίβλας τάξεις του Δημοτικού Σχολείου.

*Δομικές ιδιότητες των φυσικών αριθμών:* Για να μπορέσει ο μαθητής να εκτιμήσει τις δομικές ιδιότητες των αριθμών, θα πρέπει να είναι σε θέση να αντιλαμβάνεται τους αριθμούς ως αυθύπαρκτες οντότητες, ανεξάρτητες από το πλαίσιο στο οποίο

εμφανίζονται. Η έρευνα δείχνει ότι τα πρώτα βήματα προς αυτήν την κατεύθυνση εντοπίζονται από την ηλικία των 6 χρόνων. Ωστόσο, η γενίκευση αυτών των ιδιοτήτων δεν αναμένεται πριν την ηλικία των 9 χρόνων. Προς το τέλος της φοίτησής τους στο Δημοτικό Σχολείο οι μαθητές αναμένεται να είναι σε θέση τουλάχιστον να αναγνωρίζουν και να αποδέχονται τις παραπάνω ιδιότητες. Ωστόσο, αυτό δε συμβαίνει για όλους τους μαθητές.

*Υπολογιστικές διαδικασίες (αλγόριθμοι εκτέλεσης μιας πράξης):* Πολλοί ερευνητές σημειώνουν επικριτικά την έμφαση της διδασκαλίας στους αλγόριθμους εκτέλεσης των τεσσάρων πράξεων για δύο λόγους. Ο πρώτος σχετίζεται με τον κίνδυνο ταύτισης του αλγόριθμου με την έννοια της πράξης. Ο δεύτερος λόγος αφορά στη συμβολή αυτής της έμφασης στη διαμόρφωση της αντίληψης από τους μαθητές ότι οι συγκεκριμένοι αλγόριθμοι αποτελούν και τη μοναδική τους επιλογή στην εκτέλεση μιας πράξης. Επιπλέον, το γεγονός ότι οι αλγόριθμοι αυτοί διδάσκονται συνήθως ως ένα σύνολο κανόνων, χωρίς πάντοτε σαφή αιτιολογία και επεξήγηση και χωρίς να συνδέονται με την προηγούμενη αριθμητική γνώση των μαθητών, αντί να ενθαρρύνει την ουσιαστική κατανόηση του αριθμητικού συστήματος, ευνοεί την αντίληψη ότι τα μαθηματικά είναι μια συλλογή μυστηριωδών και αυθαίρετων, στην πλειοψηφία τους, κανόνων. Ως αποτέλεσμα, πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να παρακολουθήσουν τη λογική αυτών των διαδικασιών και στην καλύτερη περίπτωση τις υιοθετούν με μηχανικό τρόπο, υπονομεύοντας τη περαιτέρω εξέλιξή τους στα μαθηματικά.

*Επίλυση προβλημάτων με τις τέσσερις πράξεις (νόημα και δομή):* Η πλειοψηφία των μαθητών ηλικίας 12 – 15 χρόνων μπορούν να επιλύσουν απλά προβλήματα που αφορούν σε μία από τις τέσσερις πράξεις. Ωστόσο, η έρευνα δείχνει ότι αυτό δεν συμβαίνει για πιο σύνθετα προβλήματα, κυρίως εξαιτίας της αδυναμίας πολλών μαθητών να κατανοήσουν και να αναπαραστήσουν τις σχέσεις που αποτυπώνονται στο σενάριο του προβλήματος, καθώς και της περιορισμένης κατανόησης των ίδιων των πράξεων. Η διδασκαλία καλείται να συμβάλλει στη βελτίωση της υπάρχουσας κατάστασης, παρέχοντας συνεχείς και ποικίλες εμπειρίες προβλημάτων και μεθοδολογίας επίλυσής τους από τους μαθητές.

**(β) Κλασματικοί αριθμοί:** Πολλοί μαθητές δυσκολεύονται στην κατανόηση και στον αποτελεσματικό χειρισμό των κλασμάτων, επειδή δεν αντιλαμβάνονται την αφηρημένη φύση τους, την ποικιλία των ερμηνειών τους, την ιδιαίτερη γλώσσα που χρησιμοποιείται στη μελέτη τους και τους αλγόριθμους που απαιτεί η αριθμητική τους.

*Η έννοια του κλασματικού αριθμού:* Στη βιβλιογραφία αναφέρονται τέσσερις διακριτές ερμηνείες του κλάσματος (ως μέρος εμβαδού κάποιου χωρίου, ως υποσύνολο ενός συνόλου, ως αποτέλεσμα διαίρεσης και ως σημείο της αριθμογραμμής), οι οποίες δυσκολεύουν πολλούς μαθητές, ακόμη και πέραν της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Οι δυσκολίες αυτές είναι μεγαλύτερες για την ερμηνεία του κλάσματος ως υποσυνόλου και ακόμη περισσότερο για αυτήν ως σημείου της αριθμογραμμής.

*Ισοδυναμία Κλασμάτων:* Οι επιδόσεις των μαθητών σε απλές ερωτήσεις ισοδυναμίας κλασμάτων εμφανίζονται σε ικανοποιητικά επίπεδα στην ερευνητική βιβλιογραφία. Ωστόσο, μειώνονται δραματικά σε συνθετότερες, σχετικές

δραστηριότητες, ακόμη και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Αρκετοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι η ερμηνεία του κλάσματος ως σημείου της αριθμογραμμής προσφέρεται περισσότερο για την αποτελεσματικότερη διδασκαλία της ισοδυναμίας κλασμάτων.

*Πράξεις με κλασματικούς αριθμούς:* Πολλοί μαθητές συναντούν δυσκολίες στις πράξεις με κλασματικούς αριθμούς, ακόμη και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Οι δυσκολίες αυτές συνδέονται τόσο με τις αντίστοιχες που αφορούν στις ερμηνείες του κλάσματος και στην ισοδυναμία κλασμάτων, όσο και με τους πολύπλοκους κανόνες που διέπουν τους αλγόριθμους εκτέλεσης των συγκεκριμένων πράξεων. Επειδή οι κανόνες αυτοί μαθαίνονται συνήθως «από μνήμης», άλλοτε χρησιμοποιούνται μηχανικά και άλλοτε παραποιούνται και εφαρμόζονται λανθασμένα.

**(γ) Δεκαδικοί αριθμοί:** Η διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών ακολουθεί συνήθως τη διδασκαλία των κλασματικών αριθμών, καθώς τα δύο συστήματα αναπαράστασης εμφανίζονται να συνδέονται μεταξύ τους και η κατανόηση των κλασμάτων τίθεται ως προϋπόθεση για την κατανόηση των δεκαδικών αριθμών. Ωστόσο, μερικοί ερευνητές υποστηρίζουν πως δεν υπάρχουν κάποιοι ιδιαίτεροι λόγοι που να αποκλείουν την αντιστροφή της σειράς διδασκαλίας των δύο αυτών εννοιών.

*Οι διαφορετικές ερμηνείες των δεκαδικών αριθμών:* Η ποικιλότητα της ερμηνείας των δεκαδικών αριθμών φαίνεται να αποτελεί έναν από τους λόγους των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τους δεκαδικούς αριθμούς. Όπως ένα κλάσμα, έτσι και ένας δεκαδικός αριθμός μπορεί να ερμηνευτεί ως εμβαδόν χωρίου, υποσύνολο, αποτέλεσμα της πράξης της διαίρεσης και ως σημείο στην αριθμογραμμή.

*Ο ρόλος της υποδιαστολής:* Πολύ σημαντικές δυσκολίες φαίνεται να δημιουργεί στους μαθητές η υποδιαστολή, την οποία συχνά οι μαθητές ερμηνεύουν ως σημείο διαχωρισμού ανάμεσα σε δύο διαφορετικούς αριθμούς ή την αγνοούν.

*Ισοδυναμία δεκαδικών αριθμών:* Αρκετοί μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν ισοδυναμίες του τύπου  $0,35$  ή  $3$  δέκατα και  $5$  εκατοστά ή  $35$  εκατοστά ή  $7$  φορές τα  $5$  εκατοστά κτλ. Δεν είναι λίγες ακόμη οι φορές που δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι το  $0$  στο τέλος κάποιου δεκαδικού αριθμού δεν παίζει κάποιο ρόλο. Άλλοι, πάλι, μαθητές μπερδεύονται και διαγράφουν το μηδενικό, ακόμη και όταν αυτό βρίσκεται ανάμεσα σε δύο ψηφία.

*Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς:* Δυσκολίες εμφανίζονται και στις τέσσερις πράξεις αλλά, ιδιαίτερα, στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με δεκαδικούς αριθμούς, οι οποίες δεν είναι εύκολο να γίνουν αντιληπτές ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση και μοιρασιά αντίστοιχα, όπως στους φυσικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, είναι πολύ δύσκολο για ένα μαθητή να αντιληφτεί τι σημαίνει «ο αριθμός  $5,23$  να επαναληφθεί  $0,3$  φορές». Επιπλέον, πολλά παιδιά μπορεί να δυσκολεύονται σε αυτές τις πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς, επειδή παραμένουν προσκολλημένα σε αντιλήψεις, όπως «ο πολλαπλασιασμός αυξάνει έναν αριθμό, ενώ η διαίρεση το μειώνει», που ισχύει πάντοτε στους φυσικούς, αλλά όχι στους δεκαδικούς αριθμούς.

**(δ) Ακέραιοι αριθμοί:** Η κατανόηση των ακεραίων αριθμών και των πράξεων με ακεραίους αριθμούς είναι σημαντική για τη μελέτη των αλγεβρικών ιδεών. Παρόλα αυτά, η σχετική έρευνα είναι πολύ περιορισμένη.

Γενικά, οι διδακτικές προσεγγίσεις που ακολουθούνται στη διδασκαλία των ακεραίων αριθμών μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο κατηγορίες: σε αυτές που χειρίζονται τους ακεραίους ως αφηρημένες οντότητες και σε αυτές που χρησιμοποιούν συγκεκριμένα μοντέλα για να προσδώσουν νόημα στους ακεραίους και στις πράξεις με αυτούς. Τα πορίσματα των ερευνών και για τις δύο προσεγγίσεις δεν είναι ιδιαίτερα ενθαρρυντικά. Σήμερα επικρατεί η άποψη της αξιοποίησης πολλαπλών μοντέλων για τη διδασκαλία των πράξεων με ακεραίους αριθμούς, όπου οι τελευταίοι παρουσιάζονται ως συγκεκριμένα αντικείμενα ή οντότητες, οι οποίες κατασκευάζονται με τέτοιο τρόπο, ώστε οι θετικοί άκεραιοι να «ακυρώνουν» τους αρνητικούς. Παραδείγματα τέτοιων οντοτήτων και αντικειμένων είναι οι έννοιες της πίστωσης και του χρέους και μάρκες ή πούλια ή κάρτες μοναδιαίας αξίας και διαφορετικών χρωμάτων (π.χ. τα μαύρα (θετικοί) και κόκκινα πούλια (αρνητικοί) αντιστοίχως). Επίσης μια πρώτη διαισθητική αντιμετώπιση των ακεραίων εισάγεται από τις μικρές ηλικίες καθώς οι μικροί μαθητές χειρίζονται καθημερινές καταστάσεις που χρησιμοποιούν ακεραίους (π.χ. το θερμόμετρο, το ασανσέρ κ.λ.π.)

Αναφορικά με τις πράξεις, τα δεδομένα της έρευνας προτείνουν ότι η πρόσθεση με ακεραίους δεν παρουσιάζει ιδιαίτερα προβλήματα, ίσως γιατί μπορεί να μοντελοποιηθεί και να κατανοηθεί με σχετική ευκολία. Ο πολλαπλασιασμός είναι πιο δύσκολο να εξηγηθεί, αλλά οι κανόνες που τον διέπουν μπορούν να απομνημονευτούν και να εφαρμοστούν με ευκολία. Ωστόσο, η μοντελοποίηση της αφαίρεσης ακεραίων είναι πιο σύνθετη και οι κανόνες της μπορούν εύκολα να δημιουργήσουν σύγχυση και να εφαρμοστούν λανθασμένα.

Η έρευνα είναι πιο περιορισμένη αναφορικά με τους τρόπους που οι μαθητές της υποχρεωτικής εκπαίδευσης ανταποκρίνονται στις νοητικές διεργασίες που απαιτούνται για την επιτυχή ανάπτυξη των **ρητών** και των **πραγματικών** αριθμών, σε σύγκριση με τους υπόλοιπους αριθμούς, με αποτέλεσμα να μην είναι εύκολη η ανίχνευση συγκλίσεων ή ενός κεντρικού προσανατολισμού στα σχετικά ευρήματα.

Η **άλγεβρα** συνιστά μία από τις σπουδαιότερες αλλά και δυσκολότερες ενότητες των μαθηματικών από άποψη μάθησης αλλά και διδασκαλίας. Η αξία της βρίσκεται κυρίως σε δύο δυνατότητες που προσφέρει: (α) τη διαχείριση των μαθηματικών ιδεών με ακρίβεια και σαφήνεια και (β) την ευκολότερη και αποτελεσματικότερη επίλυση προβλημάτων, μαθηματικών και μη, κυρίως μέσω της μοντελοποίησης (για περισσότερες λεπτομέρειες, μπορείτε να συμβουλευτείτε κείμενα, όπως, Δραμαλίδης & Σακονίδης (2006), Kieran (2007) και Βερούκιος (2010)).

Στο πλαίσιο των σχολικών μαθηματικών η άλγεβρα παρουσιάζεται κατά κανόνα είτε ως γενικευμένη αριθμητική είτε ως η μελέτη του αριθμητικού συστήματος και της δομής του, η οποία ενδιαφέρεται μόνο για γενικευμένους αριθμούς, δηλαδή, για αντιπροσώπους κλάσεων αριθμών. Η συνήθης πρακτική που υιοθετείται, όταν εισάγεται μια αλγεβρική ιδέα, είναι η αναφορά στις προηγούμενες αριθμητικές εμπειρίες των μαθητών και ο λογικός συμπερασμός. Αμέσως μετά δίνεται στους μαθητές εκτεταμένη εξάσκηση στο χειρισμό συμβολικών αναπαραστάσεων της

αλγεβρικής ιδέας με την εφαρμογή συγκεκριμένων κανόνων. Αυτή η προσέγγιση στηρίζεται στην αρχή ότι, εφόσον η αριθμητική και η άλγεβρα αφορούν αριθμούς και οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με τις ιδιότητες των αριθμών και τις πράξεις με αριθμούς, υπάρχουν πολύ λίγα πράγματα που χρειάζεται να προστεθούν. Ωστόσο, αυτό δεν είναι αλήθεια. Τα στοιχεία και οι κανόνες της άλγεβρας αποτελούν αφαιρέσεις των αντίστοιχων στοιχείων και κανόνων της αριθμητικής, δηλαδή αποτελούν αφαιρέσεις αφαιρέσεων και επομένως η κατανόησή τους έχει ιδιαίτερες απαιτήσεις.

Αρκετές έρευνες έχουν επικεντρώσει στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην άλγεβρα. Ορισμένες από αυτές ασχολήθηκαν με τις δυσκολίες που συνδέονται με την εκτεταμένη χρήση αλγεβρικών συμβόλων που οδηγεί πολλούς μαθητές να ταυτίζουν την άλγεβρα με σύμβολα και συμβολικούς χειρισμούς. Μια άλλη πηγή προβλημάτων αποτελεί η γλώσσα (φυσική και συμβολική) που χρησιμοποιείται στην άλγεβρα. Εκφράσεις όπως “έστω  $a$  ένας τυχαίος θετικός αριθμός” δεν είναι εύκολο να γίνουν κατανοητές από τους μαθητές. Αυτό επιβαρύνεται από το γεγονός ότι οι ρυθμοί μάθησης που επιβάλλονται από το Πρόγραμμα Σπουδών είναι συχνά τόσο ταχείς, ώστε δε δίνεται χρόνος στους μαθητές να τις αφομοιώσουν.

Είναι σημαντικό, πριν την εισαγωγή των μαθητών στην άλγεβρα, να προηγηθεί ένα στάδιο προετοιμασίας τους, κατά τη διάρκεια του οποίου θα διαμορφωθεί το κατάλληλο υπόβαθρο για τη συστηματική στη συνέχεια μελέτη των αλγεβρικών ιδεών. Το στάδιο αυτό μπορεί και προτείνεται να ξεκινήσει από τις μικρές κιάλας τάξεις του Δημοτικού Σχολείου και αναμένεται να περιλαμβάνει θέματα όπως:

- Μελέτη (αναγνώριση, συμπλήρωση, περιγραφή, γενίκευση) κανονικοτήτων
- Αναγνώριση των σχέσεων μεταξύ διαφόρων αναπαραστάσεων (γλωσσικών, υλικών, εικονικών, συμβολικών) και μετάβαση από τη μία στην άλλη
- Επίλυση προβλημάτων του τύπου «βρες τον αριθμό που λείπει»
- Κατανόηση ιδιοτήτων αριθμών, όπως η αντιμεταθετικότητα
- Κατανόηση του συμβόλου σχέσης της ισότητας
- Επινόηση αλγορίθμων για την πραγματοποίηση μιας εργασίας
- Θέματα θεωρίας αριθμών, όπως πρώτοι αριθμοί, διαιρετότητα, κτλ
- Κατανόηση των λόγων, όπως στις κλίμακες και στους ρυθμούς μεταβολής
- Ερμηνεία και κατασκευή γραφικών παραστάσεων και τη χρήση τους για προβλέψεις
- Επινόηση τύπων για τον σύντομο υπολογισμό εμβαδών και όγκων

Η διδασκαλία της άλγεβρας ξεκινά, συνήθως, με τη μελέτη απλών αλγεβρικών παραστάσεων, στη συνέχεια επικεντρώνεται στους μετασχηματισμούς όλο και συνθετότερων αλγεβρικών παραστάσεων και στην επίλυση γραμμικών πρώτα και μεγαλύτερου βαθμού (κυρίως δευτέρου) στη συνέχεια εξισώσεων και καταλήγει στη μελέτη απλών, αρχικά, συναρτήσεων και πιο πολύπλοκων στη συνέχεια. Ωστόσο η παραπάνω αλληλουχία δεν υποστηρίζεται σήμερα από τη σύγχρονη ερευνητική βιβλιογραφία. Παρακάτω συζητώνται μερικές από τις βασικότερες δυσκολίες των μαθητών σε κάθε μια από αυτές τις ενότητες.



*Αλγεβρικές παραστάσεις:* Πολλές έρευνες έχουν εντοπίσει την περιορισμένη κατανόηση του τρόπου που χρησιμοποιούνται τα γράμματα στην άλγεβρα από τους μαθητές. Τα περισσότερα ευρήματα συγκλίνουν στο γεγονός ότι συχνά οι μαθητές ερμηνεύουν ένα γράμμα ως ένα όνομα ενός συγκεκριμένου αριθμού, δηλαδή ως συγκεκριμένο άγνωστο. Για παράδειγμα, πολλοί μαθητές πιστεύουν ότι οι εξισώσεις  $5n+14=89$  και  $5\mu+14=89$  έχουν διαφορετικές λύσεις.

Οι σχετικές μελέτες έδειξαν τη δεκαετία του 1980 κιόλας ότι, αν και η ερμηνεία του γράμματος που επιλέγουν οι μαθητές που φοιτούν στις τελευταίες τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και στο Γυμνάσιο εξαρτάται από τη φύση και την πολυπλοκότητα της ερώτησης, πολύ λίγοι από αυτούς είναι σε θέση να θεωρήσουν το γράμμα ως γενικευμένο αριθμό και ακόμη λιγότεροι μπορούν να το ερμηνεύσουν ως μεταβλητή.

Τα τελευταία χρόνια, η εισαγωγή των νέων τεχνολογιών στην εκπαίδευση διαμόρφωσε νέα δεδομένα και νέες συνθήκες εργασίας και μέσα στην τάξη των μαθηματικών. Σε ότι αφορά στην άλγεβρα, σχετικές έρευνες έδειξαν ότι ορισμένου τύπου συμβολικά υπολογιστικά περιβάλλοντα μπορούν να υποστηρίξουν τη μάθηση βασικών αλγεβρικών ιδεών από τους μαθητές. Τα παραπάνω φανερώνουν ότι η πλειοψηφία των μαθητών ηλικίας 12 – 15 χρόνων αντιμετωπίζουν σοβαρές δυσκολίες διαχείρισης αλγεβρικών παραστάσεων, εξαιτίας της περιορισμένης κατανόησης δομικών χαρακτηριστικών της αριθμητικής.

*Εξισώσεις:* Μια από τις πρώτες διαπιστώσεις του μεγάλου αριθμού ερευνών που έχουν ασχοληθεί με τις επιδόσεις μαθητών διαφόρων ηλικιών στις εξισώσεις αφορά στον τρόπο που αυτοί αντιλαμβάνονται το σύμβολο της ισότητας. Σύμφωνα με αυτές τις έρευνες, πολλοί μαθητές θεωρούν το «=» ως ένα σημάδι για «να κάνεις κάτι» και συχνά «να δώσεις την απάντηση, έναν αριθμό» και όχι ως το σύμβολο της ισοδυναμίας μεταξύ του δεξιού και του αριστερού μέλους της ισότητας. Ακόμη και μετά από αρκετά μαθήματα άλγεβρας, το σύμβολο της ισότητας δεν φαίνεται να γίνεται κατανοητό ως σύμβολο ισοδυναμίας.

*Η επίλυση μιας εξίσωσης* τώρα, προϋποθέτει την ικανότητα του μαθητή να χειρίζεται την εξίσωση ως αντικείμενο και πιο συγκεκριμένα να είναι σε θέση να εκτελεί την ίδια πράξη και στις δύο πλευρές της. Ωστόσο, αυτή η φορμαλιστική διαδικασία δεν είναι η πρώτη ούτε και η μόνη που διδάσκονται οι μαθητές στη διάρκεια της φοίτησής τους στην υποχρεωτική εκπαίδευση. Ανάμεσα σε αυτές, οι πλέον δημοφιλείς είναι εκείνες της μεταφοράς των όρων με ταυτόχρονη αλλαγή του πρόσημου και της εφαρμογής της ίδιας πράξης και στα δύο μέλη της εξίσωσης. Η τελευταία θεωρείται και η πλέον αποτελεσματική από άποψη μάθησης, καθώς επιτρέπει στους μαθητές να λειτουργούν με αλγεβρικό τρόπο (επικέντρωση στα δομικά στοιχεία του συστήματος αρίθμησης και χειρισμό των αλγεβρικών οντοτήτων ως αντικειμένων). Γενικά, τα αποτελέσματα αρκετών ερευνών φανερώνουν ότι οι άπειροι στην επίλυση γραμμικών εξισώσεων μαθητές έχουν περιορισμένη αντίληψη των προϋποθέσεων κάτω από τις οποίες ένας μετασχηματισμός μιας εξίσωσης είναι επιτρεπτός.

*Η επίλυση προβλημάτων με εξισώσεις* αποτελεί μία από τις δυσκολότερες δραστηριότητες της άλγεβρας για τους μαθητές της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Μέρος αυτής της δυσκολίας αποδίδεται στις εμπειρίες τους στο Δημοτικό Σχολείο,

όπου σπάνια τους ζητιέται να γράψουν μια αριθμητική ισότητα. Συνήθως, τους δίνονται προτάσεις του τύπου  $5 + \square = 12$  με τη μορφή προβλημάτων, στα οποία οι μαθητές πρώτα λύνουν και μετά γράφουν την ισότητα ή γράφουν μια ισότητα απλώς για να αναπαραστήσουν τις πράξεις που εκτελούν, ώστε να βρουν τη λύση. Έτσι, όταν τους ζητιέται να σκεφτούν με αλγεβρικούς όρους, η σκέψη τους χρειάζεται να κάνει ένα μεγάλο άλμα, καθώς σε αυτήν την περίπτωση θα πρέπει να επικεντρωθεί στη δομή του προβλήματος παρά στις πράξεις που απαιτούνται για την επίλυσή του.

Γενικά, έχει παρατηρηθεί ότι οι μαθητές δυσκολεύονται ιδιαίτερα να εντοπίσουν τις ομοιότητες στη δομή μεταξύ προβλημάτων με εξισώσεις, τα οποία διαθέτουν διαφορετικά σενάρια. Συχνά αντικαθιστούν διάφορες τιμές στις εξισώσεις που κατασκευάζουν, για να διαπιστώσουν αν είναι σωστές, και, σε ορισμένες περιπτώσεις, χρησιμοποιούν πίνακες τιμών, για να εντοπίσουν τις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών του προβλήματος. Πάντως, η πλειοψηφία των μαθητών του Γυμνασίου δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν τις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών ενός προβλήματος. Η μικρότερη διαφοροποίηση στο σενάριο ενός προβλήματος μπορεί να τους οδηγήσει σε αποτυχία σε ότι αφορά στην κατασκευή της εξίσωσης. Είναι, λοιπόν, αναγκαίο η σχετική διδασκαλία να επικεντρώσει σε αυτό το σημείο.

*Συναρτήσεις:* Η έννοια της συνάρτησης αποτελεί μία από τις δυσκολότερες μαθηματικές ιδέες για τους μαθητές. Στη βιβλιογραφία εντοπίζονται τρεις βασικές παράμετροι αυτής της δυσκολίας. Η πρώτη συνδέεται με τη συνθετότητα της έννοιας αλλά και με την ποικιλία των μαθηματικών νοημάτων που σχετίζονται με αυτήν, όπως μεταβλητή, συν-μεταβολή, σύνολο και άλλες. Η δεύτερη αφορά στο γεγονός ότι η έννοια της συνάρτησης ενυπάρχει στο μεγαλύτερο μέρος των μαθηματικών αλλά και των σχολικών μαθηματικών: οι τέσσερις πράξεις, η μέτρηση στη γεωμετρία, η επίλυση εξισώσεων και άλλες τεχνικές και αλγόριθμοι μπορούν να μελετηθούν από τη σκοπιά των συναρτήσεων. Αυτό δυσκολεύει ιδιαίτερα τη διαμόρφωση ενός ενιαίου και γενικά αποδεκτού πλαισίου μάθησης για την έννοια της συνάρτησης. Η τρίτη παράμετρος σχετίζεται με την αναγκαιότητα να αντιληφτούν οι μαθητές την έννοια της συνάρτησης σε ένα επίπεδο ως *διαδικασία* και σε ένα άλλο ως *αντικείμενο*.

Επιπλέον, η έρευνα δείχνει ότι οι περισσότεροι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αντιλαμβάνονται τη συνάρτηση ως μια υπολογιστική διαδικασία και δυσκολεύονται να συσχετίσουν έναν τρόπο αναπαράστασής της με έναν άλλο. Είναι, λοιπόν, αναγκαίο η διδασκαλία να επικεντρωθεί σε αυτές τις αδυναμίες των μαθητών στην προσέγγιση της μελέτης μιας συνάρτησης και να υιοθετήσει πρακτικές που θα τους βοηθήσουν να τις ξεπεράσουν. Προς αυτήν την κατεύθυνση, οι νέες τεχνολογίες, σε συνδυασμό με την απαραίτητη υποστήριξη από έναν ικανό εκπαιδευτικό, γνώστη των παραπάνω αδυναμιών των μαθητών, φαίνεται να προσφέρουν μία ελπιδοφόρα εναλλακτική προσέγγιση.

Όσα προηγήθηκαν διαμορφώνουν το πλαίσιο αναφοράς που αξιοποιήθηκε για την οργάνωση της ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών. Συγκεκριμένα, υπέδειξε τις κεντρικές τροχιές μάθησης και διδασκαλίας των αλγεβρικών ιδεών που υιοθετήθηκαν: κανονικότητες / συναρτήσεις, αλγεβρικές παραστάσεις, ισότητες/ ανισότητες. Επιπλέον, οδήγησε στις δυο βασικές

κατευθύνσεις / προσανατολισμούς που, τελικά, υιοθετήθηκαν και διέπουν την ανάπτυξη των αλγεβρικών περιεχομένων:

- Την έμφαση στην αλγεβρική συλλογιστική που προτείνει η σύγχρονη βιβλιογραφία, δηλαδή, στην αναπαράσταση, στη γενίκευση και στην τυποποίηση καταστάσεων, καθώς και στην κανονικότητα.
- Την ανάπτυξη όλων των τροχιών που αφορούν στις αλγεβρικές γνώσεις σε όλες τους κύκλους της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, δηλαδή, από το νηπιαγωγείο ως το Γυμνάσιο.

### **Χώρος και Γεωμετρία - Μέτρηση**

Η **Γεωμετρία** αποτελεί ένα σημαντικό κεφάλαιο των Μαθηματικών που στην Ελλάδα έχει ένα βασικό ρόλο στα προγράμματα σπουδών και αποκτά τα τελευταία χρόνια μεγάλη σημασία στα προγράμματα σπουδών και άλλων χωρών. Η σημασία της διδασκαλίας της συνδέεται τόσο με τη χρησιμότητά της στην καθημερινή ζωή όσο και στα Μαθηματικά ή στις άλλες επιστήμες. Ένα πλήθος από χωρικές και γεωμετρικές γνώσεις είναι απαραίτητες για την αντίληψη καθημερινών καταστάσεων και προβλημάτων και πολλές δράσεις του ατόμου στηρίζονται σε αυτές (αντίληψη και διαχείριση φυσικών και τεχνητών αντικειμένων, έργων τέχνης, διαστάσεις της επιστήμης και της τεχνολογίας και πολλές μορφές μοντελοποίησης). Επίσης οι έννοιες και οι διαδικασίες της Γεωμετρίας στηρίζουν την προσέγγιση πολλών μαθηματικών εννοιών: αξιοποιούνται στην επίλυση προβλήματος με την δημιουργία κατάλληλων διαγραμμάτων, στηρίζουν τη δημιουργία νοερών εικόνων, την κατανόηση συμβόλων, την κατανόηση σχηματισμών για την απόδοση αριθμητικών σχέσεων, την γραμμή των αριθμών, γραφικές παραστάσεις ή άλλες μαθηματικές διαδικασίες που στηρίζονται σε δισδιάστατες ή τρισδιάστατες διατάξεις (πράξεις, υποδιαίρεσεις μονάδων, πίνακες, κ.ά). Τέλος, η δημιουργία και η επεξεργασία νοερών εικόνων και αναπαραστάσεων, η αντίληψη των δισδιάστατων και τρισδιάστατων καταστάσεων, η ευλυγισία στην αλλαγή οπτικών γωνιών και η χωρική μνήμη που καλλιεργούνται με την κατάλληλη διδασκαλία της Γεωμετρίας έχουν μεγάλη σημασία για τον άνθρωπο και αποκτούν στα προγράμματα σπουδών τα τελευταία χρόνια την ίδια σημασία με την αντίληψη των αριθμών και των νοερών πράξεων (Clements, & Battista, 1992),.

Το περιεχόμενο της Γεωμετρίας που αναπτύσσεται στο Δημοτικό αποτελεί αυτό που θα ονομάζαμε *μη τυπική Γεωμετρία*. Μεταγενέστερα στο Γυμνάσιο οι μαθητές αρχίζουν να προσεγγίζουν τις χωρικές και γεωμετρικές έννοιες σε πιο γενικευμένο επίπεδο για να αξιοποιήσουν τη διαδικασία αυτή και στην κατανόηση της θεωρητικοποίησης γενικότερα στα Μαθηματικά.

Οι χωρικές και γεωμετρικές έννοιες, αν και θεωρούνται αρκετά απλές, λόγω της εποπτικής τους προσέγγισής και της καθημερινής εμπειρίας συνοδεύονται με παρανοήσεις που δεν επιτρέπουν την ουσιαστική ανάπτυξη κατανοήσεων που είναι απαραίτητες τόσο για την ανάπτυξη πιο τυπικών γεωμετρικών εννοιών όσο για την αντιμετώπιση προβλημάτων της καθημερινής ζωής. Ως συνέπεια, τα σύγχρονα προγράμματα σπουδών αντικαθιστούν τις απλοϊκές και χωρίς εμβάθυνση προσεγγίσεις με την ανάπτυξη αυτού που ονομάζεται *χωρικός, γεωμετρικός και οπτικοποιημένος συλλογισμός* (Clements, Sarama, 2000).

Ο χωρικός συλλογισμός είναι η διαδικασία με τη βοήθεια της οποίας σχηματίζουμε ιδέες για τις ιδιότητες και σχέσεις στο χώρο, τις αποδίδουμε με πραγματικές και νοερές εικόνες, τις διαχειριζόμαστε για την αντιμετώπιση πραγματικών ή θεωρητικών καταστάσεων. Περιλαμβάνει την αντίληψη, κατανόηση και παράσταση θέσεων, αμοιβαίων σχέσεων, διευθύνσεων και διαδρομών μέσα στο χώρο όπως και γενικότερα τη διαχείριση κάθε χωρικής πληροφορίας και των μετασχηματισμών της.

Ο γεωμετρικός συλλογισμός αφορά την οργάνωση και επεξεργασία του χώρου στη βάση του γεωμετρικού μοντέλου. Η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης, δεδομένου ότι καλείται να οδηγήσει στην θεωρητική Γεωμετρία, συνδέεται με τη μετάβαση από μια γενικότερη αντίληψη των γεωμετρικών μορφών με τις αισθήσεις και την εμπειρία (αισθησιο-κινητική) σε μια κατανόηση των γεωμετρικών σχημάτων με βάση τα στοιχεία τους, τις ιδιότητες και τις μεταξύ τους σχέσεις (αναλυτικο-συνθετική). Η πορεία που ακολουθείται διδακτικά είναι μια σύνδεση μεταξύ οπτικού, λεκτικού και αφηρημένου (Owens, & Outhred, L., 2006, Duval, 1998).

Η προσέγγιση των γεωμετρικών σχημάτων περιλαμβάνει τέσσερις κατηγορίες δράσεων: αναγνώριση κατηγοριών σχημάτων, αναγνώριση των ιδιοτήτων των σχημάτων, αναγνώριση των ιδιοτήτων των κατηγοριών, κατασκευές-αναλύσεις/συνθέσεις σχημάτων. Η δράσεις αυτές συμπληρώνονται με τους μετασχηματισμούς των σχημάτων που αφορούν μετατοπίσεις, στροφές, συμμετρίες και ομοιότητα.

Η ανάπτυξη τόσο του χωρικού όσο και του γεωμετρικού συλλογισμού συνδέονται στενά με την οπτικοποίηση ή οπτικοποιημένη σκέψη. Η οπτική πληροφορία που συλλέγεται από την επαφή με το χώρο και τα αντικείμενα μέσα σε αυτόν απεικονίζεται σε νοερές εικόνες, αρχικά απλές και στατικές και στη συνέχεια πιο σύνθετες και δυναμικές. Έτσι ο όρος οπτικοποιημένη σκέψη (μια σκέψη δηλαδή μέσω οπτικών εικόνων, Gutierrez, 1996) αποδίδει την ικανότητα των μαθητών να ερμηνεύουν διαφορετικές παραστάσεις αντικειμένων ή καταστάσεων, ή να τις αντιλαμβάνονται από διαφορετικές οπτικές γωνίες, όπως επίσης να δημιουργούν νοερές εικόνες για αντικείμενα ή καταστάσεις που βρίσκονται έξω από το οπτικό τους πεδίο (για γεωμετρικές ή άλλες χωρικές πληροφορίες) και να τις επεξεργάζονται νοερά (πχ. περιστρέφουν νοερά ένα αντικείμενο).

Για τις γεωμετρικές έννοιες είναι απαραίτητο να αποσαφηνιστεί ότι αν και αποδίδονται σχηματικά στην ουσία αφορούν θεωρητικές έννοιες. Έτσι ένα τρίγωνο είναι το σχήμα που έχει ένα πραγματικό αντικείμενο, αλλά στην ουσία είναι ένα γεωμετρικό αντικείμενο που ορίζεται με βάση κάποιες ιδιότητες. Για τα θεωρητικά αυτά αντικείμενα χρησιμοποιούνται διάφορες μορφές παράστασής (σχέδια, σχήματα, λεκτική παρουσίαση, σύμβολα) που όλα αποδίδουν ένα ιδεατό αντικείμενο. Ως συνέπεια των παραπάνω η χρήση και επεξεργασία των σχημάτων στη μη τυπική Γεωμετρία των μικρότερων τάξεων με ανάλυση σε στοιχεία και σε μη στερεοτυπικές θέσεις επιδιώκει να οδηγήσει βαθμιαία τους μαθητές από την άμεση εποπτεία και την ολιστική προσέγγιση, στην αναγνώριση ιδιοτήτων, την μέτρηση και την διαχείριση των σχημάτων στη χρήση τους ως βάση για τους συλλογισμούς τους ή την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων (Mammama et al., 1998).

Οι κατασκευές με τη χρήση μιας ποικιλίας μέσων όπως και ψηφιακών εργαλείων, ο σχεδιασμός, και οι χαράξεις των γεωμετρικών σχημάτων βοηθάνε σημαντικά τους

μαθητές στον εντοπισμό στοιχείων (σημείων, τμημάτων κλπ.) σχέσεων και ιδιοτήτων που αποτελούν ένα μέρος των γεωμετρικών γνώσεων που επιδιώκουμε να αναπτύξουμε ολοκληρώνοντας τη διδασκαλία πριν από την εισαγωγή στη θεωρητική Γεωμετρία στο Λύκειο. Αντίστοιχα οι αναλύσεις και συνθέσεις σχημάτων σε άλλα σχήματα και η αξιοποίηση των μετασχηματισμών αναπτύσσουν μια ευλυγισία στην προσέγγιση γεωμετρικών ιδιοτήτων και σχέσεων.

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας δίνει μια καλή ευκαιρία για την προσέγγιση του συλλογισμού και της συστηματικής τεκμηρίωσης και της (άτυπης αρχικά) απόδειξης που διευκολύνει τους μαθητές να εισαχθούν στο Λύκειο στην γεωμετρική και γενικότερα στη μαθηματική απόδειξη. Οι διαδικασίες αυτές υποστηρίζονται από την ανάπτυξη της κατάλληλης γλώσσας και όρων που βοηθάνε τους μαθητές να διατυπώσουν ορισμούς και να παρουσιάσουν με συστηματικό τρόπο ιδιότητες και σχέσεις.

Αναφορικά με τη μέτρηση μεγεθών, οι διαδικασίες, οι τεχνικές και τα εργαλεία μέτρησης έχουν μεγάλη σημασία κι ενδιαφέρον για πολλές εφαρμογές της καθημερινής ζωής αλλά και διαστάσεις των Μαθηματικών. Η φαινομενικά απλή και οικεία διαδικασία 'μέτρησης' με τη χρήση μέσων (όπως μέτρο, χάρακας, μεζούρα κλπ.) οδήγησε τα παλαιότερα προγράμματα σπουδών στην καθυστερημένη και ελλιπή διδακτική εισαγωγή των μετρήσεων με αποτέλεσμα την αντιμετώπιση δυσκολιών από τους μαθητές σε μετρικά προβλήματα αλλά και υστερήσεις των ενηλίκων στην αντιμετώπιση καταστάσεων που απαιτούσαν συγκρίσεις ή μετρήσεις μεγεθών.

Σήμερα η διδασκαλία της μέτρησης επιδιώκει να ασκήσει τους μαθητές στην ουσιαστική κατανόηση και εφαρμογή της διαδικασίας μέτρησης (μαθηματικών μεγεθών) με τη χρήση τεχνικών και εργαλείων, αλλά και την ανάπτυξη δεξιοτήτων για ακριβείς υπολογισμούς και υπολογισμούς κατά προσέγγιση (Bragg, & Outhred, 2000).

Στο πρόγραμμα σπουδών προσεγγίζονται αρχικά οι *μετρικές έννοιες* δηλαδή οι ιδιότητες ή οι σχέσεις ανάμεσα σε αντικείμενα ή καταστάσεις του χώρου που σχετίζονται με τα μαθηματικά μεγέθη (γωνία, μήκος, επιφάνεια και όγκος). Στην συνέχεια οι μετρήσεις συνδέονται με τους τύπους των επιφανειών και των όγκων των επίπεδων και στερεών σχημάτων. Στις μικρές τάξεις εισάγεται στους μαθητές και η μέτρηση του χρόνου ενώ στις μεγαλύτερες τάξεις οι έννοιες της τριγωνομετρίας συνδέονται με την μέτρηση της γωνίας.

Η μέτρηση είναι μια διαδικασία που εισάγει την έννοια *του μεγέθους*, την έννοια της *μονάδας* όπως και την έννοια της *επανάληψης*, που είναι τα βασικά στοιχεία σε μία οποιαδήποτε μέτρηση (αυτών ή άλλων μεγεθών). Οι μαθητές προσεγγίζουν εννοιολογικά το *αμετάβλητο* του μεγέθους, τις *άμεσες* και τις *έμμεσες συγκρίσεις* μεγεθών όπως και τη *χρήση τυπικών και μη τυπικών μονάδων*. Η χρήση μονάδων κάνει απαραίτητη την εννοιολογική κατανόηση της *διαίρεσης* ενός μεγέθους σε ίσα μέρη, την *επανάληψη των μονάδων*, την καταμέτρηση των ίσων μερών και τη *σύνδεση της επανάληψης με ένα αριθμό* που αποδίδει το μέτρο του μεγέθους, στοιχεία αυτά αναπτύσσονται βαθμιαία στους μαθητές από τις μικρότερες τάξεις (Bragg, & Outhred, 2004).

Επιπλέον η προσέγγιση των τύπων των εμβαδών και των όγκων προϋποθέτουν τη *δόμηση του χώρου*, δηλαδή μια νοερή πράξη οργάνωσης του σε γραμμές, στήλες (ή και ύψη για τις τρεις διαστάσεις) που συνδέουν τις επικαλύψεις ή τα 'γεμίσματα' με τον πολλαπλασιαστικό υπολογισμό της επιφάνειας (και του όγκου) (Outhred, & Mitchelmore, 2000).

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν η διδασκαλία της μέτρησης επιδιώκει να διαχειριστεί με προσοχή τη σύνδεση *συνεχών χαρακτηριστικών* όπως είναι το μήκος, η επιφάνεια ή ο όγκος με *διακριτά τυπικά μεγέθη* που αποτελούν οι μονάδες και την αντιστοίχιση αυτής της *σύνδεσης με ένα αριθμό*. Η σύνδεση αυτή πραγματοποιείται βαθμιαία μέσα από πραγματικές καταστάσεις σύγκρισης, επικάλυψης, μέτρησης των επαναλήψεων, των επιστρώσεων ή των γεμισμάτων, όπως και η προσέγγιση των τύπων με τη *δόμηση του χώρου* (van den Heuvel-Panhuizen, & Buys, 2005).

Η χρήση των εργαλείων μέτρησης και η ανάπτυξη στρατηγικών εκτίμησης υποστηρίζουν τους μαθητές στην ουσιαστική κατανόηση των μεγεθών (Outhred, Mitchelmore, Mcphail, & Gould, 2003).

### **Στοχαστικά Μαθηματικά**

Καθημερινά τα ΜΜΕ παρουσιάζουν στατιστικές πληροφορίες για ένα πλήθος ζητημάτων (οικονομία, ιατρική, κοινωνικά θέματα, πολιτική κ.λπ.), οι οποίες επηρεάζουν τη λήψη αποφάσεων στην προσωπική, επαγγελματική και κοινωνική μας ζωή. Ο βασικός σκοπός της διδασκαλίας των Στοχαστικών Μαθηματικών (Στατιστική, Πιθανότητες) στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση είναι να αναπτύξει την ικανότητα του μαθητή-μελλοντικού πολίτη-να αξιολογεί κριτικά πληροφορίες, να εξάγει συμπεράσματα, να κάνει προβλέψεις και να λαμβάνει αποφάσεις κάτω από αβέβαιες συνθήκες. Η βασική διαφορά των Στοχαστικών Μαθηματικών από τις άλλες θεματικές περιοχές των Μαθηματικών είναι ότι μελετά προβλήματα που σχετίζονται με τη μεταβλητότητα δεδομένων, δηλαδή με την διαφορετικότητα που υπάρχει γύρω μας (π.χ. τα άτομα διαφέρουν, οι συνθήκες ενός πειράματος διαφέρουν) (Garfield & Ben-Zvi, 2007, 2008).

Το προτεινόμενο πρόγραμμα σπουδών παρέχει στους μαθητές τη δυνατότητα να θέτουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα, να συλλέγουν, να οργανώνουν και να αναπαριστούν τα σχετικά δεδομένα, να επιλέγουν κατάλληλες στατιστικές μεθόδους για να τα αναλύουν και να εξάγουν συμπεράσματα, να κάνουν προβλέψεις βασισμένοι σε δεδομένα. Η διδασκαλία της Στατιστικής μπορεί να απεγκλωβιστεί από την εκμάθηση εκτέλεσης αλγορίθμων και κατασκευής αναπαραστάσεων χωρίς νόημα και να εστιάσει στην ανάπτυξη της στατιστικής σκέψης των μαθητών μέσα από την πραγματοποίηση ερευνών, την κατανόηση των στατιστικών μεθόδων, τη σύνδεση των στατιστικών εννοιών, την ερμηνεία των στατιστικών αποτελεσμάτων, την παρατήρηση ομοιομορφιών, την παραγωγή συμπερασμάτων. Η διδασκαλία των Πιθανοτήτων μπορεί να δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να πραγματοποιούν πειράματα τύχης και να αξιολογούν τη διαφορά ανάμεσα στις προβλέψεις τους και τα εμπειρικά αποτελέσματα που προκύπτουν κατά την πραγματοποίησή τους.

Η εισαγωγή των στοχαστικών Μαθηματικών από την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία αποτελεί ένα νέο στοιχείο στο πρόγραμμα σπουδών. Επιτρέπει τη σταδιακή

ανάπτυξη της στοχαστικής σκέψης των μαθητών και μπορεί να εξασφαλίσει μία καλύτερη κατανόηση των στοχαστικών εννοιών στην πορεία της μαθηματικής τους εκπαίδευσης. Η αλλαγή αυτή έχει στηριχτεί σε πρόσφατες έρευνες στη διεθνή βιβλιογραφία (Franklin et al., 2005; Jones, 2005; Shaughnessy, 2007), οι οποίες υπογραμμίζουν πως τα παιδιά σε αυτήν την ηλικία ως 'μικροί ερευνητές' είναι σε θέση να διαχειριστούν προβλήματα Στοχαστικών Μαθηματικών. Ήδη, σύμφωνα με τα αναλυτικά προγράμματα Μαθηματικών πολλών χωρών, τα Στοχαστικά Μαθηματικά εντάσσονται από το Νηπιαγωγείο (ενδεικτικά NCTM, Αμερική, 2000, Common Curriculum Framework for K-9 Mathematics, Καναδάς, 2006, K-10 Scope & Sequence, Αυστραλία, 2007, Department for Education and Skills, Μεγάλη Βρετανία, 2010).

Στον πρώτο ηλικιακό κύκλο τα παιδιά με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού διατυπώνουν ερωτήματα που προκαλούν το ενδιαφέρον τους και τα οποία περιορίζονται στον πληθυσμό της τάξης τους. Είναι σημαντικό να δοθεί η ευκαιρία στα παιδιά να συλλέξουν τα δικά τους δεδομένα και να τα οργανώσουν. Αναπαριστούν τα δεδομένα κατασκευάζοντας απλά διαγράμματα, χρησιμοποιώντας την ένα προς ένα αντιστοίχιση, παρατηρούν τις διαφορές των δεδομένων μεταξύ των ατόμων και τις συγκρίνουν με αυτές της ομάδας, διαβάζουν και συγκρίνουν πληροφορίες μεταξύ των δεδομένων. Επίσης, αρχίζουν να αντιλαμβάνονται ότι η πιθανότητα είναι ένα μέτρο της αβεβαιότητας και αναπτύσσουν άτυπα τη γλώσσα των πιθανοτήτων περιγράφοντας ένα ενδεχόμενο ως βέβαιο, αδύνατο, πιθανό, απίθανο. Συγκρίνουν ενδεχόμενα ως προς την πιθανότητα εμφάνισής τους, πραγματοποιούν απλά πειράματα τύχης, χαρακτηρίζουν ένα παιχνίδι τύχης ως δίκαιο ή άδικο, συνδυάζουν ή διατάσσουν μικρό αριθμό αντικειμένων.

Στο δεύτερο ηλικιακό κύκλο οι μαθητές διατυπώνουν τις δικές τους ερωτήσεις που δεν αφορούν μόνο στον πληθυσμό της τάξης τους, αλλά αρχίζουν να συγκρίνουν τη μεταβλητότητα των δεδομένων σε διαφορετικούς πληθυσμούς. Συλλέγουν δεδομένα (μέσω ερευνών ή πειραμάτων ή μετρήσεων) στην τάξη τους, στο σχολείο ή στην κοινότητα, κατασκευάζουν μια ποικιλία στατιστικών διαγραμμάτων και συγκρίνουν την αποτελεσματικότητα διαφορετικών αναπαραστάσεων για την παρουσίαση μιας ομάδας δεδομένων. Μαθαίνουν να επιχειρηματολογούν για την επιλογή μιας μεθόδου συλλογής δεδομένων, αναλύουν δεδομένα χρησιμοποιώντας στατιστικές μεθόδους, εξάγουν συμπεράσματα και κάνουν προβλέψεις, αναγνωρίζοντας τους περιορισμούς των δεδομένων (δείγμα, πληθυσμός). Αρχίζουν να αποκτούν μια κατανόηση του τυχαίου μέσα από την εκτίμηση της πιθανότητας, πραγματοποιώντας πειράματα και αξιολογώντας εμπειρικά δεδομένα και εκφράζουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου με κλάσματα ή ποσοστά.

Στον τρίτο ηλικιακό κύκλο οι μαθητές διατυπώνουν ερωτήματα που αφορούν σε σχέσεις δεδομένων στον ίδιο πληθυσμό ή σε διαφορετικούς πληθυσμούς. Αρχίζουν να αναγνωρίζουν τη διαφορά μεταξύ των δειγμάτων, χαρακτηρίζοντας τα δείγματα ως τυχαία, αντιπροσωπευτικά ή μη αντιπροσωπευτικά και χρησιμοποιούν αυτούς τους χαρακτηρισμούς για να αξιολογήσουν την ποιότητα των δεδομένων και να εξάγουν συμπεράσματα για τον πληθυσμό. Πραγματοποιούν ή προσομοιώνουν σύνθετα πειράματα τύχης και ελέγχουν τις προβλέψεις τους σε σχέση με τα

αποτελέσματά τους. Υπολογίζουν την πιθανότητα ενδεχομένων, αξιοποιώντας γνώσεις συνδυαστικής.

### **Επιλογή και χρήση εργαλείων**

Η απλή παρουσία εργαλείων (π.χ. χειραπτικών μοντέλων, τεχνολογικών εργαλείων, λογισμικού κ.λπ.) δεν διασφαλίζει την κατασκευή της γνώσης. Αφενός μεν πολλοί μαθητές εμφανίζουν δυσκολίες στη χρήση εργαλείων (ακόμα και σε απλές περιπτώσεις χρήσης π.χ. του διαβήτη ή του μοιρογνωμονίου), αφετέρου τα εργαλεία δεν ενσωματώνονται συνήθως λειτουργικά στη διαδικασία μάθησης. Οι μαθητές χρειάζεται να αποκτήσουν την ικανότητα να χρησιμοποιούν κατάλληλα χειραπτικά και ψηφιακά εργαλεία, και τις κατάλληλες υπολογιστικές στρατηγικές προκειμένου να εκτελούν συγκεκριμένες μαθηματικές δράσεις, να διερευνούν μαθηματικές ιδέες, και να επιλύουν προβλήματα. Με τα εργαλεία επεκτείνουν τις ικανότητές τους να διερευνούν και να αναλύουν μαθηματικές έννοιες, να εξερευνούν μαθηματικές κανονικότητες, να κατανοούν γεωμετρικές σχέσεις καλλιεργώντας ή αμφισβητώντας τη διαίσθησή τους.

Οι μαθητές κυρίως με τα χειραπτικά υλικά αναπαριστούν μαθηματικές ιδέες και σχέσεις και μοντελοποιούν καταστάσεις χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα υλικά, εικόνες, διαγράμματα (π.χ. αριθμογραμμή), γραφήματα, πίνακες, σύμβολα. Η χρήση αναπαραστάσεων τους βοηθά να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες και σχέσεις, να επικοινωνήσουν τη σκέψη τους, να εκφράσουν επιχειρήματα, και να ερμηνεύσουν πραγματικές καταστάσεις. Τα ψηφιακά εργαλεία ενισχύουν αυτές τις συνδέσεις καθώς εμπεριέχουν διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις α) μαθηματικού φορμαλισμού, β) κειμενικού λόγου, γ) μαθηματικών αναπαραστάσεων – γραφικών, σχηματικών, πινάκων κλπ δ) προσομοιώσεων φαινομένων με μαθηματική συμπεριφορά – ιδιότητες.

Η αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών υποστηρίζει την έμφαση που δίνεται στο ΠΣ στην εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες μαθηματικών συλλογισμών και επικοινωνίας. Για να είναι αυτό εφικτό είναι απαραίτητη η χρήση εξειδικευμένων λογισμικών για μαθηματική διερεύνηση και δράση και εργαλείων κοινωνικού λογισμικού για συλλογική διαπραγμάτευση και συνεργασία. Τα λογισμικά μαθηματικής δράσης και επικοινωνίας έχουν το ρόλο εργαλείων μαθηματικής έκφρασης στα χέρια των μαθητών πρώτιστα, θέτουν δε τα μαθηματικά στη διττή τους διάσταση, δηλαδή ως νοητικά εργαλεία για την ερμηνεία φαινομένων και πραγματικών καταστάσεων αλλά και ως αξία από μόνα τους. Χρησιμοποιούνται ως ψηφιακά εργαλεία για την ενίσχυση εμπλοκής με πραγματικά προβλήματα και μοντελοποίηση με στόχο την ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης. Οι δραστηριότητες των μαθητών που ενισχύονται και εμπλουτίζονται με τα εργαλεία αυτά είναι η δημιουργία, το 'μαστόρεμα' ψηφιακών μαθηματικών αντικειμένων, σχέσεων και μοντέλων, η διερεύνηση, ο πειραματισμός με μαθηματικά αντικείμενα και σχέσεις. Ιδιαίτερη αξία έχουν η διαμεσολάβηση, η διαπραγμάτευση και η συνεργασία γύρω από αυτά τα ψηφιακά μαθηματικά αντικείμενα.

Τα ψηφιακά εργαλεία που προτείνονται στο ΠΣ οργανώνονται σε πέντε κατηγορίες ανάλογα με το είδος της μαθηματικής δραστηριότητας και τον τρόπο χρήσης της υφιστάμενης τεχνολογίας. Για την κάθε κατηγορία υπάρχει ικανή επιστημονική τεκμηρίωση της παιδαγωγικής αξίας χρήσης της από μαθητές διεθνώς. Στη συνέχεια επιλέγονται ρητά από ένα καλό εξελληνισμένο παράδειγμα λογισμικού από κάθε



κατηγορία στο οποίο να έχουν απρόσκοπτη και ανέξοδη πρόσβαση όλοι οι μαθητές και αναφέρονται κι άλλες εναλλακτικές συμπληρωματικά. Αποφεύγεται δηλαδή η αντίληψη 'βιβλιοθήκης λογισμικών' όπου ο μαθητής 'εκτίθεται' σε επιφανειακή χρήση και σχέση με πολλά ετερόκλητα λογισμικά χωρίς να έχει την ευκαιρία να εμπλακεί σε μαθηματικές δραστηριότητες. Οι κατηγορίες είναι οι ακόλουθες:

- Μαθηματική έκφραση μέσω προγραμματισμού
- Δυναμικός χειρισμός γεωμετρικών αντικειμένων και σχέσεων
- Αλγεβρική διερεύνηση με αντίστοιχα συστήματα
- Διερεύνηση, πειραματισμός και επεξεργασία δεδομένων για στατιστική και πιθανότητες
- Πειραματισμός με ψηφιακά μοντέλα

Τα ψηφιακά εργαλεία έκφρασης χρησιμοποιούνται ως βασικό υλικό αναφοράς σε συνθετικές εργασίες και παράλληλα περιστασιακά στο πλαίσιο κατανόησης εννοιών, αναπαραστάσεων και των συνδέσεων μεταξύ αναπαραστάσεων (π.χ. πώς μετεξελίσσεται η δευτεροβάθμια καθώς αλλάζει η κάθε μια από τις παραμέτρους της)

Χρησιμοποιούνται και από τον εκπαιδευτικό κατά την παραδοσιακή μετωπική διδασκαλία (μέσω Διαδραστικού Πίνακα) ως μέσα εξήγησης εννοιών μέσω δυναμικού χειρισμού αντικειμένων και μοντέλων καθώς επίσης και για το σχεδιασμό και προετοιμασία μαθητικών δραστηριοτήτων αλλά και για ίδια μαθηματική διερεύνηση.

Στο πρόγραμμα σπουδών, τα ψηφιακά εργαλεία μαθηματικής έκφρασης αξιοποιούνται με συνδυασμό μεικτής και διακριτής παρέμβασης. Χρησιμοποιούνται δηλαδή ως **εργαλεία έκφρασης** σε βασικό υλικό αναφοράς σε συνθετικές εργασίες και παράλληλα επιλεκτικά με τη μορφή **μικρο-πειραμάτων** στο πλαίσιο κατανόησης εννοιών, αναπαραστάσεων και των συνδέσεων μεταξύ αναπαραστάσεων (π.χ. πώς μετεξελίσσεται η γραφική παράσταση της δευτεροβάθμιας συνάρτησης καθώς αλλάζει ο συντελεστής του  $x^2$ ).

### **Μαθηματική δραστηριότητα**

Η έννοια της δραστηριότητας είναι μια έννοια με διαφορετικές σημασίες τόσο στον ερευνητικό χώρο της Μαθηματικής Εκπαίδευσης όσο και στο πως αυτή ερμηνεύεται στην πράξη. Η δραστηριότητα χαρακτηρίζεται από ενεργή δράση των ατόμων στην οποία εμπλέκονται τα οποία έχουν ένα κίνητρο και ένα στόχο για να πραγματοποιήσουν, είναι συλλογική και συστημική και χαρακτηρίζεται από συνεχή μετασχηματισμό και αλλαγή (Leont'ev, 1978). Κάτω από αυτή την οπτική η μαθηματική δραστηριότητα «προκαλείται» μέσα από το πρόγραμμα σπουδών καθώς προτείνονται καταστάσεις – προβλήματα που επιτρέπουν στο μαθητή να δράσει με κάποιο κίνητρο ατομικά και συλλογικά και αξιοποιώντας διαφορετικής μορφής εργαλεία να επιτύχει μια σειρά μαθηματικών στόχων και διεργασιών. Το είδος των καταστάσεων που προτείνονται στο ΠΣ αφορούν τη μοντελοποίηση μιας πραγματικής κατάστασης, την πραγματοποίηση ενός παιχνιδιού, τη μαθηματική διερεύνηση μέσα από τη χρήση εργαλείων και πηγών. Ο στόχος των καταστάσεων αυτών είναι η εμπλοκή των μαθητών στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών, στην απόκτηση και χρήση τεχνικών με ευελιξία, στην ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης

προβλήματος, στη δημιουργία εννοιολογικών συνδέσεων, στη σύνδεση αναπαραστάσεων, στην ανάπτυξη μαθηματικού συλλογισμού καθώς και θετικής στάσης για τα μαθηματικά. Όπως όμως υποστηρίζεται από τη σχετική έρευνα (Henningesen & Stein, 1997) η μαθηματική δραστηριότητα στην οποία τελικά εμπλέκονται οι μαθητές δεν εξαρτάται μόνο από την κατάσταση – πρόβλημα που τίθεται στο ΠΣ και στο αντίστοιχο εκπαιδευτικό υλικό αλλά στη διαχείριση της στη σχολική τάξη. Συχνά μια «πλούσια» κατάσταση μπορεί να οδηγήσει σε μια «τετριμμένη» μαθηματική εμπλοκή των μαθητών όπου η έμφαση δίνεται κυρίως στη χρήση αλγορίθμων και τεχνικών χωρίς κατανόηση. Η τετριμμένη δράση ή η απλή δράση πάνω σε μαθηματικά αντικείμενα δεν είναι αρκετά για να χαρακτηρίσουν μια δραστηριότητα μαθηματική. Είναι απαραίτητη η αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων, η εύρεση κανόνων, ο αναστοχασμός πάνω στη δράση και η γενίκευση της (Serpinska, 1994). Προϋπόθεση για τη διατήρηση της μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών σε υψηλό γνωστικό επίπεδο είναι ο εκπαιδευτικός να μπορεί να διακρίνει τα στοιχεία που συνιστούν μια πλούσια μαθηματική δραστηριότητα και αυτό συσχετίζεται τόσο με τη μαθηματική όσο και την παιδαγωγική γνώση του αναφορικά με το περιεχόμενο που διαχειρίζεται στη σχολική τάξη (Ball et al, 2008).

### **Συνθετική εργασία**

Οι καταστάσεις – προβλήματα που αναφέρθηκαν παραπάνω συνδέονται με την επίτευξη ενός συγκεκριμένου ή κάποιου συνδυασμού μαθηματικών αποτελεσμάτων. Επέκταση αυτών των μορφών αποτελούν οι συνθετικές εργασίες που δίνουν έμφαση σε θέματα συνδέσεων των μαθηματικών τόσο στο πλαίσιο του αναγκαίου μαθηματικού γραμματισμού του μελλοντικού πολίτη στο σύγχρονο κόσμο όσο και στη θεώρηση των μαθηματικών ως πολιτισμικού δημιουργήματος της ανθρώπινης ιστορίας. Κεντρικός στόχος είναι να αναδειχτεί στους μαθητές η αναγκαιότητα της διδασκαλίας των μαθηματικών και ο κρίσιμος ρόλος τους στην αναζήτηση των μαθηματικών δομών στη φύση και στις ανθρώπινες δραστηριότητες. Η *συνθετική εργασία* ορίζεται ως μια δραστηριότητα που μπορεί να εφαρμοστεί από τον εκπαιδευτικό για ένα σύνολο διδακτικών ωρών και δίνει έμφαση στην ανάδειξη των διασυνδέσεων των μαθηματικών με άλλες επιστήμες και γνωστικές περιοχές και στην παιδαγωγική αξιοποίηση της ψηφιακής τεχνολογίας. Έτσι, το θέμα μιας τέτοιας εργασίας μπορεί να σχετίζεται είτε με την αξιοποίηση της τεχνολογίας είτε με την οριζόντια σύνδεση των μαθηματικών με άλλες περιοχές του ΠΣ (π.χ. Πολιτισμός, Σχολική Ζωή, Περιβάλλον και Εκπαίδευση για την Αειφόρο Ανάπτυξη) χωρίς να αποκλείεται ο συνδυασμός των παραπάνω. Στο επίκεντρο κάθε συνθετικής εργασίας βρίσκεται η συνεργασία μεταξύ των μαθητών (συχνά σε ομάδες) για τη διερεύνηση ενός θέματος ή τη λύση ενός προβλήματος στο οποίο εμπλέκονται τα μαθηματικά και αναδεικνύονται ως εργαλείο που ευνοεί τη διερεύνηση καθαυτή, τη διαπραγμάτευση και την ερμηνεία. Λαμβάνοντας υπόψη δεδομένα από έρευνες στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών που αναδεικνύουν τη σημασία της σύνδεσης της μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών με διαδικασίες κοινωνικής αλληλεπίδρασης και επικοινωνίας στη σχολική τάξη, οι συνθετικές εργασίες στοχεύουν στην εμπλοκή των μαθητών με νέους τρόπους συνεργατικής μάθησης που βασίζονται στην ανταλλαγή και επεξεργασία υλικού, την ανάπτυξη μαθηματικών νοημάτων και τη συλλογική διαπραγμάτευση εννοιών. Στην περίπτωση των συνθετικών εργασιών με αξιοποίηση των ψηφιακών

εργαλείων η έμφαση δίνεται στην δυνατότητα που παρέχουν στους μαθητές να εμπλακούν βαθύτερα σε μαθηματικές δραστηριότητες, να κατασκευάσουν και να επεξεργαστούν ψηφιακά μαθηματικά αντικείμενα, συμπεριφορές και σχέσεις, να χειριστούν αλληλοσυνδεόμενες αναπαραστάσεις. Δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να κοινοποιήσουν τις κατασκευές τους, να επινοήσουν, να διατυπώσουν και να διερευνήσουν δικά τους ιδιότυπα προβλήματα, να επιχειρηματολογήσουν και να αιτιολογήσουν κανόνες και συμπεριφορές αντικειμένων.

Οι συνθετικές εργασίες που παρουσιάζονται ενδεικτικά στο ΠΣ σχεδιάστηκαν με βάση το παραπάνω πλαίσιο και οι δραστηριότητες που περιλαμβάνονται σε αυτές βασίστηκαν σε θέματα που αφορούν τη χρήση ειδικά σχεδιασμένων εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας, την ιστορία των μαθηματικών, την ερμηνεία φαινομένων και την επίλυση πραγματικών προβλημάτων με βάση τα μαθηματικά, τη σύνδεση των μαθηματικών με άλλες επιστήμες και τον πολιτισμό. Τόσο οι πιο εστιασμένες καταστάσεις-προβλήματα όσο και οι συνθετικές εργασίες δεν προτείνεται να ειδωθούν ως αντικείμενα υλικού προς επεξήγηση στους μαθητές, αλλά να λειτουργήσουν ως γεννήτορες ιδεών για τη δημιουργική εμπλοκή των ίδιων των εκπαιδευτικών στο σχεδιασμό νέων εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων για τη διερεύνηση μιας ποικιλίας μαθηματικών εννοιών του ΠΣ από τους μαθητές. Το Πρόγραμμα σπουδών προτείνει τη διαχείριση 10 ωρών διδασκαλίας ανά σχολικό έτος από το προβλεπόμενο για να εργαστούν οι μαθητές σε συνθετικές εργασίες.

### **Αξιολόγηση**

Η αξιολόγηση είναι μια πολύ σημαντική διαδικασία της εκπαίδευσης, για το λόγο αυτό τη βρίσκουμε ανάμεσα στις βασικές αρχές πολλών σύγχρονων αναλυτικών προγραμμάτων στο διεθνή χώρο. Η αξιολόγηση είναι σημαντικό να είναι πλήρως ενσωματωμένη στην εκπαίδευση των μαθηματικών και να συμβάλει ουσιαστικά για μια πιο ποιοτική μάθηση.

Ο σκοπός της αξιολόγησης είναι να παράγει πληροφορίες που συνεισφέρουν στη διαδικασία διδασκαλίας και μάθησης και υποστηρίζουν τη λήψη εκπαιδευτικών αποφάσεων από τους μαθητές, τους εκπαιδευτικούς, τους γονείς και τη διοίκηση. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε μια σειρά από αρχές της αξιολόγησης όπως καταγράφονται από τους ερευνητές (Romborg, 2004, σελ. 16):

1. Ο κύριος σκοπός της αξιολόγησης στην τάξη είναι να βελτιωθεί η μάθηση.
2. Οι μέθοδοι αξιολόγησης επιτρέπουν στους μαθητές να παρουσιάσουν αυτό που ξέρουν παρά αυτό που δεν ξέρουν.
3. Οι αξιολογήσεις παρέχουν στους μαθητές πολλαπλές και ποικίλες ευκαιρίες (μορφές) για να επιδείξουν και να τεκμηριώσουν τις επιδόσεις τους.
4. Οι καταστάσεις που προτείνονται καθιστούν λειτουργικούς όλους τους στόχους του προγράμματος σπουδών (και όχι μόνο τους "χαμηλότερους"). Τα πρότυπα επίδοσης, συμπεριλαμβανομένων των ενδείξεων των διαφορετικών επιπέδων μαθηματικής σκέψης, είναι χρήσιμα εργαλεία σε αυτήν την διαδικασία.
5. Η βαθμολόγηση των κριτηρίων, συμπεριλαμβανομένων των περισσότερο ή λιγότερο υποδειγματικών παραδειγμάτων, δημοσιεύεται και εφαρμόζεται με συνέπεια.
6. Τα τεστ και η βαθμολόγηση περιλαμβάνουν την ελάχιστη μυστικότητα.
7. Η ανατροφοδότηση που δίνεται στους μαθητές είναι γνήσια.

8. Η ποιότητα μιας κατάστασης δεν καθορίζεται από τη δυνατότητα πρόσβασής της στο αντικειμενικό σκορ, την αξιοπιστία, ή την εγκυρότητα με την παραδοσιακή έννοια, αλλά από την αυθεντικότητα, την αμεροληψία, και την επεξήγηση των ανωτέρω αρχών.

Για πολλούς ο ρόλος της αξιολόγησης περιορίζεται στη μέτρηση στο τέλος του μαθήματος, με ένα τεστ, των επιδόσεων των μαθητών. Ενώ αντίθετα μπορεί να αποτελεί ένα ολοκληρωμένο μέρος της διδασκαλίας που πληροφορεί και καθοδηγεί τον εκπαιδευτικό στις διδακτικές του αποφάσεις καθώς επίσης καθοδηγεί και εμπλουτίζει τη μάθηση του μαθητή. Οι δύο βασικές λειτουργίες της αξιολόγησης είναι η αποτίμηση και η ανατροφοδότηση της μάθησης και της διδασκαλίας. Η αξιολόγηση βοηθά τον εκπαιδευτικό να πάρει αποφάσεις σχετικά με το περιεχόμενο και τη μορφή της διδασκαλίας (διαμορφωτική αξιολόγηση) μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για την αποτίμηση των επιτευγμάτων του μαθητή (αθροιστική αξιολόγηση). Η διαμορφωτική αξιολόγηση (α) επιτρέπει στον εκπαιδευτικό να παρεμβαίνει στη μαθησιακή διαδικασία, να λειτουργεί εξοικονομημένα, να επαναπροσδιορίζει το ρόλο του προς την κατεύθυνση της αυτόνομης μάθησης προσφέροντας συμπληρωματική βοήθεια και καθοδήγηση στους μαθητές που την έχουν ανάγκη, (β) στοχεύει στην ανατροφοδότηση της διδακτικής πράξης με παράλληλη βελτίωση της ποιότητας της παρεχόμενης διδασκαλίας και αύξηση της αποτελεσματικότητάς της, (γ) ενημερώνει το μαθητή για την πορεία και τα αποτελέσματα των προσπαθειών που κατέβαλε, (δ) οδηγεί το μαθητή σε αυτογνωσία σχετικά με τις ιδιαίτερες ικανότητες και κλίσεις που διαθέτει και οι οποίες θα μπορούσαν να σχετιστούν με τον επαγγελματικό του προσανατολισμό, (ε) διασφαλίζει σε ικανοποιητικό βαθμό την αξιοπιστία και την εγκυρότητα της αξιολόγησης. Η έρευνα στο πεδίο της αξιολόγησης έχει αναδείξει τα περιορισμένα αποτελέσματα που επιφέρουν συγκεκριμένα είδη αθροιστικής αξιολόγησης σε τομείς όπως η δημιουργικότητα και η κινητικότητα των μαθητών ή τις αναπόφευκτες επικρίσεις για τις επίσημες διαδικασίες αξιολόγησης (π.χ. Broadfoot, 1996). Παράλληλα, από τη σχετική έρευνα στο πεδίο προέκυψαν αμφιβολίες για την αντικειμενικότητα και την αποδοτικότητα των συμβατικών αθροιστικών τεχνικών αξιολόγησης, για τη μη δυνατότητα ενίσχυσης της επίδοσης και πρόβλεψης της μελλοντικής επίδοσης, καθώς και για την έλλειψη κινήτρου για μάθηση (π.χ. Black & William, 1998; Harlen & Deakin-Crick, 2003).

Η αξιολόγηση μπορεί να επηρεάσει και να εμπλουτίσει τη μάθηση του μαθητή ποικιλοτρόπως. Ένα πρώτο σημείο είναι ότι ο μαθητής επικεντρώνεται και θεωρεί ως σημαντική μαθηματική γνώση τα σημεία στα οποία αναφέρεται η αξιολόγηση. Καταβάλει περισσότερη προσπάθεια και προσανατολίζεται στις γνώσεις, τις μεθόδους και τις διαδικασίες τις οποίες προκρίνει η αξιολόγηση. Έτσι αν ο εκπαιδευτικός στο πλαίσιο της αξιολόγησης χρησιμοποιεί την προσωπική συνέντευξη, το διάλογο στην τάξη και τη συστηματική παρατήρηση, οι μαθητές συνηθίζουν και ασκούνται στο να οργανώνουν και να εκφράζουν τις σκέψεις τους με μεταγνωστικό τρόπο. Ένα δεύτερο σημείο είναι ότι μέσα από τις διαδικασίες της αξιολόγησης ο μαθητής αποκτά μεγαλύτερη ευθύνη και γίνεται πιο ανεξάρτητος στη μάθηση. Έτσι για παράδειγμα, συζητώντας και αναλύοντας τα αποτελέσματα σε μια βαθμολογημένη κλίμακα αξιολόγησης οι μαθητές διακρίνουν τα χαρακτηριστικά και τον τρόπο που πρέπει να παρουσιάζεται μια σωστή και πλήρης

απάντηση. Η επικέντρωση επίσης σε διαδικασίες αυτοαξιολόγησης και ετεροαξιολόγησης έχουν πολύ θετική επίδραση στους μαθητές. Μέσα από τη συζήτηση των κριτηρίων της σωστής απάντησης οι μαθητές εκπαιδεύονται στην αυτοαξιολόγηση και την κριτική στάση της δικής τους εργασίας αλλά και της εργασίας των άλλων.

Όταν ο εκπαιδευτικός έχει στη διάθεσή του αρκετές και χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με τη μάθηση των μαθητών του, μπορεί να οργανώσει και να οδηγήσει τη διδασκαλία του σε πιο ουσιαστικές και προσαρμοσμένες για τους μαθητές μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες. Για να έχει μια πλήρη εικόνα για τον μαθητή ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να χρησιμοποιήσει ποικίλες και διαφορετικές τεχνικές αξιολόγησης. Η ποσοτική αξιολόγηση με τα γραπτά τεστ παρέχει περιορισμένες πληροφορίες σχετικά με το τι μπορεί να κάνει ο μαθητής σε πολύ ειδικές συνθήκες. Οι πληροφορίες από αυτού του είδους την αξιολόγηση δίνουν μια ελλιπή και ίσως αποσπασματική εικόνα σχετικά με τις επιδόσεις των μαθητών. Η χρήση λοιπόν στην τάξη διαφορετικών τεχνικών αξιολόγησης όπως οι ερωτήσεις ανοιχτού τύπου, η επιλογή προκατασκευασμένων απαντήσεων, η αξιολόγηση συνθετικών εργασιών, η συζήτηση, η παρατήρηση, ο φάκελος εργασιών και το ημερολόγιο μπορούν να βοηθήσουν στην καλύτερη αποτίμηση της επίτευξης των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων. Για παράδειγμα, με τις συζητήσεις μέσα στην τάξη ο εκπαιδευτικός μπορεί να καταλάβει καλύτερα τη σκέψη, τις στρατηγικές και την ικανότητα αιτιολόγησης του μαθητή. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιεί διαφοροποιημένα τις διάφορες τεχνικές αξιολόγησης σύμφωνα με τις ιδιαιτερότητες των μαθητών της τάξης του ως προς τις εμπειρίες, τις μαθησιακές δυσκολίες, τις διαπολιτισμικές και γλωσσικές διαφορές κτλ. Με τις παραπάνω τεχνικές ο εκπαιδευτικός αντλεί στοιχεία για να αναλύσει, αξιολογήσει και βελτιώσει τη διδασκαλία του. Το πρόγραμμα σπουδών βοηθά τον εκπαιδευτικό στην αξιολόγηση της μάθησης και της διδασκαλίας:

- Παρουσιάζοντας αναλυτικά τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα ανά τάξη και μέσω των μαθησιακών - διδακτικών τροχιών πως συνδέονται με αυτά των προηγούμενων και επόμενων τάξεων. Με τον τρόπο αυτό ο εκπαιδευτικός κατανοεί από τη μια μεριά τις μαθηματικές δράσεις που είναι σημαντικό οι μαθητές να αναπτύξουν καθώς και αποκτά μια ολική εικόνα του τρόπου που αυτές εξελίσσονται σ' όλη την υποχρεωτική εκπαίδευση. Έτσι μπορεί να παρατηρήσει και να ερμηνεύσει τη μαθηματική δράση των μαθητών καθώς και να διαφοροποιήσει τη διδασκαλία του ανάλογα με τις ιδιαιτερότητες της τάξης του.
- Προτείνοντας ενδεικτικές δραστηριότητες και συνθετικές εργασίες που συσχετίζονται με συγκεκριμένα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα ώστε η αξιολόγηση τους να είναι εφικτή. Αποτελούν δε παραδείγματα για τον εκπαιδευτικό ώστε να μπορεί ο ίδιος να σχεδιάσει δραστηριότητες και ερωτήματα προς τους μαθητές τους που να τους επιτρέπουν την εμπλοκή τους σε πλούσια μαθηματική δραστηριότητα.

#### **Πίνακες Θεματικών ενοτήτων- Κωδικοί – Σύμβολα**

Τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα (ΠΜΑ), τα βασικά θέματα, οι δραστηριότητες και το εκπαιδευτικό υλικό παρουσιάζονται σε μορφή πίνακα ανά θεματική ενότητα (θεματικός άξονας) για κάθε τάξη. Η παρουσίαση τους δεν

συνδέεται με τη σειρά διαχείρισης του περιεχομένου στη διδασκαλία που αυτή εξαρτάται από το τι γνώσεις από άλλες θεματικές ενότητες χρειάζεται να έχουν οι μαθητές ώστε να επιτύχουν κάποιο συγκεκριμένο προσδοκώμενο μαθησιακό αποτέλεσμα. Στην πρώτη στήλη, τα ΠΜΑ αριθμούνται με βάση τη θεματική ενότητα στην οποία εντάσσονται. Ο παρακάτω πίνακας εξηγεί την αρίθμηση:

ΠΜΑ	Βασική θεματική ενότητα
Αρ#	Αριθμοί
Α#	Άλγεβρα
Γ#	Γεωμετρία- Χώρος
Μ#	Μέτρηση
Σ#	Στατιστική
Π#	Πιθανότητες

Στη δεύτερη στήλη παρουσιάζεται ο τίτλος της βασικής τροχιάς και των υποτροχιών καθώς και ενδεικτικός διδακτικός χρόνος. Στην τρίτη στήλη παρουσιάζεται κάποιο διδακτικό σχόλιο και γίνεται παραπομπή στις σχετικές ενδεικτικές δραστηριότητες. Στην τέταρτη στήλη το εκπαιδευτικό υλικό αφορά χειραπτικό υλικό που μπορούν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές, αναφορές στα υπάρχοντα διδακτικά εγχειρίδια, αναφορές σε σχετικές ιστοσελίδες καθώς και παραπομπή σε αρχεία λογισμικού που αναπτύχθηκαν στο πλαίσιο του Προγράμματος Σπουδών και θα ενταχθούν στο ψηφιακό υλικό ώστε να έχουν πρόσβαση οι εκπαιδευτικοί. Ένα παράδειγμα τέτοιου λογισμικού στην τέταρτη στήλη είναι το αρχείο: [Γ-ΑΔ1-Το α στην  \$\psi=\alpha\chi^2\$](#) , που αφορά την Γ΄ Γυμνασίου και την δραστηριότητα ΑΔ1 στον πίνακα των δραστηριοτήτων.

Στους πίνακες που παρουσιάζονται οι δραστηριότητες υπάρχει ανάλογη αρίθμηση με αυτή των ΠΜΑ. Για παράδειγμα, ΑΔ1 αντιστοιχεί στη δραστηριότητα 1 που αφορά στην Άλγεβρα ενώ ΠΔ2 είναι η δραστηριότητα 2 που αφορά στις Πιθανότητες. Στη δεύτερη στήλη ακολουθεί η περιγραφή της δραστηριότητας που άλλοτε απευθύνεται στον εκπαιδευτικό και άλλες φορές στο μαθητή. Στην τελευταία στήλη αναφέρονται τα ΠΜΑ που συνδέονται με τη συγκεκριμένη δραστηριότητα.

Τέλος οι συνθετικές εργασίες που παρουσιάζονται στο τέλος του κάθε κύκλου παρουσιάζονται αρχικά συνοπτικά σε ένα πίνακα όπου δίνεται ο τίτλος τους, μια σύντομη περιγραφή τους, η τάξη στην οποία αντιστοιχούν καθώς και το εκπαιδευτικό υλικό που μπορεί να αξιοποιηθεί. Στη συνέχεια ακολουθεί αναλυτική περιγραφή της συνθετικής εργασίας όπως μπορεί αυτή να δοθεί στους μαθητές, ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής της καθώς και τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα που μπορούν να επιτευχθούν μέσα από την εμπλοκή των μαθητών. Σε κάποιες περιπτώσεις οι συνθετικές εργασίες θέτουν ερωτήματα πέρα από αυτά των μαθηματικών ενώ αρκετές από αυτές αξιοποιούν την ψηφιακή τεχνολογία. Στο Γυμνάσιο υπάρχει παράδειγμα συνθετικής εργασίας όπου παρουσιάζεται πιο λεπτομερής τρόπος διαχείρισης.

Στους πίνακες παρουσιάζεται ένα ενδεικτικός χρόνος για κάθε θεματική ενότητα. Ο χρόνος αφορά 110 ώρες για το Γυμνάσιο ενώ 10 ώρες προβλέπεται να διατεθούν στις συνθετικές εργασίες. Η διδακτική διαχείριση του περιεχομένου δεν θα είναι

γραμμική αλλά θα γίνεται με βάση το τι χρειάζεται να γνωρίζουν οι μαθητές για να αντιμετωπίσουν τη συγκεκριμένη ενότητα.

## Α΄ Γυμνασίου

### Θεματική ενότητα: Αριθμοί-Άλγεβρα

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 55

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	Βασικά θέματα	Δραστηριότητες	Εκπαιδευτικό υλικό
<p>Αρ1. Χρησιμοποιούν κατάλληλα όρους όπως: παράγοντας, διαιρέτης, πολλαπλάσιο, διαιρεί, διαιρείται.</p> <p>Αρ2. Αναγνωρίζουν και εκφράζουν συμβολικά την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης και τη χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων.</p> <p>Αρ3. Διερευνούν και εφαρμόζουν απλές ιδιότητες της διαιρετότητας και τα κριτήρια της διαιρετότητας.</p> <p>Αρ4. Αναγνωρίζουν πρώτους αριθμούς και εφαρμόζουν το κόσκινο του Ερατοσθένη για να βρύνσκουν τους πρώτους αριθμούς.</p> <p>Αρ5. Αναλύουν ένα φυσικό αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και χρησιμοποιούν αυτή την ανάλυση για να προσδιορίσουν πρώτους παράγοντες, ΜΚΔ, σχετικά πρώτους αριθμούς, πολλαπλάσια και ΕΚΠ δύο ή περισσότερων αριθμών.</p> <p>Αρ6. Διερευνούν και εφαρμόζουν έννοιες από</p>	<p><b>Φυσικοί Αριθμοί – Διαιρετότητα</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Ευκλείδεια διαίρεση, ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων</li> </ul> <p>(6 ώρες)</p>	<p>Οι μαθητές, με δραστηριότητες και προβλήματα μαθηματικού περιεχομένου, διερευνούν στοιχεία της δομής των φυσικών αριθμών, αιτιολογούν και συζητούν τις λύσεις τους.</p> <p>(ενδεικτικές δραστηριότητες ΑρΔ1, ΑρΔ2)</p>	<p>Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) παρ. Α1.4 και Α1.5.</p>



<p>τη θεωρία αριθμών (παραγοντοποίηση φυσικών, παράγοντες, πολλαπλάσια, πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί, διαιρετότητα, ΜΚΔ, ΕΚΠ) στην επίλυση προβλημάτων.</p>			
<p>Αρ7. Διερευνούν συστήματα αρίθμησης φυσικών αριθμών (πχ το δυαδικό) και συγκρίνουν με το δεκαδικό.</p>	<p><b>Φυσικοί αριθμοί</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• θεσιακά συστήματα αρίθμησης (2 ώρες)</li> </ul>	<p>Το σημαντικό είναι η ανάδειξη στοιχείων του δεκαδικού συστήματος (ομαδοποίηση σε δυνάμεις του 10, αξία θέσης ψηφίου) μέσα από την διερεύνηση ενός άλλου συστήματος αρίθμησης (δυαδικό) και όχι η εξάσκηση στις μετατροπές αριθμών από το ένα σύστημα στο άλλο.  (ενδεικτική δραστηριότητα ΑρΔ3)</p>	<p><a href="http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/gymnasio/09_09_2010_ekpaideftiko_yliko_a_gymnasiou_enotita1.pdf">http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/gymnasio/09_09_2010_ekpaideftiko_yliko_a_gymnasiou_enotita1.pdf</a> σελ 39–42.</p>
<p>Αρ8. Αναγνωρίζουν και αναπαριστούν ακεραίους αριθμούς σε διαφορετικά πλαίσια.</p> <p>Αρ9. Συγκρίνουν και διατάσσουν ακέραιους αριθμούς, χρησιμοποιώντας την αριθμογραμμή και συνειδητοποιούν ότι κάθε ακέραιος αριθμός έχει επόμενο.</p> <p>Αρ10. Διερευνούν τη σχέση των ακεραίων με τους φυσικούς αριθμούς (κάθε φυσικός είναι ακέραιος, ύπαρξη ελάχιστου φυσικού και όχι ελάχιστου ακεραίου, ύπαρξη επόμενου).</p> <p>Αρ11. Αναγνωρίζουν την απόλυτη τιμή ακεραίων αριθμών ως την απόστασή τους από το 0.</p>	<p><b>Ακέραιοι αριθμοί</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• επέκταση των φυσικών στους ακεραίους (14 ώρες)</li> </ul>	<p>Οι μαθητές, με τις δραστηριότητες, διερευνούν και καταλήγουν στους κανόνες ορισμού των πράξεων, μέσω μοντέλων/μεταφορών. Επιπλέον, διερευνούν όψεις της δομής των ακεραίων (πχ ύπαρξη επόμενου) και των πράξεών τους (πχ η αφαίρεση ως πρόσθεση, οι ερμηνείες του "-" ως προσήμου και συμβόλου πράξης).  (ενδεικτικές δραστηριότητες ΑρΔ4, ΑρΔ5, ΑρΔ6, ΑρΔ7, ΑρΔ8)</p>	<p>Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) Α μέρος, κεφ. 7ο</p> <p>Ψηφιακό περιβάλλον:</p> <p><a href="http://www.eyliko.gr/resource/resource.aspx?id=665">http://www.eyliko.gr/resource/resource.aspx?id=665</a> (πολλαπλασιασμός ρητών με μοντέλο θερμοκρασίας)</p> <p><a href="http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_161_g_1_t_1.html?from=topic_t_1.html">http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_161_g_1_t_1.html?from=topic_t_1.html</a></p> <p>Οδηγίες: <a href="#">Α-ΑρΔ5-Πρόσθεση με θ-α κάρτες.doc</a></p> <p><a href="http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_162_g_2_t_1.html?from=topic_t">http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_162_g_2_t_1.html?from=topic_t</a></p>

<p>Αναγνωρίζουν τους αντίθετους αριθμούς ως ετερόσημους με ίσες αποστάσεις από το 0.</p> <p><i>Αρ12.</i> Προσθέτουν ακέραιους αριθμούς χρησιμοποιώντας στην αρχή μοντέλα-μεταφορές και καταλήγουν στον ορισμό της πρόσθεσης ακεραίων.</p> <p><i>Αρ13.</i> Κατανοούν την έννοια των αντίθετων ως τους αριθμούς με άθροισμα 0.</p> <p><i>Αρ14.</i> Αφαιρούν ακέραιους χρησιμοποιώντας μοντέλα-μεταφορές και αναγνωρίζουν την αφαίρεση ακεραίων ως πρόσθεση του αντίθετου. Αφαιρούν ακέραιους μετατρέποντας την αφαίρεση σε πρόσθεση του αντιθέτου.</p> <p><i>Αρ15.</i> Αναγνωρίζουν τις διαφορετικές ερμηνείες του συμβόλου « - » ως προσήμου και ως σύμβολου πράξης.</p> <p><i>Αρ16.</i> Συγκρίνουν το νόημα της πρόσθεσης ως αύξησης και της αφαίρεσης ως ελάττωσης στους φυσικούς με το νόημα των αντίστοιχων πράξεων στους ακεραίους.</p> <p><i>Αρ17.</i> Πολλαπλασιάζουν ακέραιους χρησιμοποιώντας στην αρχή μοντέλα-μεταφορές και καταλήγουν στον ορισμό του πολλαπλασιασμού ακεραίων.</p>			<p><a href="#">1.html</a></p> <p>Οδηγίες:<a href="#">A-ΑρΔ7-Αφαίρεση με θ-α κάρτες.doc</a></p>
--	--	--	--

<p>Αρ18. Διαιρούν ακέραιους χρησιμοποιώντας τη διαίρεση ως αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού.</p>			
<p>Αρ19. Αναγνωρίζουν το κλάσμα ως μια αναπαράσταση του αποτελέσματος της διαίρεσης δύο φυσικών και τα ισοδύναμα κλάσματα ως διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου αποτελέσματος.</p> <p>Αρ20. Αναγνωρίζουν ως θετικό ρητό αριθμό το αποτέλεσμα της διαίρεσης δύο φυσικών αριθμών, δηλαδή ένα κλάσμα.</p> <p>Αρ21. Αναπαριστούν στην αριθμογραμμή τους θετικούς ρητούς και αισθητοποιούν τους αρνητικούς. Αναγνωρίζουν το σύνολο των ρητών.</p> <p>Αρ22. Συγκρίνουν και διατάσσουν ρητούς αριθμούς, χρησιμοποιώντας την αριθμογραμμή και αναγνωρίζουν ότι ένας ρητός δεν έχει επόμενο.</p> <p>Αρ23. Αναγνωρίζουν την απόλυτη τιμή ρητών αριθμών ως την απόστασή τους από το 0.</p> <p>Αρ24. Επεκτείνουν τις πράξεις των ακεραίων στους ρητούς.</p> <p>Αρ25. Αναγνωρίζουν τους αντίστροφους ως τους αριθμούς με γινόμενο 1 και τη διαίρεση ως τον πολλαπλασιασμό με τον αντίστροφο του</p>	<p><b>Ρητοί αριθμοί</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• επέκταση των ακεραίων στους ρητούς, πυκνότητα ρητών</li> </ul> <p>(16 ώρες)</p>	<p>Οι μαθητές εξοικειώνονται με τους ρητούς μέσω αναπαραστάσεών τους (π.χ. κλάσματα πάνω στην αριθμογραμμή). Με δραστηριότητες αποκτούν ευχέρεια στους υπολογισμούς με χρήση ιδιοτήτων των πράξεων. Τα προβλήματα δίνουν νόημα στις υπολογιστικές τεχνικές, αποφεύγοντας τη μονοδιάστατη εξάσκηση με πολύπλοκες παραστάσεις.</p> <p>Οι μαθητές χρησιμοποιούν τη μεταβλητή ως γενικευμένο αριθμό, διατυπώνοντας συμβολικά τις ιδιότητες των πράξεων.</p> <p>(ενδεικτική δραστηριότητα ΑρΔ9)</p>	<p>Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κ.ά, ΟΕΔΒ, 2010) Α μέρος, παρ. 2.2 και 2.3 (ισοδύναμα κλάσματα, σύγκριση κλασμάτων), κεφ. 7ο (ρητοί αριθμοί).</p>

<p>διαιρέτη.</p> <p>Αρ26. Γενικεύουν και εκφράζουν συμβολικά τον αντίθετο ενός αριθμού (-α), τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού ρητών αριθμών καθώς και την αφαίρεση ως πρόσθεση του αντιθέτου (<math>\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)</math>) και τη διαίρεση ως πολλαπλασιασμό του αντιστρόφου (<math>\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}</math>).</p> <p>Αρ27. Διατυπώνουν και χρησιμοποιούν τον ορισμό των δυνάμεων με βάση ρητό και εκθέτη φυσικό.</p> <p>Αρ28. Προσδιορίζουν το πρόσημο της δύναμης ρητού αριθμού με βάση τον ορισμό.</p> <p>Αρ29. Υπολογίζουν την τιμή μιας αριθμητικής παράστασης με ρητούς (που μπορεί να περιέχει και δυνάμεις και παρενθέσεις) χρησιμοποιώντας την προτεραιότητα των πράξεων.</p> <p>Αρ30. Μοντελοποιούν προβλήματα χρησιμοποιώντας τις πράξεις και τις ιδιότητες των ρητών.</p>			
<p>A1. Διερευνούν αριθμητικές και γεωμετρικές κανονικότητες και διατυπώνουν το γενικό τους όρο λεκτικά και συμβολικά με μια αλγεβρική παράσταση.</p> <p>A2. Προσδιορίζουν ένα</p>	<p><b>Κανονικότητες–Συναρτήσεις</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• αλγεβρική και γραφική αναπαράσταση κανονικοτήτων</li> </ul> <p>(4 ώρες)</p>	<p>Η ανάγκη συμβολικής διατύπωσης του γενικού όρου μιας κανονικότητας οδηγεί στη χρήση της μεταβλητής. Η αναπαράσταση μιας κανονικότητας σε σύστημα</p>	<p>Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) σελ. 74 (ασκ 15), παρ. 6.1 (παράσταση σημείων στο επίπεδο)</p> <p>Ψηφιακό περιβάλλον:</p>

<p>σημείο (ως διατεταγμένο ζεύγος) σε σύστημα αξόνων.</p> <p>A3. Αναπαριστούν κανονικότητες με εικόνες, με πίνακες και με σημεία σε σύστημα ημιαξόνων ή αξόνων και μεταβαίνουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη.</p>		<p>συντεταγμένων είναι ένα σημαντικό εργαλείο που θα αξιοποιηθεί αργότερα στις συναρτήσεις.</p> <p><i>(ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ1)</i></p>	<p><a href="http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_328_g_3_t_2.html?open=activities&amp;from=category_g_3_t_2.html">http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_328_g_3_t_2.html?open=activities&amp;from=category_g_3_t_2.html</a></p>
<p>A4. Χρησιμοποιούν γράμματα για να εκφράσουν μεγέθη σε τύπους (σε καταστάσεις καθημερινής ζωής, φυσικής, κλπ)</p> <p>A5. Μοντελοποιούν προβλήματα με χρήση αριθμητικών και αλγεβρικών παραστάσεων.</p> <p>A6. Μεταφράζουν από λεκτικές εκφράσεις σε απλές αλγεβρικές παραστάσεις και αντίστροφα (π.χ. το διπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 3, <math>2\alpha+3</math>).</p> <p>A7. Υπολογίζουν την αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης και κατασκευάζουν πίνακες τιμών.</p> <p>A8. Χρησιμοποιούν την επιμεριστική ιδιότητα για να απλοποιήσουν γραμμικές αλγεβρικές παραστάσεις (αναγωγή ομοίων όρων).</p> <p>A9. Αναγνωρίζουν στοιχεία της δομής μιας αλγεβρικής παράστασης (π.χ. η <math>2x+3</math> είναι άθροισμα, το <math>2x</math> είναι γινόμενο).</p>	<p><b>Αλγεβρική παράσταση</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• μεταβλητές και αλγεβρικές παραστάσεις</li> </ul> <p><i>(6 ώρες)</i></p>	<p>Με δραστηριότητες μοντελοποίησης καταστάσεων, μετάφρασης λεκτικών διατυπώσεων, και υπολογισμού αριθμητικών τιμών, αναδεικνύεται η ανάγκη χρήσης μεταβλητών και αλγεβρικών παραστάσεων. Επιπλέον, η αναγωγή όμοιων όρων υποστηρίζεται αρχικά με μοντέλα / μεταφορές και στη συνέχεια με την επιμεριστική ιδιότητα.</p> <p><i>(ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ2)</i></p>	<p>Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) σελ 16, 72, 74</p> <p>Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 1.1.</p> <p><a href="http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/gymnasio/1_1_03_2011_ekpaideftiko_yliko_enotita_4.pdf">http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/gymnasio/1_1_03_2011_ekpaideftiko_yliko_enotita_4.pdf</a> σελ 1–11.</p>

<p>A10. Αναγνωρίζουν πότε ένας αριθμός είναι λύση εξίσωσης σε διαφορετικές μορφές εξισώσεων.</p> <p>A11. Αναγνωρίζουν ποσά ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα και επιλύουν προβλήματα με πίνακες και με εξισώσεις της μορφής <math>αβ=γχ</math> και <math>α/β=γ/χ</math>.</p> <p>A12. Διερευνούν και διατυπώνουν τις ιδιότητες της ισότητας με βάση μοντέλα – μεταφορές.</p> <p>A13. Μοντελοποιούν προβλήματα με γραμμικές εξισώσεις της μορφής <math>αχ+β=γ</math> και τις επιλύουν αριθμητικά, με μοντέλα–μεταφορές και αλγεβρικά με τις ιδιότητες της ισότητας.</p>	<p><b>Ισότητα – Ανισότητα</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• η εξίσωση (<math>αχ+β=γ</math>) ως εργαλείο επίλυσης προβλημάτων.</li> <li>• μετασχηματισμοί εξίσωσης.</li> </ul> <p>(7 ώρες)</p>	<p>Οι διαδικασίες δοκιμής και ελέγχου και των αντίστροφων πράξεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν παράλληλα με την μέθοδο των ισοδύναμων ισοτήτων. Η χρήση μοντέλων / μεταφορών (ζυγαριά, πλακίδια) οδηγεί τόσο στη διατύπωση των ιδιοτήτων της ισότητας, όσο και στη διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης. Η επίλυση των εξισώσεων πρέπει να γίνεται με ιδιότητες της ισότητας και όχι με μνημονικούς κανόνες (πχ όταν αλλάζει μέλος, αλλάζει πρόσημο), οι οποίοι αποκρύπτουν το νόημα της διαδικασίας.</p> <p>(ενδεικτικές δραστηριότητες ΑΔ3, ΑΔ4)</p>	<p>Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 1.2 (μόνο για εξισώσεις με άγνωστο στο ένα μέλος)</p> <p><a href="http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/gymnasio/1_1_03_2011_ekpaideftiko_yliko_enotita_4.pdf">http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/gymnasio/1_1_03_2011_ekpaideftiko_yliko_enotita_4.pdf</a> σελ. 12-19 (μόνο για εξισώσεις με άγνωστο στο ένα μέλος).</p>
---	--	---	--

## Θεματική ενότητα: Γεωμετρία – Μέτρηση

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 32

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	Βασικά θέματα	Δραστηριότητες	Εκπαιδευτικό υλικό
<p>Γ1. Διερευνούν τα γεωμετρικά σχήματα και διαμορφώνουν ορισμούς.</p> <p>Γ2. Αναγνωρίζουν σχέσεις μεταξύ των βασικών σχημάτων και τις εφαρμόζουν σε απλές καταστάσεις.</p> <p>Γ3. Χρησιμοποιούν κανόνα, διαβήτη ή άλλα εργαλεία για να διατυπώσουν και να</p>	<p><b>Γεωμετρικά σχήματα</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• αναγνώριση, ονομασία και ταξινόμηση των γεωμετρικών σχημάτων</li> <li>• ανάλυση των βασικών γεωμετρικών σχημάτων σε στοιχεία και ιδιότητες</li> <li>• κατασκευές και</li> </ul>	<p>Η αναφορά στα βασικά γεωμετρικά σχήματα γίνεται μέσα από την παρατήρηση/διερεύνηση οικείων στους μαθητές σχημάτων του χώρου.</p> <p>Ο εκπαιδευτικός με κατάλληλα ερωτήματα εντοπίζει και ανατρέπει διάφορες</p>	<p>Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κ.ά., Γεωμετρία, Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup> &amp; 3<sup>ο</sup></p> <p><a href="#">A- ΓΔ3-Κατασκευάζοντας παραλληλόγραμμα</a> Φύλλο εργασίας: <a href="#">Φύλλο εργασίας-A- ΓΔ3-Κατασκευάζοντας</a></p>

<p>ελέγχουν εικασίες σχετικά με τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων (είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες και ως προς τις πλευρές, είδη τετραπλεύρων, γωνίες που σχηματίζονται από δύο παράλληλες και μία τέμνουσα).</p> <p>Γ4. Διερευνούν και αιτιολογούν τις ιδιότητες των σχημάτων με επαγωγικούς, συλλογισμούς και (μη τυπικές) αποδείξεις (άθροισμα των γωνιών του τριγώνου, ιδιότητες των τετραπλεύρων, ταξινόμηση των τετραπλεύρων).</p> <p>Γ5. Εφαρμόζουν τις γνώσεις των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων στην επίλυση προβλημάτων.</p> <p>Γ6. Χρησιμοποιούν κανόνα, διαβήτη ή άλλα εργαλεία για να σχεδιάσουν γεωμετρικά σχήματα. Διαχωρίζουν την κατασκευή με βαθμολογημένα όργανα από τη γεωμετρική κατασκευή με κανόνα και διαβήτη.</p> <p>Γ7. Επιλύουν προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών.</p>	<p>σχεδιασμός γεωμετρικών σχημάτων. (26 ώρες)</p>	<p>παρανοήσεις με χρήση αντιπαραδειγμάτων αναδεικνύοντας την ανάγκη ύπαρξης καθολικά αποδεκτών ορισμών.</p> <p>Παρουσιάζει σύνθετα γεωμετρικά σχήματα και ζητά από τους μαθητές να προσδιορίσουν τα βήματα της κατασκευής τους και στη συνέχεια να τα κατασκευάσουν με χρήση γεωμετρικών οργάνων ή λογισμικού.</p> <p>Ενδεικτικές δραστηριότητες ΓΔ1, ΓΔ2, ΓΔ3, ΓΔ4, ΓΔ5, ΓΔ6, ΓΔ7.</p>	<p><a href="#">παραλληλόγραμμα</a></p> <p><a href="#">Α- ΓΔ4-Κατασκευάζοντας είδη τετραπλεύρων.</a> Φύλλο εργασίας:<a href="#">Φύλλο εργασίας-Α-ΓΔ4-Κατασκευάζοντας είδη τετραπλεύρων</a></p> <p><a href="#">Α-ΓΔ5-εξωτερική τριγώνου</a></p>
<p>Μ1. Συνδέουν τη σύγκριση των ευθυγράμμων τμημάτων, των τόξων του ίδιου ή ίσων κύκλων και των γωνιών με τις διαδικασίες και τα όργανα μέτρησης.</p> <p>Μ2. Υπολογίζουν μήκη χρησιμοποιώντας ιδιότητες ή σχέσεις (π.χ. την περίμετρο “μη</p>	<p><b>Μέτρηση μήκους, μέτρηση γωνίας</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις μήκους / γωνίας</li> <li>• μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες μέτρησης μήκους /γωνίας</li> </ul> <p>(6 ώρες)</p>	<p>Οι μαθητές, είναι σημαντικό να κατανοήσουν ότι η μέτρηση μιας γωνίας με μοιρογνωμόνιο αποτελεί εφαρμογή της μεθόδου σύγκρισης γωνιών μέσω της μετατροπής τους σε επίκεντρες (το μοιρογνωμόνιο είναι ένα</p>	<p>Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κ.ά., Γεωμετρία, Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup>.</p>

<p>συμβατικών” ευθύγραμμων σχημάτων).</p> <p>M3. Υπολογίζουν γωνίες χρησιμοποιώντας ιδιότητες ή σχέσεις.</p> <p>M4. Επιλύουν προβλήματα υπολογισμού μηκών και γωνιών με τη χρήση κατάλληλων μονάδων μέτρησης (με βάση την ακρίβεια που απαιτείται).</p>		<p>βαθμονομημένο ημικύκλιο, στο οποίο η γωνία γίνεται επίκεντρη έτσι ώστε η διάμετρός του να συμπίπτει με μια πλευρά της γωνίας).</p> <p>(ενδεικτική δραστηριότητα MΔ1)</p>	
---	--	---	--

### Θεματική ενότητα: Στοχαστικά Μαθηματικά

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 14

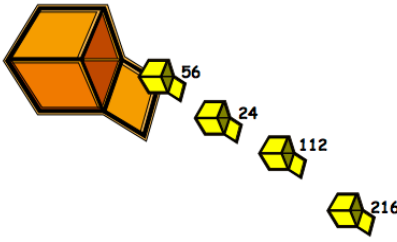
Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	Βασικά θέματα	Δραστηριότητες	Εκπαιδευτικό υλικό
<p>Σ1. Διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα και αφορούν διαφορετικά χαρακτηριστικά της περίπτωσης που εξετάζεται.</p> <p>Σ2. Συλλέγουν δεδομένα καθορίζοντας κριτήρια επιλογής και αιτιολογούν τις επιλογές τους.</p> <p>Σ3. Κατασκευάζουν απλά κυκλικά διαγράμματα και χρονοδιαγράμματα.</p> <p>Σ4. Επιλέγουν κατάλληλες μορφές αναπαράστασης και επιχειρηματολογούν για τις επιλογές τους.</p> <p>Σ5. Ερμηνεύουν πίνακες και στατιστικά διαγράμματα, καταλήγουν σε συμπεράσματα και κάνουν προβλέψεις.</p>	<p><b>Δεδομένα</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• συλλογή, αναπαράσταση, και ερμηνεία δεδομένων (5 ώρες)</li> </ul>	<p>Οι μαθητές είναι σημαντικό να χρησιμοποιούν πραγματικά δεδομένα που συλλέγουν οι ίδιοι ως πλαίσιο αναφοράς για τις έννοιες της Στατιστικής. Επίσης είναι σημαντικό να αναπτύξουν κριτική στάση απέναντι σε τρόπους παρουσίασης των δεδομένων που ίσως είναι παραπλανητικοί.</p> <p>Για την κατασκευή απλών κυκλικών διαγραμμάτων δίνονται έτοιμοι κύκλοι χωρισμένοι σε ίσα τόξα (π.χ. 4 ή 6 ή 12) και δεδομένα που μπορούν να παρασταθούν σε αυτούς.</p> <p>Ενδεικτική δραστηριότητα ΣΔ1</p>	<p>Μέρος του 4<sup>ου</sup> κεφαλαίου του βιβλίου: Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος, Δρούτσας, κ.ά.) με κατάλληλες τροποποιήσεις</p>

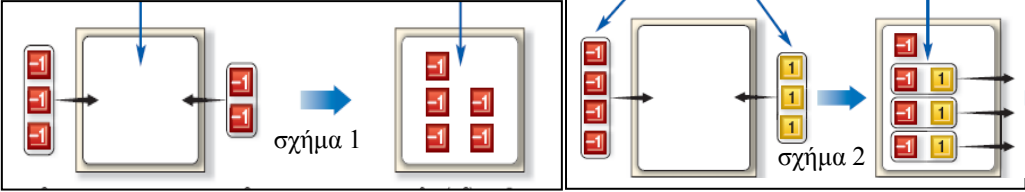
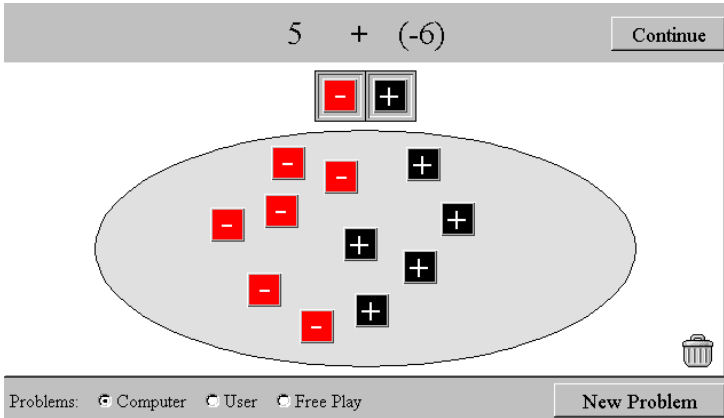


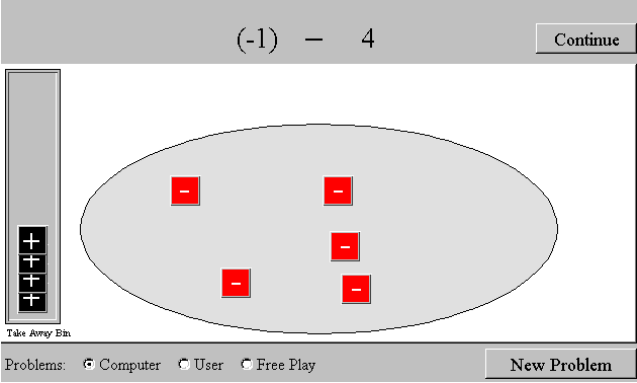
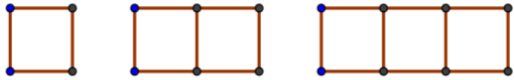
<p>Σ6. Εικάζουν ή/και προσδιορίζουν την διάμεσο τιμή, την επικρατούσα τιμή και την μέση τιμή με βάση την αναπαράσταση των δεδομένων.</p> <p>Σ7. Χρησιμοποιούν τα μέτρα θέσης για να περιγράψουν δεδομένα, να κάνουν συγκρίσεις και να εξάγουν συμπεράσματα.</p>	<p><b>Μέτρα θέσης</b> (3 ώρες)</p>	<p>Οι μαθητές είναι σημαντικό να αναπτύξουν μεθόδους προσδιορισμού των μέτρων θέσης, πέρα από τις καθαρά υπολογιστικές. Ενδεικτική δραστηριότητα ΣΔ2.</p>	<p>Μέρος του 4<sup>ου</sup> κεφαλαίου του βιβλίου: Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος, Δρούτσας, κ.ά.) με κατάλληλες τροποποιήσεις</p> <p><a href="http://illuminations.nctm.org/activitydetail.aspx?ID=160">http://illuminations.nctm.org/activitydetail.aspx?ID=160</a> Οδηγίες: <a href="#">Οδηγίες-Α-ΣΔ2-Διάμεσος Μέση τιμή</a></p>
<p>Σ8. Περιγράφουν χαρακτηριστικά των δεδομένων που προκύπτουν από τις αναπαραστάσεις τους χρησιμοποιώντας ενδεχομένως και εκφράσεις όπως: εύρος, συστάδες δεδομένων, κενά, απόμακρη τιμή.</p> <p>Σ9. Εξηγούν χαρακτηριστικά των δεδομένων (όπως λόγοι ύπαρξης απόμακρων τιμών) ή πιθανούς λόγους για την μεταβλητότητα των δεδομένων.</p>	<p><b>Μεταβλητότητα</b> (1 ώρα)</p>	<p>Η ηλικιακή περίοδος, για παράδειγμα, είναι ένας από τους πιθανούς λόγους της μεταβλητότητας του ύψους των μαθητών (οι έφηβοι έχουν διαφορετικό ύψος από τα παιδιά των μικρών τάξεων του Δημοτικού). Ωστόσο υπάρχουν και άλλοι λόγοι, επειδή έφηβοι της ίδιας ηλικίας δεν έχουν το ίδιο ύψος.</p>	
<p>Π1. Προσδιορίζουν και περιγράφουν το δειγματικό χώρο (δ.χ.) ενός πειράματος τύχης που πραγματοποιείται σε δυο ή περισσότερα στάδια χρησιμοποιώντας κατάλληλες αναπαραστάσεις.</p> <p>Π2. Μεταφράζουν τα ενδεχόμενα από τη φυσική γλώσσα σε στοιχεία του δειγματικού χώρου.</p>	<p><b>Πειράματα τύχης - Δειγματικοί χώροι</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• περιγραφή σύνθετων δειγματικών χώρων και ενδεχομένων</li> </ul> <p>(2 ώρες)</p>	<p>Οι μαθητές περιγράφουν το δειγματικό χώρο που προκύπτει από παιχνίδια χρησιμοποιώντας λίστα ή δεντροδιάγραμμα ή πίνακα διπλής εισόδου και κατόπιν εκφράζουν με στοιχεία του δειγματικού χώρου κάποια ενδεχόμενα.</p>	<p>Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου (Αργυράκης, Βουργανός, κ.ά.) σελ 167-172</p> <p><a href="http://www.math.uah.edu/stat/applets/DiceSampleExperiment.shtml">www.math.uah.edu/stat/applets/DiceSampleExperiment.shtml</a></p>
<p>Π3. Υπολογίζουν την πιθανότητα ενός</p>	<p><b>Πιθανότητα ενδεχομένου</b></p>	<p>Οι μαθητές είναι σημαντικό να</p>	<p><a href="http://www.shodor.org/interactivate/activities/Adjusta">www.shodor.org/interactivate/activities/Adjusta</a></p>

<p>σύνθετου ενδεχομένου χρησιμοποιώντας τον κλασσικό ορισμό των Πιθανοτήτων.</p> <p><b>Π4.</b> Παρατηρούν ότι η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου πλησιάζει την τιμή της πιθανότητας, όταν έχουμε μεγάλο αριθμό εκτελέσεων του ίδιου πειράματος (Νόμος των Μεγάλων Αριθμών).</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• σχετική συχνότητα και πιθανότητα σε σύνθετα πειράματα τύχης (3 ώρες)</li> </ul>	<p>κατανοήσουν ότι, όσο αυξάνει ο αριθμός των εκτελέσεων ενός πειράματος τύχης, τότε η σχετική συχνότητα του ενδεχομένου τείνει να σταθεροποιηθεί «γύρω» από την πιθανότητα.</p> <p>Προτείνεται να παρουσιαστούν και παραδείγματα όπου τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα.</p> <p>Ενδεικτικές δραστηριότητες ΠΔ1, ΠΔ2.</p>	<p><a href="#">bleSpinner</a></p>
---	--	--	-----------------------------------

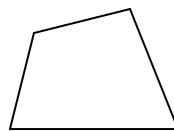
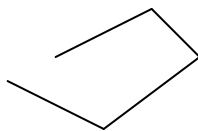
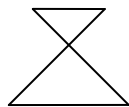
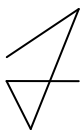
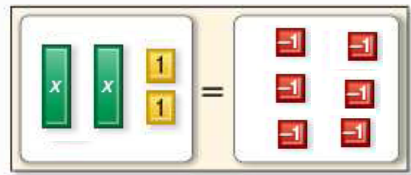
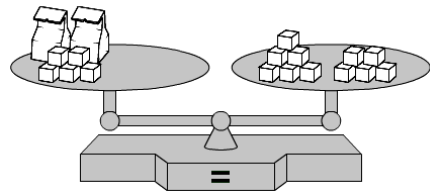
### Ενδεικτικές Δραστηριότητες

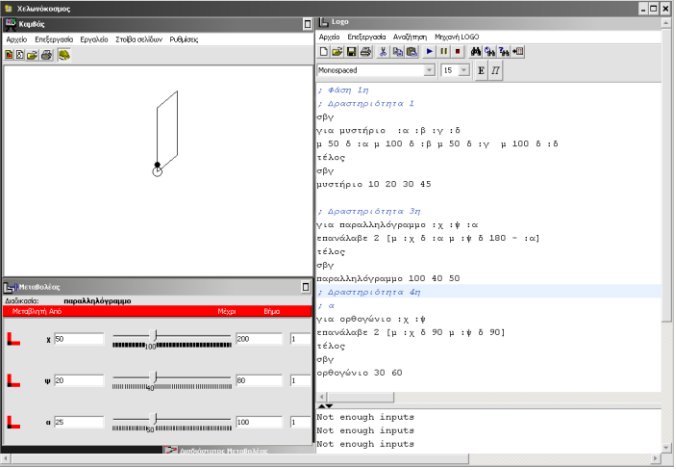
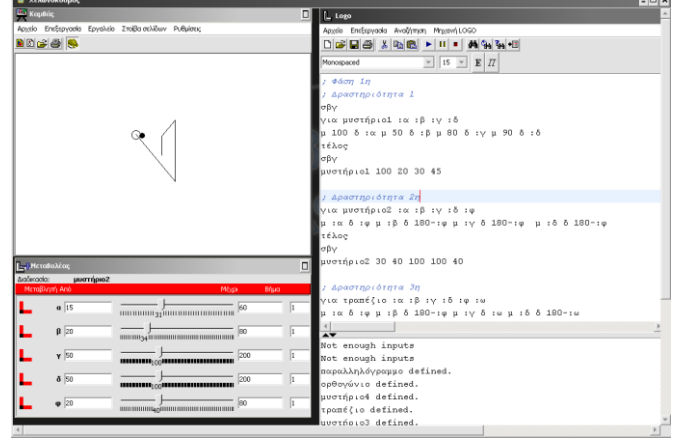
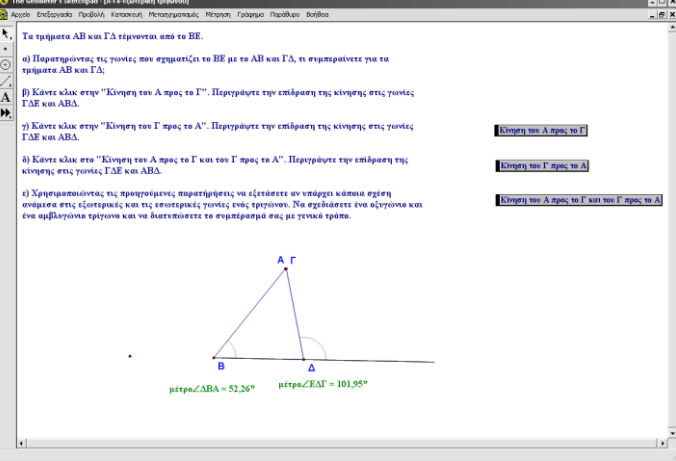
Α/Α	Περιγραφή δραστηριότητας	ΠΜΑ
<p><b>ΑρΔ1</b></p>	<p>Μία μαγική μηχανή πολλαπλασιάζει τους αριθμούς που εισέρχονται σε αυτή με έναν αριθμό. Η εικόνα δείχνει τους αριθμούς που βγήκαν από τη μηχανή. Να βρείτε με ποιον αριθμό μπορεί να πολλαπλασιάζει η μηχανή τους αριθμούς που της βάζουμε.</p> 	<p><b>Αρ5</b></p>
<p><b>ΑρΔ2</b></p>	<p>Ο Αντρέας παίζει ποδόσφαιρο κάθε 4 ημέρες, ο Μιχάλης κάθε 5 ημέρες και ο Μαρίνος κάθε 8 ημέρες. Αν σήμερα παίζουν ποδόσφαιρο και οι τρεις μαζί, τότε να υπολογίσετε μετά από πόσες ημέρες θα συμβεί το ίδιο για δεύτερη φορά.</p>	<p><b>Αρ6</b></p>
<p><b>ΑρΔ3</b></p>	<p>Ένας αριθμός μετατρέπεται από το δεκαδικό στο δυαδικό σύστημα και δίνει τετραψήφιο αριθμό. Ποιος θα μπορούσε να είναι ο αρχικός αριθμός;</p>	<p><b>Αρ7</b></p>
<p><b>ΑρΔ4</b></p>	<p>Σε ένα παιχνίδι, δύο ομάδες παιδιών απαντούν σε ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση η ομάδα παίρνει μια θετική κάρτα και για κάθε λάθος παίρνει μια αρνητική. Για παράδειγμα, αν η ομάδα Α έχει 5 θετικές κάρτες (+5) και πάρει άλλες δύο θετικές (+2), θα έχει 7 θετικές, δηλαδή σύνολο +7 πόντους. Αυτό μπορούμε να το εκφράσουμε με την πρόσθεση: <math>(+5)+(+2)=+7</math>.</p> <p>α) Το σχήμα 1 περιγράφει την κατάσταση μιας ομάδας που είχε 3 αρνητικές και πήρε δύο ακόμη αρνητικές. Μπορείτε να εκφράσετε αυτή την κατάσταση με μια πράξη;</p>	<p><b>Αρ12, Αρ13</b></p>

	 <p>β) Περιγράψτε με λόγια και με μια πράξη την κατάσταση που περιγράφει το σχήμα 2. Ποιο είναι το σύνολο πόντων της ομάδας;</p> <p>γ) Χρησιμοποιήστε αυτό το παιχνίδι για να πείτε τι μπορεί να σημαίνουν οι επόμενες πράξεις και υπολογίστε τα αποτελέσματά τους: <math>(+3)+(+4)</math> <math>(-2)+(-5)</math> <math>(-8)+(-3)</math> <math>(-7)+(-5)</math> Μπορείτε να σκεφτείτε έναν κανόνα για να κάνετε αυτές τις προσθέσεις, χωρίς κάθε φορά να σκέφτεστε τις κάρτες;</p> <p>δ) Χρησιμοποιήστε αυτό το παιχνίδι για να πείτε τι μπορεί να σημαίνουν οι επόμενες πράξεις και υπολογίστε τα αποτελέσματά τους: <math>(+3)+(-5)</math> <math>(-2)+(+3)</math> <math>(-5)+(+3)</math> <math>(+7)+(-4)</math> Μπορείτε να σκεφτείτε έναν κανόνα για να κάνετε αυτές τις προσθέσεις, χωρίς κάθε φορά να σκέφτεστε τις κάρτες;</p>	
<p><b>ΑρΔ5</b></p>	<p>Στην εφαρμογή χρησιμοποιείται το διακριτό μοντέλο των θετικών και αρνητικών καρτών όπου με την αλληλοαναίρεση ίδιου αριθμού θετικών και αρνητικών καρτών, αισθητοποιούν και κατανοούν την πράξη της πρόσθεσης ακεραίων αριθμών</p>  <p>διεύθυνση ιστοσελίδας: <a href="http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_161_g_1_t_1.html?from=topic_t_1.html">http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_161_g_1_t_1.html?from=topic_t_1.html</a> Οδηγίες:<a href="#">A-ΑρΔ5-Πρόσθεση με θ-α κάρτες.doc</a></p>	<p><b>Αρ12, Αρ13</b></p>
<p><b>ΑρΔ6</b></p>	<p>Σε μια παραλλαγή του παιχνιδιού με τις κάρτες, μπορούν από μια ομάδα να αφαιρούνται κάρτες, θετικές ή αρνητικές. Έτσι, για παράδειγμα, όταν αφαιρούνται 5 θετικές κάρτες από 10, μένουν 5, δηλαδή <math>(+10)-(+5)=+5</math>.</p> <p>α) Πως μπορούμε να εκφράσουμε (με πράξη) την κατάσταση μιας ομάδας που είχε 5 αρνητικές κάρτες και της αφαιρέθηκαν 3 αρνητικές; Ποιο είναι τώρα το σκορ της ομάδας;</p> <p>β) Μια ομάδα έχει σκορ +25. Με ποιους τρόπους μπορεί να αυξήσει το σκορ της σε +28; Με ποιους τρόπους μπορεί να μειωθεί το σκορ της σε +20;</p> <p>γ) Πώς θα μπορούσαν από μια ομάδα που δεν έχει ούτε θετικές ούτε αρνητικές κάρτες να αφαιρεθούν 5 θετικές κάρτες; 3 αρνητικές;</p> <p>γ) Χρησιμοποιήστε το παιχνίδι με τις κάρτες για να πείτε τι μπορεί να σημαίνουν οι</p>	<p><b>Αρ14, Αρ15</b></p>

	<p>παρακάτω πράξεις και υπολογίστε τα αποτελέσματά τους:  <math>(+3)-(-5)</math> <math>(-2)-(+3)</math> <math>(-5)-(+3)</math> <math>(+7)-(-4)</math> <math>(-7)-(-5)</math></p> <p>δ) Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την πρόσθεση για να κάνετε τις αφαιρέσεις, χωρίς κάθε φορά να σκέφτεστε τις κάρτες;</p>	
<p><b>ΑρΔ7</b></p>	<p>Στην εφαρμογή χρησιμοποιείται το διακριτό μοντέλο των θετικών και αρνητικών καρτών όπου με το τέχνασμα πρόσθεσης ίδιου αριθμού θετικών και αρνητικών καρτών, αισθητοποιούν και κατανοούν την αφαίρεση ακέραιων αριθμών. Με κατάλληλη χρήση της εφαρμογής κατανοούν σε ένα πραγματικό πλαίσιο ότι η αφαίρεση με έναν ακέραιο αριθμό ισοδυναμεί με την πρόσθεση του αντίθετου αριθμού (διεύθυνση ιστοσελίδας: <a href="http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_162_g_2_t_1.html?from=topic_t_1.html">http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_162_g_2_t_1.html</a>   Οδηγίες: <a href="#">A-ΑρΔ7-Αφαίρεση με θ-α κάρτες.doc</a>)</p>  <p>The screenshot shows a digital interface for a math application. At the top, there is a display showing the expression <math>(-1) - 4</math> and a 'Continue' button. Below this is a large oval area containing several red cards with minus signs (-). To the left of the oval is a vertical stack of four white cards with plus signs (+). Below the oval, there are radio buttons for 'Computer', 'User', and 'Free Play', and a 'New Problem' button.</p>	<p><b>Αρ13, Αρ14</b></p>
<p><b>ΑρΔ8</b></p>	<p>Ένα ρομποτάκι κινείται πάνω στην αριθμογραμμή μέσω ενός τηλεχειριστηρίου–αριθμομηχανής. Το +5 ερμηνεύεται ως "5 βήματα δεξιά", ενώ το -5 ερμηνεύεται ως "5 βήματα αριστερά".</p> <p>Αν υποθέσουμε ότι το ρομποτάκι ξεκινάει από τη θέση 0, ποια θα είναι η καινούρια του θέση, όταν πληκτρολογήσουμε:</p> <p>α) +3 β) -5 γ) +3+5 ε) +5-3 η) -4-7 θ) -5+8 ι) +3+5-4 ια) -2+3-5 ιβ) -4-2+6-1</p> <p>Πώς μπορούμε να οδηγήσουμε το ρομποτάκι από τη θέση 5 στη θέση -2 με δύο κινήσεις; Μπορείτε να διατυπώσετε έναν κανόνα, για να βρίσκουμε εκ των προτέρων τη θέση του;</p>	<p><b>Αρ12, Αρ13, Αρ15</b></p>
<p><b>ΑρΔ9</b></p>	<p>Υπολογίστε την τιμή της αριθμητικής παράστασης <math>\frac{2}{5} \cdot 10 - 3 \cdot (-2) - \frac{1}{2}(-3 + 7 - 2)</math> καταγράφοντας σε κάθε κίνηση που κάνετε τον ορισμό ή την ιδιότητα που χρησιμοποιείτε.</p>	<p><b>Αρ27, Αρ30</b></p>
<p><b>ΑΔ1</b></p>	<p>Χρησιμοποιώντας σπέρτα κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο (1ο σχήμα) και κατόπιν προσθέτουμε δίπλα του άλλο ένα τετράγωνο (2ο σχήμα), κι άλλο ένα τετράγωνο (3ο σχήμα), κοκ</p>  <p>The diagrams show three stages of square construction. The first is a single square with 4 sticks. The second is two squares sharing a side, with 7 sticks. The third is three squares in a row sharing sides, with 10 sticks.</p> <p>α) Να βρείτε πόσα σπέρτα χρειάζονται για 4 τετράγωνα, για 10 τετράγωνα, για 57 τετράγωνα</p> <p>β) Να παραστήσετε τα ζεύγη (αριθμός τετραγώνων, αριθμός σπέρτων) σε ένα σύστημα αξόνων.</p>	<p><b>Α1, Α2, Α3</b></p>

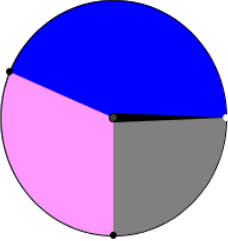
<p><b>ΑΔ2</b></p>	<p>Στο ταξί πληρώνουμε 1,19€ για «σημαία» και 0,68€ για κάθε χιλιόμετρο. Πόσα χρήματα θα πληρώσουμε (α) για μια διαδρομή 7 χιλιομέτρων, (β) για μια διαδρομή x χιλιομέτρων.</p>	<p><b>A5</b></p>
<p><b>ΑΔ3</b></p>	<p>Στο διπλανό σχήμα οι τσάντες έχουν το ίδιο βάρος και κάθε κυβάκι ζυγίζει 50 g. Η ζυγαριά ισορροπεί. Υπολογίστε πόσο ζυγίζει κάθε τσάντα. Περιγράψτε τον τρόπο που θα το υπολογίζατε, αν είχατε μπροστά σας τη ζυγαριά και δεν είχατε χαρτί και μολύβι. Πώς θα περιγράφατε τον παραπάνω τρόπο με τη διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης;</p>	<p><b>A12, A13</b></p>
<p><b>ΑΔ4</b></p>	<p>Στο διπλανό σχήμα περιγράφεται μια ισότητα (τα δύο x εκφράζουν τον ίδιο αριθμό). Μπορείτε να βρείτε το x χωρίς χαρτί και μολύβι; Περιγράψτε τον τρόπο που λύσατε το πρόβλημα, πρώτα με λόγια και μετά με τη διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης.</p>	<p><b>A12, A13</b></p>
<p><b>ΓΔ1</b></p>	<p>Δίνονται στους μαθητές μοντέλα ή εικόνες διάφορων στερεών σχημάτων (φυσικών ή γεωμετρικών) και ζητείται να εντοπίσουν βασικά γεωμετρικά σχήματα που γνωρίζουν από το Δημοτικό. Οι μαθητές διερευνούν τα στερεά, καταγράφουν τα ονόματα των σχημάτων που αναγνωρίζουν, παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της εργασίας τους και τα συγκρίνουν με εκείνα των συμμαθητών τους. (Το είδος και το πλήθος των βασικών σχημάτων που θα εντοπίσουν οι μαθητές εξαρτάται από το είδος των στερεών που θα δοθούν προς διερεύνηση). Αξιοποιώντας τα αποτελέσματα την δραστηριότητας και με κατάλληλα ερωτήματα, ο διδάσκων προκαλεί μια συζήτηση στην τάξη για την ανάγκη συστηματικής καταγραφής των βασικών γεωμετρικών σχημάτων και σαφήνειας στην απόδοση των ονομάτων, στην περιγραφή των σχέσεων και των ιδιοτήτων. Στο πλαίσιο αυτό γίνεται μια ενημέρωση των μαθητών για το νόημα και την οργάνωση της θεωρίας στη Γεωμετρία και τα Μαθηματικά γενικότερα.</p>	<p><b>Γ1</b></p>
<p><b>ΓΔ2</b></p>	<p>Ο διδάσκων απευθύνει το ερώτημα “τι είναι τετράπλευρο” και χρησιμοποιεί τις απαντήσεις των μαθητών για να τους καθοδηγήσει στη διατύπωση του ορισμού. Στην πολύ πιθανή απάντηση “ένα σχήμα με τέσσερις πλευρές”, παρουσιάζει διαδοχικά τα παρακάτω σχήματα και ζητά κάθε φορά από τους μαθητές να εντοπίσουν εκείνο το χαρακτηριστικό που δε συνδέεται με την εικόνα που έχουν για την έννοια “τετράπλευρο”.</p>	<p><b>Γ1</b></p>



<p><b>ΓΔ3</b></p>	<p>Με το Χελωνόκοσμο διερευνούν βασικές ιδιότητες των παραλληλογράμμων χρησιμοποιώντας εργαλεία συμβολικής έκφρασης και δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών αντικειμένων. Κατασκευάζουν παραλληλόγραμμα, ορθογώνια, ρόμβους και τετράγωνα. Εκτελούν τις διαδικασίες με διαφορετικές τιμές πλευρών ή γωνιών τις οποίες παράλληλα μπορούν να μεταβάλλουν δυναμικά χρησιμοποιώντας τα διαθέσιμα υπολογιστικά εργαλεία. Κατασκευάζουν παραλληλόγραμμα και τις διάφορες μορφές του, χρησιμοποιώντας τις λιγότερες δυνατές μεταβλητές. Διαπραγματεύονται τις σχέσεις εγκλεισμού των διάφορων μορφών παραλληλογράμμου (αρχείο: <a href="#">A-ΓΔ3-Κατασκευάζοντας παραλληλόγραμμα</a>)</p> <p>Φύλλο εργασίας: <a href="#">Φύλλο εργασίας-A-ΓΔ3- Κατασκευάζοντας παραλληλόγραμμα</a>).</p>		<p><b>Γ3, Γ4, Γ6, Α4, Α5</b></p>
<p><b>ΓΔ4</b></p>	<p>Με το Χελωνόκοσμο διερευνούν βασικές ιδιότητες των τετραπλεύρων χρησιμοποιώντας εργαλεία συμβολικής έκφρασης και δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών αντικειμένων. Διορθώνουν παραμετρικές διαδικασίες, ώστε να κατασκευάζουν τετράπλευρα, παραλληλόγραμμα και τραπέζια και κατανοούν βασικές ιδιότητές τους (αρχείο: <a href="#">A-ΓΔ4- Κατασκευάζοντας είδη τετραπλεύρων</a>. Φύλλο εργασίας: <a href="#">Φύλλο εργασίας-A-ΓΔ4- Κατασκευάζοντας είδη τετραπλεύρων</a>)</p>		<p><b>Γ3, Γ4, Γ6, Α4, Α5</b></p>
<p><b>ΓΔ5</b></p>	<p>Ζητείται από τους μαθητές να σχεδιάσουν ένα οξυγώνιο και ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο και να συγκρίνουν τις εξωτερικές με τις εσωτερικές γωνίες κάθε τριγώνου. Αναδεικνύεται η ανεπάρκεια των μετρήσεων για την αιτιολόγηση της σχετικής ιδιότητας (κάθε εξωτερική είναι μεγαλύτερη από κάθε απέναντι εσωτερική γωνία) και χρησιμοποιείται το αρχείο <a href="#">A-ΓΔ5-εξωτερική τριγώνου</a> για να αναδειχθεί η σημασία της αιτιολόγησης με ένα νοητικό πείραμα.</p>		<p><b>Γ4</b></p>

<p><b>ΓΔ6</b></p>	<p>Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου χρησιμοποιείται ως βασικό αποτέλεσμα για τον προσδιορισμό μιας σχέσης ανάμεσα στο άθροισμα των γωνιών και το πλήθος των πλευρών ενός τυχαίου πολυγώνου. Οι μαθητές κατασκευάζουν πολύγωνα με 4, 5, 6, 7 και 8 πλευρές, τα χωρίζουν σε τρίγωνα με διαγώνιες που άγονται από μία κορυφή και καταγράφουν σε πίνακα το είδος του πολυγώνου, το πλήθος των τριγώνων στα οποία χωρίζεται και το άθροισμα των γωνιών του. Από τα στοιχεία του πίνακα συνάγουν με επαγωγικό τρόπο τη ζητούμενη γενική σχέση.</p>	<p><b>Γ4, Γ5</b></p>
<p><b>ΓΔ7</b></p>	<p>Για εμβάθυνση στην έννοια της γεωμετρικής κατασκευής, αναπτύσσεται μια δραστηριότητα στην οποία οι μαθητές: α) δημιουργούν ένα γεωμετρικό σχήμα που έχει δεδομένες ιδιότητες και β) περιγράφουν τα βήματα της κατασκευής ενός δεδομένου γεωμετρικού σχήματος. Παράδειγμα:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Να κατασκευάσετε με χρήση του χάρακα, του μοιρογνωμονίου και του διαβήτη (ή με χρήση λογισμικού) ένα παραλληλόγραμμο του οποίου οι πλευρές έχουν μήκη 5,1cm και 3,2cm και σχηματίζουν γωνία 52°.</li> <li>• Να περιγράψετε τον τρόπο που κατασκευάστηκε με χρήση του χάρακα και του μοιρογνωμονίου (ή με χρήση λογισμικού) το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ στο οποίο οι διαγώνιες έχουν μήκη ΑΓ = 6cm, ΒΔ = 3,5cm και σχηματίζουν γωνία 66°.</li> </ul> <div data-bbox="416 904 991 1055" style="text-align: center;"> </div>	<p><b>Γ6, Γ7</b></p>
<p><b>ΜΔ1</b></p>	<p>Οι μαθητές καταγράφουν και σχεδιάζουν τα διάφορα είδη γωνιών (μηδενική, κυρτή, οξεία, ορθή, αμβλεία, ευθεία, μη κυρτή, πλήρης) και τις ταξινομούν ως προς το μέτρο με διάφορους τρόπους (γραμμική διάταξη, διάγραμμα ροής κλπ)</p>	<p><b>Μ1</b></p>
<p><b>ΣΔ1</b></p>	<p>Με αφορμή ένα διάγραμμα, όπως το διπλανό, που παρουσιάζει τα ποσοστά τηλεθέασης ανάμεσα σε δύο τηλεοπτικές εκπομπές, οι μαθητές κρίνουν και αξιολογούν τη δήλωση που έκαναν οι συντελεστές της εκπομπής Α, όταν παρουσίαζαν και συνέκριναν τα ποσοστά τηλεθέασης και η οποία ήταν ότι: «Το γράφημα δείχνει ξεκάθαρα ότι η εκπομπή Α είναι πιο δημοφιλής από την εκπομπή Β και στην πραγματικότητα είναι σχεδόν τρεις φορές πιο δημοφιλής».</p>	<p><b>Σ5</b></p>
<p><b>ΣΔ2</b></p>	<p>Μέσα από το δυναμικό χειρισμό δεδομένων οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν και να κατασκευάσουν καταστάσεις με μικρά σύνολα δεδομένων τα οποία θα ικανοποιούν κάποια κριτήρια ως προς το πλήθος, το εύρος ή τα μέτρα θέσης, με σκοπό να κατανοήσουν βαθύτερα και πιο διαισθητικά διάφορες πτυχές ή/και ιδιότητες εννοιών της στατιστικής, να αναπτύξουν στρατηγικές ελέγχου κάποιων παραμέτρων ανοικτών</p> <div data-bbox="651 1704 1310 1912" style="text-align: center;"> </div>	<p><b>Σ6, Σ7</b></p>



	<p>προβλημάτων καθώς και στρατηγικές για τη διερεύνηση τέτοιων προβλημάτων.                  Διεύθυνση ιστοσελίδας <a href="http://illuminations.nctm.org/activitydetail.aspx?ID=160">http://illuminations.nctm.org/activitydetail.aspx?ID=160</a>                  Οδηγίες: <a href="#">Οδηγίες-A&amp;B-Σ Διάμεσος Μέση τιμή</a></p>																	
<b>ΠΔ1</b>	<p>Ρίχνοντας δυο ζάρια τι πιθανότητα έχουμε να φέρουμε δυο βάρια και τι πιθανότητα να φέρουμε ένα 6 κι ένα 5; Τι είναι πιο εύκολο να φέρουμε: ζαριά με άθροισμα μεγαλύτερο από 7 ή ζαριά με γινόμενο μικρότερο από 7;</p>	<b>Π3</b>																
<b>ΠΔ2</b>	<p>Σε ένα τροχό τύχης <a href="http://www.shodor.org/interactivate/activities/AdjustableSpinner">www.shodor.org/interactivate/activities/AdjustableSpinner</a> που είναι χωρισμένος σε 2 ή περισσότερους άνισους κυκλικούς τομείς με διαφορετικά χρώματα θέλουμε να εκτιμήσουμε την πιθανότητα, όταν γυρίσουμε το δείκτη, να πετύχουμε κάποιο συγκεκριμένο χρώμα πχ το μπλε.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start;"> <div style="text-align: center;">  <p>The pointer is on blue.</p> <p>Number of sectors: 3 <input type="button" value="+1"/> <input type="button" value="-1"/></p> <p>Number of spins: <input type="text" value="1"/></p> <p>Number of spins so far: 0</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>Probability</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th></th> <th>Count</th> <th>Experimental</th> <th>Theoretical</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Blue</td> <td>214</td> <td>42.8%</td> <td>43.61%</td> </tr> <tr> <td>Pink</td> <td>150</td> <td>30.00%</td> <td>31.39%</td> </tr> <tr> <td>Gray</td> <td>136</td> <td>27.2%</td> <td>25.00%</td> </tr> </tbody> </table> </div> </div> <p>Εκτελώντας αρχικά μικρό αριθμό δοκιμών και κατόπιν ολοένα και μεγαλύτερο ζητάμε από τους μαθητές να σημειώσουν σε ένα φύλλο εργασίας τις τιμές της σχετικής συχνότητας για το μπλε χρώμα μετά από 5, 10 50, 100, 500, 1000, 2000, 5000 κλπ δοκιμές. Ζητάμε κατόπιν οι μαθητές να εκτιμήσουν την πιθανότητα να πετύχουμε το μπλε χρώμα και συζητάμε με ποιον τρόπο έφτασαν στην εκτίμησή της.</p>		Count	Experimental	Theoretical	Blue	214	42.8%	43.61%	Pink	150	30.00%	31.39%	Gray	136	27.2%	25.00%	<b>Π4</b>
	Count	Experimental	Theoretical															
Blue	214	42.8%	43.61%															
Pink	150	30.00%	31.39%															
Gray	136	27.2%	25.00%															



## Β΄ Γυμνασίου

### Θεματική ενότητα: Αριθμοί – Άλγεβρα

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 46

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	Βασικά θέματα	Δραστηριότητες	Εκπαιδευτικό υλικό
<p>Αρ1. Διερευνούν τις δεκαδικές αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών και κάνουν μετατροπές από τη μία μορφή στην άλλη.</p> <p>Αρ2. Αναγνωρίζουν, μέσα από προβλήματα, την αναγκαιότητα εισαγωγής και χρήσης των τετραγωνικών ριζών θετικών αριθμών και υπολογίζουν τετραγωνικές ρίζες με δοκιμές, με διαδοχικές προσεγγίσεις και με χρήση υπολογιστή τσέπης.</p> <p>Αρ3. Διερευνούν την ύπαρξη αριθμών που δεν είναι ρητοί και αναγνωρίζουν τους άρρητους.</p> <p>Αρ4. Αναπαριστούν γεωμετρικά και τοποθετούν στην ευθεία αριθμούς της μορφής <math>\sqrt{a}</math>.</p> <p>Αρ5. Αναγνωρίζουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Διερευνούν τις σχέσεις των συνόλων των φυσικών, των ακεραίων, των ρητών, των άρρητων και των πραγματικών.</p> <p>Αρ6. Συγκρίνουν και διατάσσουν πραγματικούς αριθμούς χρησιμοποιώντας την ευθεία.</p> <p>Αρ7. Επεκτείνουν τις πράξεις των ρητών και τις ιδιότητές τους στους πραγματικούς.</p>	<p><b>Άρρητοι αριθμοί</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• άρρητοι, επέκταση από τους ρητούς στους πραγματικούς, πυκνότητα</li> </ul> <p>(8 ώρες)</p>	<p>Είναι σημαντικό, μέσα από δραστηριότητες, να αναδειχθούν: α) η αναγκαιότητα εισαγωγής των τετραγωνικών ριζών και των άρρητων αριθμών, β) τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των άρρητων, καθώς και τα κοινά χαρακτηριστικά τους με τους ρητούς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.</p> <p>(ενδεικτική δραστηριότητα ΑρΔ1)</p>	<p>Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) κεφ. 2<sup>ο</sup>.</p>

<p>Αρ8. Διερευνούν την ιδιότητα της πυκνότητας των πραγματικών αριθμών.</p> <p>Αρ9. Χρησιμοποιούν τους πραγματικούς αριθμούς στην επίλυση προβλημάτων.</p>			
<p>A1. Αναγνωρίζουν συμμεταβαλλόμενα ποσά (μεταβλητές) σε συγκεκριμένες καταστάσεις και διακρίνουν ποιο ποσό εξαρτάται από το άλλο.</p> <p>A2. Αναγνωρίζουν σχέσεις που είναι συναρτήσεις (σε κάθε τιμή της μιας αντιστοιχεί μόνο μία τιμή της άλλης) και τις διακρίνουν από σχέσεις που δεν είναι συναρτήσεις. Αναγνωρίζουν ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή σε μια συνάρτηση.</p> <p>A3. Σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση συναρτήσεων χρησιμοποιώντας πίνακες τιμών.</p> <p>A4. Εξετάζουν αν ένα σημείο (διατεταγμένο ζεύγος) ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.</p> <p>A5. Υπολογίζουν, γραφικά και αλγεβρικά, τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής για δεδομένες τιμές της ανεξάρτητης και αντιστρόφως.</p> <p>A6. Μοντελοποιούν μια κατάσταση με μια συνάρτηση λεκτικά, αριθμητικά (με πίνακα τιμών), γεωμετρικά (με γραφική παράσταση) και συμβολικά (με τύπο).</p> <p>A7. Βρίσκουν τις τιμές που μπορεί να πάρει η</p>	<p><b>Κανονικότητες– Συναρτήσεις</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• συμμεταβολή μεγεθών, πολλαπλές αναπαραστάσεις συνάρτησης</li> </ul> <p>(7 ώρες)</p>	<p>Η συμμεταβολή μεγεθών είναι οικεία στους μαθητές από την καθημερινή τους ζωή αλλά και από προηγούμενες σχολικές εμπειρίες. Οι δραστηριότητες θα πρέπει να εισάγουν την έννοια της συνάρτησης και των αναπαραστάσεών της με άμεση αναφορά σε καταστάσεις και προβλήματα (μοντελοποίηση). Η ικανότητα να μεταφράζουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη (όπου είναι δυνατόν) είναι στοιχείο κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης.</p> <p>(ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ1)</p>	<p>Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 3.1 και 3.2.</p> <p><a href="http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/gymnasiu/11_03_2011_ekpaideftiko_yliko_enotita_4.pdf">http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/gymnasiu/11_03_2011_ekpaideftiko_yliko_enotita_4.pdf</a> σελ 20-34 (μόνο δραστηριότητες).</p>

<p>ανεξάρτητη μεταβλητή από τη γραφική παράσταση και από τις συνθήκες της κατάστασης.</p> <p>A8. Επιλύουν προβλήματα που μοντελοποιούνται με συναρτήσεις. Αιτιολογούν τις απαντήσεις τους χρησιμοποιώντας τις αναπαραστάσεις των συναρτήσεων (γραφικές παραστάσεις, πίνακες τιμών, τύπους) και μεταβαίνουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη (όπου είναι δυνατόν).</p>			
<p>A9. Προσδιορίζουν τη σχέση που συνδέει τις αντίστοιχες τιμές δυο ανάλογων ποσών.</p> <p>A10. Διερευνούν συγκεκριμένες συναρτήσεις της μορφής <math>y=ax</math>. Σχεδιάζουν τη γραφική παράστασή τους και διαπιστώνουν ότι είναι ευθεία. Εξηγούν γιατί η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή και διερευνούν το ρόλο του <math>a</math>.</p> <p>A11. Διερευνούν τη μεταβολή του <math>y</math> για οποιαδήποτε μοναδιαία αύξηση του <math>x</math> σε συναρτήσεις της μορφής <math>y=ax</math>. Συγκρίνουν με συναρτήσεις που η αντίστοιχη μεταβολή του <math>y</math> δεν είναι σταθερή (πχ τετραγωνικές)</p> <p>A12. Επιλύουν (αλγεβρικά και γραφικά) προβλήματα ανάλογων ποσών χρησιμοποιώντας την συνάρτηση <math>y=ax</math>.</p>	<p><b>Κανονικότητες-Συναρτήσεις</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ανάλογα ποσά, η συνάρτηση <math>y=ax</math>. (4 ώρες)</li> </ul>	<p>Μέσα από προβλήματα ανάλογων ποσών μπορεί να εισαχθεί και να διερευνηθεί η συνάρτηση <math>y=ax</math> και οι αναπαραστάσεις της. Η χρήση της γραφικής παράστασης από τους μαθητές ως εργαλείο διερεύνησης και αιτιολόγησης αποτελεί σημαντικό στόχο των δραστηριοτήτων.</p> <p>(ενδεικτικές δραστηριότητες ΑΔ2, ΑΔ3, ΑΔ4)</p>	<p>Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 3.3.</p> <p><a href="#">B-ΑΔ3-Ανάλογα ποσά και η <math>\psi=ax-1</math></a> ,</p> <p><a href="#">B-ΑΔ3-Ανάλογα ποσά και η <math>\psi=ax-2</math></a></p> <p><a href="#">Φύλλο εργασίας- B-ΑΔ3-Ανάλογα ποσά και η <math>\psi=ax</math></a></p> <p><a href="#">B-ΑΔ4-Η μεταβολή της τεταγμένης στην <math>\psi=ax</math></a></p>
<p>A13. Μοντελοποιούν και επιλύουν (γραφικά και αλγεβρικά) προβλήματα με συναρτήσεις της μορφής <math>y=ax+\beta</math>.</p>	<p><b>Κανονικότητες-Συναρτήσεις</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• η συνάρτηση <math>y=ax+\beta</math> (4 ώρες)</li> </ul>	<p>Μέσω της <math>y=ax+\beta</math> πρέπει να αρχίσει να αναδεικνύεται ο ρόλος των γραμμάτων στην άλγεβρα ως μεταβλητών (<math>\chi</math>, <math>\psi</math>) ή ως</p>	<p>Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 3.4.</p>

<p>A14. Διερευνούν τη συνάρτηση <math>y=ax+\beta</math>. Εξετάζουν το ρόλο του <math>a</math> (σταθερή μεταβολή του <math>y</math> για οποιαδήποτε μοναδιαία αύξηση του <math>x</math>) και του <math>\beta</math> («σημείο» τομής με τον άξονα των <math>y</math>).</p> <p>A15. Βρίσκουν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της <math>y=ax+\beta</math> με τους άξονες.</p> <p>A16. Χρησιμοποιούν τις γραφικές παραστάσεις για την επίλυση εξισώσεων της μορφής <math>ax+\beta=y</math>.</p>		<p>παραμέτρων (<math>a, \beta</math>).</p> <p>Ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ5.</p>	
<p>A17. Προσδιορίζουν τη σχέση που συνδέει δυο αντιστρόφως ανάλογα ποσά.</p> <p>A18. Διερευνούν τη συνάρτηση <math>y = a/x</math> και τη γραφική της παράσταση.</p> <p>A19. Επιλύουν προβλήματα αντιστρόφως ανάλογων ποσών χρησιμοποιώντας διάφορες αναπαραστάσεις της συνάρτησης <math>y=a/x</math>.</p>	<p><b>Κανονικότητες-Συναρτήσεις</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• αντιστρόφως ανάλογα ποσά, η συνάρτηση <math>y=a/x</math></li> </ul> <p>(2 ώρες)</p>	<p>Μέσω δραστηριοτήτων πρέπει να αναδειχθούν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των αντιστρόφως ανάλογων ποσών και της υπερβολής σε αντιδιαστολή με τα ανάλογα ποσά και την ευθεία.</p> <p>(ενδεικτικές δραστηριότητες ΑΔ6, ΑΔ7)</p>	<p>Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 3.5.</p> <p><a href="#">B-AΔ7-Η υπερβολή</a></p>
<p>A20. Διερευνούν τις ιδιότητες των δυνάμεων με βάση ρητό και εκθέτη φυσικό, τις διατυπώνουν συμβολικά και τις αιτιολογούν χρησιμοποιώντας τον ορισμό της δύναμης.</p> <p>A21. Καταλήγουν στον ορισμό των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη, επεκτείνουν τις ιδιότητες των δυνάμεων με φυσικό εκθέτη και τις χρησιμοποιούν σε προβλήματα.</p> <p>A22. Χρησιμοποιούν την τυποποιημένη μορφή για να εκφράσουν μεγάλους και μικρούς αριθμούς.</p> <p>A23. Υπολογίζουν την τιμή απλών αριθμητικών</p>	<p><b>Αλγεβρική παράσταση</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• αναπαραστάσεις αριθμών, σύντομη γραφή αριθμού</li> </ul> <p>(8 ώρες)</p>	<p>Οι μαθητές από τον ορισμό των δυνάμεων, μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων, οδηγούνται στις ιδιότητες και από τις ιδιότητες στη διατύπωση του ορισμού της δύναμης με αρνητικό εκθέτη. Επιδίωξη είναι μια ισορροπία ανάμεσα στην εννοιολογική κατανόηση και στη διαδικαστική γνώση.</p>	<p>Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κα, ΟΕΔΒ, 2010), παρ. 7.8, 7.9, 7.10.</p>

<p>παραστάσεων που περιέχουν και δυνάμεις.</p>			
<p>A24. Διερευνούν κανονικότητες και εκφράζουν το γενικό όρο τους με μια αλγεβρική παράσταση.</p> <p>A25. Μοντελοποιούν ένα πρόβλημα με μια αλγεβρική παράσταση.</p> <p>A26. Απλοποιούν απλές αλγεβρικές παραστάσεις με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας (απαλοιφή παρένθεσης και αναγωγή ομοίων όρων).</p> <p>A27. Υπολογίζουν την αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης για δεδομένες τιμές των μεταβλητών. Διακρίνουν το ρόλο της μεταβλητής σε μια παράσταση από το ρόλο του αγνώστου σε μια εξίσωση.</p> <p>A28. Αναγνωρίζουν στοιχεία της δομής μιας αλγεβρικής παράστασης (πχ η <math>x+4(x-3)</math> είναι άθροισμα με όρους το <math>x</math> και το γινόμενο <math>4(x-3)</math>, που έχει παράγοντες το 4 και το <math>x-3</math> κλπ).</p>	<p><b>Αλγεβρική παράσταση</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• μεταβλητές, αλγεβρικές παραστάσεις και απλοί μετασχηματισμοί (5 ώρες)</li> </ul>	<p>Με δραστηριότητες μοντελοποίησης καταστάσεων, μετάφρασης λεκτικών διατυπώσεων, και υπολογισμού αριθμητικών τιμών, αναδεικνύεται η ανάγκη χρήσης αλγεβρικής παράστασης.</p> <p>(ενδεικτική δραστηριότητα A28)</p>	<p>Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 1.1.</p>
<p>A29. Μοντελοποιούν προβλήματα με γραμμικές εξισώσεις της μορφής <math>ax+b=gx+d</math> (με άγνωστο και στα δύο μέλη) και τις επιλύουν αριθμητικά και γραφικά (σύνδεση με συναρτήσεις της μορφής <math>\psi=ax+b</math>). Ελέγχουν αν η λύση της εξίσωσης είναι και λύση του προβλήματος.</p> <p>A30. Επιλύουν την εξίσωση <math>ax+b=gx+d</math> (και άλλες που περιέχουν παρενθέσεις ή/και κλάσματα και ανάγονται σε αυτήν),</p>	<p><b>Ισότητες–ανισότητες</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• η εξίσωση <math>(ax+b=gx+d)</math> ως εργαλείο επίλυσης προβλημάτων</li> <li>• μετασχηματισμοί εξίσωσης. (8 ώρες)</li> </ul>	<p>Μέσα από δραστηριότητες οι μαθητές διατυπώνουν τις ιδιότητες της ισότητας και επιλύουν εξισώσεις. Είναι σκόπιμο η χρήση πρακτικών κανόνων να μην οδηγήσει στην απώλεια του νοήματος, αλλά να υπάρχουν συνεχείς αναφορές στις αντίστοιχες μαθηματικές ιδέες. Έμφαση στην επίλυση προβλημάτων εξισώσεων και τη</p>	<p>Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 1.2 και 1.4.</p>

<p>χρησιμοποιώντας αρχικά διάφορα μοντέλα – μεταφορές και στη συνέχεια τις ιδιότητες της ισότητας.</p> <p>A31. Αναγνωρίζουν αν ένας αριθμός είναι λύση της εξίσωσης ή/και του αντίστοιχου προβλήματος.</p> <p>A32. Αναγνωρίζουν ότι μια εξίσωση μπορεί να έχει άπειρες λύσεις ή καμία λύση.</p>		<p>σύνδεσή τους με τις συναρτήσεις.</p> <p>(ενδεικτικές δραστηριότητες AΔ9, AΔ10)</p>	
---	--	---	--

### Θεματική ενότητα: Γεωμετρία – Μέτρηση

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 47

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	Βασικά θέματα	Δραστηριότητες	Εκπαιδευτικό υλικό
<p>Γ1. Αναγνωρίζουν τη διαφορά ανάμεσα σε ευθύγραμμο τμήμα και διάνυσμα.</p> <p>Γ2. Αναπαριστούν θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές με τη βοήθεια διανυσμάτων.</p>	<p><b>Προσανατολισμός στο χώρο</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές</li> <li>• δόμηση του χώρου και συντεταγμένες</li> </ul> <p>(3 ώρες)</p>	<p>(ενδεικτική δραστηριότητα ΓΔ1)</p>	<p>Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Π. Βλάμος κ.ά., Γεωμετρία, Κεφ. 2<sup>ο</sup> (μόνο η παρ. 2.5).</p>
<p>Γ3. Διερευνούν και αιτιολογούν τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων με επαγωγικούς συλλογισμούς και (μη τυπικές) αποδείξεις.</p> <p>Γ4. Χρησιμοποιούν κανόνα, διαβήτη ή άλλα εργαλεία για να σχεδιάσουν γεωμετρικά σχήματα.</p>	<p><b>Γεωμετρικά σχήματα</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ανάλυση των γεωμετρικών σχημάτων σε στοιχεία και ιδιότητες</li> <li>• κατασκευές και σχεδιασμός γεωμετρικών σχημάτων</li> </ul> <p>(6 ώρες)</p>	<p>Οι μαθητές θα κατασκευάσουν τα ζητούμενα σχήματα (π.χ. κατασκευή του κοινού σημείου των τριών μεσοκαθέτων, τριών διχοτόμων, τριών υψών ή τριών διαμέσων ενός τριγώνου, κατασκευή κανονικών πολυγώνων εγγεγραμμένων σε κύκλο) και αξιοποιώντας τις δυνατότητες κίνησης και μέτρησης του λογισμικού, θα εντοπίσουν</p>	<p>Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Π. Βλάμος κ.ά., Γεωμετρία, Κεφ. 3<sup>ο</sup>.</p> <p><a href="#">B-ΓΔ2-Σχέση εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας</a></p> <p><a href="#">B-ΓΔ3-Κέντρα τριγώνου</a></p>

		<p>αναλλοιώτες σχέσεις και θα διατυπώσουν ιδιότητες.</p> <p>(ενδεικτικές δραστηριότητες ΓΔ1, ΓΔ2)</p>	
<p>Γ5. Αναγνωρίζουν τη σημασία της μεταφοράς και της στροφής στις γεωμετρικές κατασκευές και την αιτιολόγηση ιδιοτήτων των σχημάτων.</p> <p>Γ6. Κατασκευάζουν το σχήμα που προκύπτει από τη μεταφορά ή τη στροφή ενός σχήματος και αναγνωρίζουν τη σχέση του με το αρχικό.</p> <p>Γ7. Αναγνωρίζουν σχήματα με άξονα συμμετρίας ή κέντρο συμμετρίας και κατασκευάζουν τα συμμετρικά γεωμετρικών σχημάτων ως προς διάφορους άξονες ή κέντρα σε πραγματικό και ψηφιακό περιβάλλον.</p> <p>Γ8. Εντοπίζουν τις γεωμετρικές ιδιότητες της αξονικής και της κεντρικής συμμετρίας.</p>	<p><b>Μετασχηματισμοί</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• μεταφορά και στροφή</li> <li>• αξονική συμμετρία (Ανάκλαση)</li> <li>• κεντρική συμμετρία (12 ώρες)</li> </ul>	<p>Ο μετασχηματισμός «παράλληλη μεταφορά» έχει χρησιμοποιηθεί έμμεσα στην κατασκευή της παράλληλης προς δοθείσα ευθεία (μεταφορά του γνώμονα) και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αιτιολόγηση της ισότητας των γωνιών που σχηματίζονται από δύο παράλληλες και μια τέμνουσα.</p> <p>Η «ανάκλαση» ως προς άξονα αξιοποιεί την έννοια της μεσοκάθετης.</p> <p>Ο δυναμικός χαρακτήρας των μετασχηματισμών αναδεικνύεται με τη χρήση λογισμικού.</p> <p>(ενδεικτικές δραστηριότητες ΓΔ4, ΓΔ5, ΓΔ6)</p>	<p>Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Π. Βλάμος κ.ά., Γεωμετρία, Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup> (μόνο η παρ. 2.5).</p> <p><a href="http://www.e-lyiko.gr/Lists/List7/simmetria.aspx">http://www.e-lyiko.gr/Lists/List7/simmetria.aspx</a></p> <p><a href="#">B-ΓΔ4-Μετασχηματισμοί σημείου</a></p>
<p>M1. Αναγνωρίζουν τη σχέση ανάμεσα σε μήκος διαμέτρου, μήκος κύκλου και μήκος τόξου και αιτιολογούν τους σχετικούς τύπους.</p>	<p><b>Μέτρηση μήκους</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες μέτρησης μήκους (2 ώρες)</li> </ul>	<p>Η μέτρηση του κύκλου με μούρες και μονάδες μήκους προσφέρεται για μια συζήτηση σχετικά με τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα των δύο μονάδων μέτρησης.</p>	<p>Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κ.α, ΟΕΔΒ, 2010) κεφ.3 (παράγραφοι 3.3, 3.4)</p>
<p>M2. Αναγνωρίζουν και κατασκευάζουν ισεμβαδικές επιφάνειες με βάση ιδιότητες και σχέσεις</p>	<p><b>Μέτρηση επιφάνειας</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις</li> </ul>	<p>Για τη δημιουργία των τύπων εμβαδού των γεωμετρικών σχημάτων είναι</p>	<p>Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Π. Βλάμος κ.ά., Γεωμετρία, Κεφ.</p>

<p>για να αιτιολογήσουν τους γνωστούς τύπους εμβαδού.</p> <p><i>M3.</i> Διερευνούν και διατυπώνουν το Πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφό του και τα χρησιμοποιούν για τον υπολογισμό μηκών και τον προσδιορισμό ορθών γωνιών.</p> <p><i>M4.</i> Υπολογίζουν το εμβαδό κυκλικού δίσκου και κυκλικού τομέα.</p> <p><i>M5.</i> Επιλύουν προβλήματα υπολογισμού εμβαδών με τη χρήση κατάλληλων μονάδων μέτρησης (με βάση την ακρίβεια που απαιτείται).</p>	<p>επιφανειών.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες μέτρησης επιφανειών</li> </ul> <p>(16 ώρες)</p>	<p>Βασικός ο μετασχηματισμός τους σε απλούστερα σχήματα με διατήρηση του εμβαδού.</p> <p>(ενδεικτικές δραστηριότητες <i>MΔ1, MΔ2, MΔ3, MΔ4</i>)</p>	<p>1° &amp; 3°.</p> <p><a href="#">B-MΔ3-Πυθαγόρειο θεώρημα</a></p> <p><a href="#">B-MΔ4-Εμβαδόν κυκλικού δίσκου</a></p>
<p><i>M6.</i> Υπολογίζουν γωνίες (κλίσεις) χρησιμοποιώντας ιδιότητες ή σχέσεις (όμοια ορθογώνια τρίγωνα, λόγος ευθυγράμμων τμημάτων).</p> <p><i>M7.</i> Χρησιμοποιούν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς (εφαπτομένη, ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας) για τον υπολογισμό γωνιών.</p> <p><i>M8.</i> Χρησιμοποιούν το Πυθαγόρειο θεώρημα και την Τριγωνομετρία για την επίλυση ενός ορθογωνίου τριγώνου σε σχετικά προβλήματα.</p>	<p><b>Τριγωνομετρία</b></p> <p>(8 ώρες)</p>	<p>Με αφετηρία την ερμηνεία των πινακίδων οδικής κυκλοφορίας (κλίση δρόμου) γίνεται μια πρώτη αναφορά στην έννοια της ομοιότητας τριγώνων και στην ανάγκη εισαγωγής τριγωνομετρικών αριθμών.</p> <p>(ενδεικτική δραστηριότητα <i>MΔ5</i>)</p>	<p>Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Π. Βλάμος κ.ά., Γεωμετρία, Κεφ. 2°.</p>



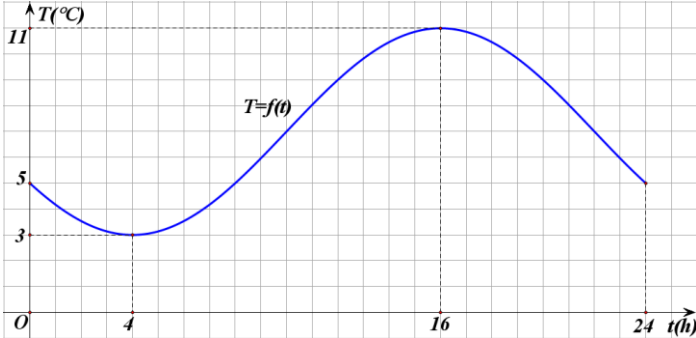
**Θεματική ενότητα: Στοχαστικά μαθηματικά**

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 7

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	Βασικά θέματα	Δραστηριότητες	Εκπαιδευτικό υλικό
<p>Σ1. Διατυπώνουν ερωτήματα που αφορούν το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον και που να μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα από πραγματικές ή υποθετικές καταστάσεις.</p> <p>Σ2. Διακρίνουν τους πιθανούς τρόπους συλλογής δεδομένων (απογραφή – διαρκής καταγραφή- δειγματοληψία).</p> <p>Σ3. Κατασκευάζουν κυκλικά διαγράμματα και διαγράμματα διασποράς.</p> <p>Σ4. Αναγνωρίζουν ότι η συσχέτιση ανάμεσα σε δύο χαρακτηριστικά δεν είναι κατ' ανάγκη σχέση αιτίου αποτελέσματος.</p> <p>Σ5. Αναγνωρίζουν εσφαλμένους ή/ και παραπλανητικούς τρόπους κατασκευής και παρουσίασης στατιστικών διαγραμμάτων που σχετίζονται με το εμβαδόν.</p> <p>Σ6. Εξετάζουν κριτικά στατιστικές έρευνες και ερμηνείες τους.</p>	<p><b>Δεδομένα</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Συλλογή, αναπαράσταση, ερμηνεία δεδομένων</li> </ul> <p>(4 ώρες)</p>	<p>(ενδεικτική δραστηριότητα ΣΔ1)</p>	<p>Μέρος του 4<sup>ου</sup> κεφαλαίου του βιβλίου: Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος, Δρούτσας κλπ) με κατάλληλες τροποποιήσεις.</p>
<p>Σ7. Διερευνούν ιδιότητες της μέσης τιμής.</p>	<p><b>Μέτρα θέσης</b></p> <p>(2 ώρες)</p>	<p>(ενδεικτική δραστηριότητα ΣΔ2)</p>	<p>Μέρος του 4ου κεφαλαίου του βιβλίου: Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος, Δρούτσας κλπ) με κατάλληλες τροποποιήσεις</p> <p><a href="http://illuminations.nc tm.org/activitydetail.aspx?ID=160">http://illuminations.nc tm.org/activitydetail.aspx?ID=160</a></p>

			Οδηγίες: <a href="#">Οδηγίες- Β-ΣΔ2- Διάμεσος_ Μέση τιμή</a>
Σ8. Διερευνούν την έννοια της μεταβλητότητας και τα χαρακτηριστικά της.	<b>Μεταβλητότητα</b> (1 ώρα)	Η μεταβλητότητα των δεδομένων για το ύψος ενός ανθρώπου εκτός από τον παράγοντα της ηλικίας, μπορεί να οφείλεται και σε σφάλματα μέτρησης.	

**Ενδεικτικές δραστηριότητες**

A/A	Περιγραφή δραστηριότητας	ΠΜΑ														
<b>ΑρΔ1</b>	Μια μικρή αίθουσα του σχολείου μας έχει δάπεδο σχήματος τετραγώνου πλευράς 4 m. Μια άλλη αίθουσα έχει επίσης δάπεδο σχήματος τετραγώνου, αλλά διπλάσιου εμβαδού. Πόσο είναι το μήκος της πλευράς του δαπέδου της δεύτερης αίθουσας;	<b>Αρ2, Αρ3</b>														
<b>ΑΔ1</b>	<p>Η παρακάτω γραφική παράσταση δείχνει τη θερμοκρασία T (σε βαθμούς Κελσίου) ενός τόπου κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου.</p>  <p>α) Ποια είναι η ελάχιστη και ποια η μέγιστη θερμοκρασία; Ποια ώρα του 24ώρου συμβαίνουν; Ποια σημεία της γραφικής παράστασης δείχνουν την ελάχιστη και τη μέγιστη θερμοκρασία;</p> <p>β) Ποια είναι η θερμοκρασία στις 2 τη νύχτα, στις 2 το μεσημέρι και στις 11 το βράδυ; Ποια ώρα η θερμοκρασία είναι 6°C;</p> <p>γ) Τι εκφράζει με βάση το πρόβλημα το σημείο (20, 9) της γραφικής παράστασης;</p> <p>δ) Ποιες άλλες πληροφορίες μπορούμε να αντλήσουμε από αυτή τη γραφική παράσταση;</p>	<b>Α4, Α5, Α8</b>														
<b>ΑΔ2</b>	<p>Το 60% της μάζας του μοσχαρίσιου κρέατος είναι νερό. Με βάση αυτή την πληροφορία συμπληρώστε τον πίνακα:</p> <table border="1" data-bbox="258 1892 1166 2027"> <tr> <td>μάζα κρέατος σε Kg (x)</td> <td>2</td> <td>6</td> <td>8</td> <td></td> <td>20</td> <td></td> </tr> <tr> <td>μάζα νερού σε Kg (y)</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>6</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	μάζα κρέατος σε Kg (x)	2	6	8		20		μάζα νερού σε Kg (y)				6			<b>Α9, Α10, Α12</b>
μάζα κρέατος σε Kg (x)	2	6	8		20											
μάζα νερού σε Kg (y)				6												

Είναι η "μάζα κρέατος" (x) και η "μάζα νερού" (y) ποσά ανάλογα; Ποια σχέση συνδέει τα δύο ποσά; Ποιες τιμές μπορεί να πάρει η μεταβλητή x; Κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, περιγράψτε και εξηγήστε τα χαρακτηριστικά της (για παράδειγμα, το σχήμα της, κάποια σημεία της κλπ).

**AΔ3**

Χρησιμοποιούν τη δυνατότητα πολλαπλών αναπαραστάσεων (τύπος, πίνακας τιμών, γραφική αναπαράσταση) των μαθηματικών αντικειμένων του F-Probe, για να μεταβούν από τα ανάλογα ποσά στη συνάρτηση  $\psi = \alpha x$  και να διερευνήσουν το ρόλο του  $\alpha$  στη γραφική της παράσταση (αρχεία: [B-AΔ3-Ανάλογα ποσά και η  \$\psi = \alpha x - 1\$](#) , [B-AΔ3-Ανάλογα ποσά και η  \$\psi = \alpha x - 2\$](#) )  
 Φύλλο εργασίας: [Φύλλο εργασίας-B-AΔ3-Ανάλογα ποσά και η  \$\psi = \alpha x\$](#) .

**A4, A5, A7, A8, A9, A10**

**AΔ4**

Με το Geogebra διερευνούν τη μεταβολή της τεταγμένης ενός σημείου που ανήκει σε μία ευθεία της μορφής  $\psi = \alpha x$ , όταν η τετμημένη του αυξάνεται μοναδιαία και διαπιστώνουν ότι η μεταβολή αυτή είναι σταθερή και ισούται με την κλίση  $\alpha$  της ευθείας. Διαπιστώνουν ότι αυτό δεν ισχύει σε γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων που δεν είναι ευθείες. (αρχείο: [B-AΔ4-Η μεταβολή της τεταγμένης στην  \$\psi = \alpha x\$](#) ).

**A11**

**AΔ5**

Ο Παύλος πήγε για κούρεμα. Όταν γύρισε στο σπίτι του, κοίταξε στον καθρέφτη του και είπε: «Είναι πολύ κοντά!».

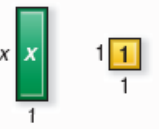
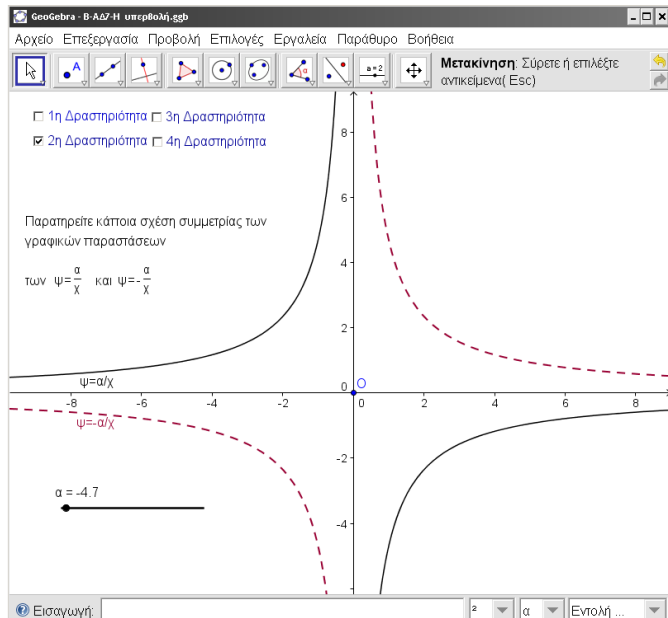
Αποφάσισε να μην ξανακόψει τα μαλλιά του για μεγάλο διάστημα και να μετράει πόσο γρήγορα μεγαλώνουν. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει το μήκος των μαλλιών του Παύλου (σε εκατοστά) όπως το μετρούσε κάθε μήνα:

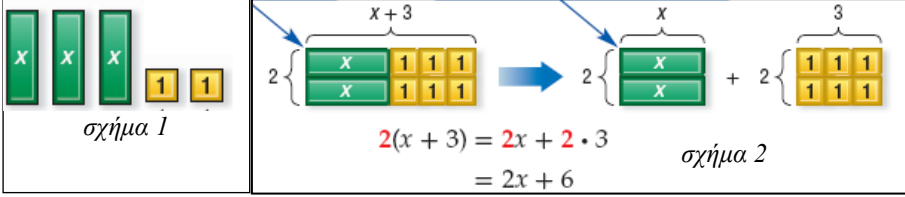
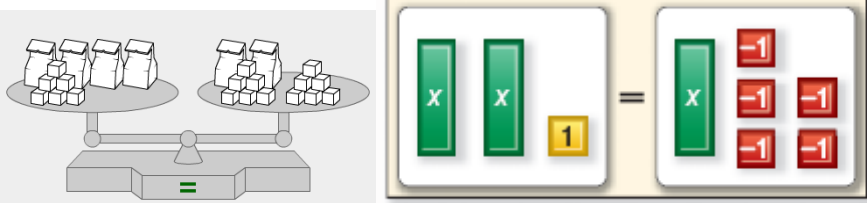
Χρόνος (σε μήνες)	0	1	2	3	4	5	6
Μήκος (σε εκατοστά)	2	3,5	5	6,5			

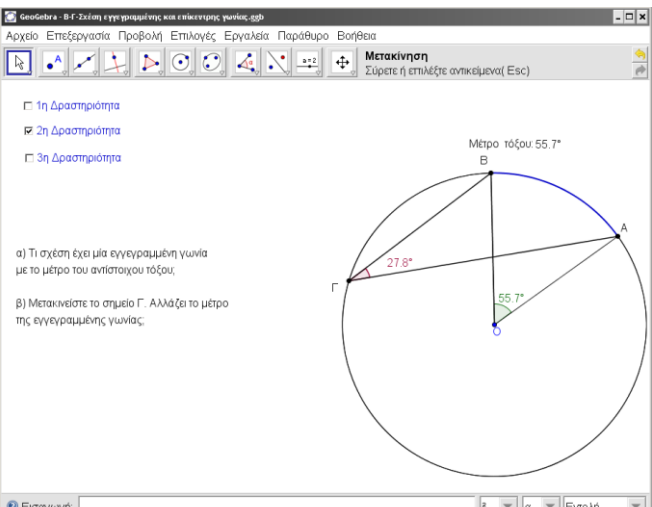
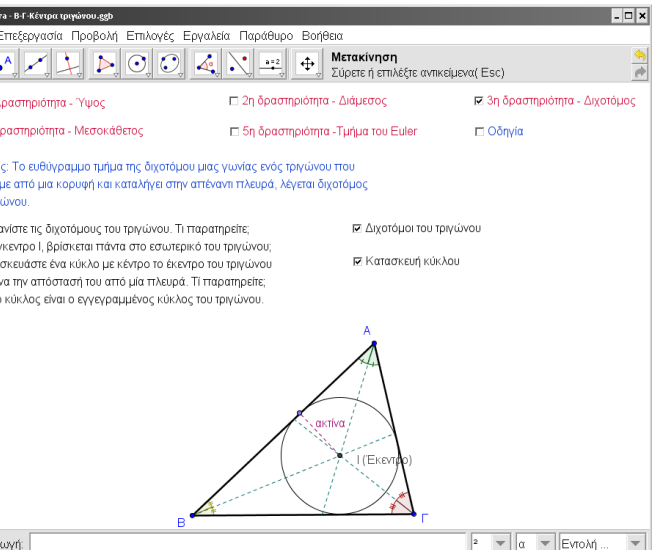
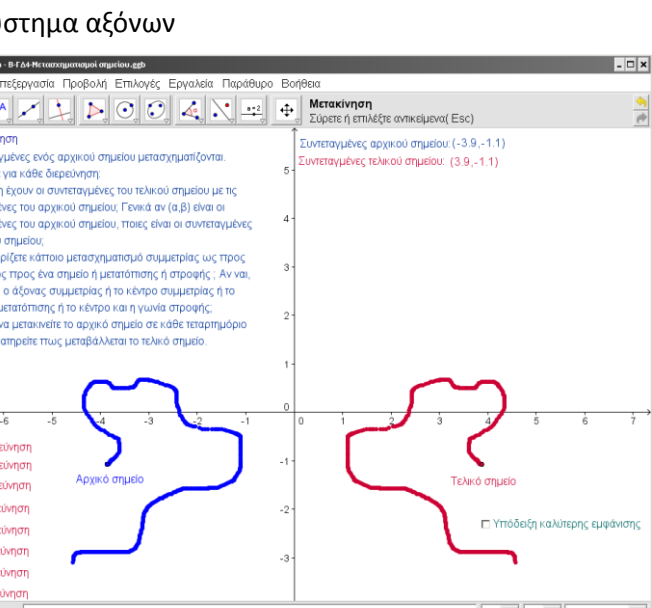
1. Πόσο μακριά ήταν τα μαλλιά του Παύλου μετά το κούρεμα;

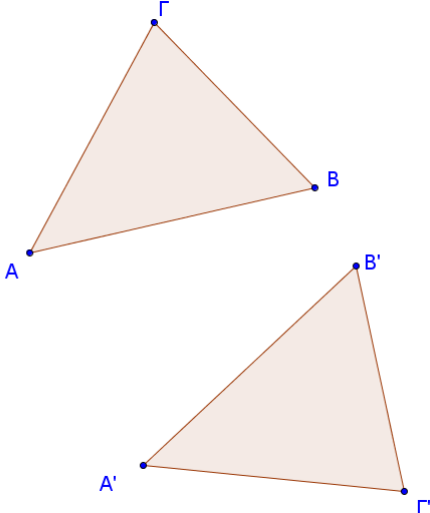
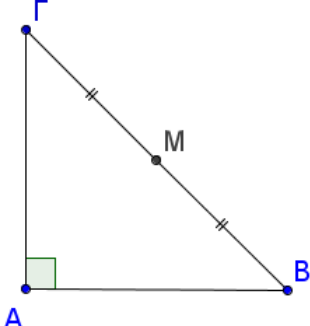
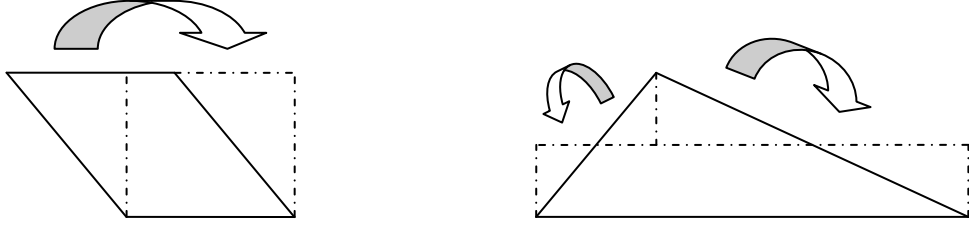
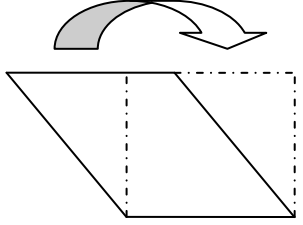
**A13, A14, A16**

	<p>2. α. Πόσο μακριά θα είναι τα μαλλιά του σε πέντε μήνες; β. Γιατί είναι εύκολο να υπολογιστεί αυτό το μήκος;</p> <p>3. α. Πόσο μακριά θα είναι τα μαλλιά του Παύλου μετά από ένα χρόνο, αν συνεχίσουν να μεγαλώνουν με τον ίδιο ρυθμό και δεν κουρευτεί; β. Σχεδιάστε ένα γράφημα που να δείχνει πώς μεγαλώνουν τα μαλλιά του Παύλου στη διάρκεια ενός έτους, αν δεν κουρευτεί. Περιγράψτε το σχήμα του γραφήματος. γ. Μετά από πόσους μήνες τα μαλλιά του Παύλου θα έχουν μήκος 29 εκατοστά; δ. Γράψτε έναν τύπο για να υπολογίζετε το μήκος των μαλλιών αν ξέρετε πόσοι μήνες πέρασαν απ' το κούρεμα.</p> <p>4. Τα μαλλιά της Σοφίας είναι 20 εκατοστά μακριά και μεγαλώνουν με σταθερό ρυθμό 1,4 εκατοστά κάθε μήνα. Γράψτε έναν τύπο για να υπολογίζετε το μήκος των μαλλιών της Σοφίας μετά από κάποιους μήνες. Σχεδιάστε ένα γράφημα.</p>	
<p><b>AΔ6</b></p>	<p>Για ένα ορθογώνιο οικόπεδο γνωρίζουμε ότι έχει εμβαδόν <math>240 \text{ m}^2</math>, αλλά δεν γνωρίζουμε τις διαστάσεις του.</p> <p>Αν το μήκος είναι 20m, πόσο είναι το πλάτος του; Πόσο μεγάλο και πόσο μικρό μπορεί να είναι το μήκος; Να εξετάσετε αν οι διαστάσεις του είναι ανάλογα ποσά.</p> <p>Αν το μήκος είναι <math>x</math> και το πλάτος <math>\psi</math> μπορείτε να εκφράσετε το <math>\psi</math> ως συνάρτηση του <math>x</math>;</p> <p>Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.</p> <p>Από τη γραφική παράσταση μπορείτε να προσδιορίσετε τις διαστάσεις, ώστε το οικόπεδο να είναι τετράγωνο;</p>	<p><b>A17, A18, A19</b></p>
<p><b>AΔ7</b></p>	<p>Με το Geogebra διερευνούν το ρόλο του <math>a</math> στη γραφική παράσταση της <math>\psi = a/x</math>, τη σχέση των γραφικών παραστάσεων <math>\psi = a/x</math> και <math>\psi = -a/x</math>, τη συμμετρία των κλάδων της υπερβολής ως προς την αρχή των αξόνων, τη μεταβολή της τεταγμένης όταν αυξάνεται η τετμημένη, τις τιμές που δεν μπορούν να πάρουν οι δύο μεταβλητές και την ύπαρξη ελάχιστης ή μέγιστης τιμής του <math>\psi</math> (αρχείο: <a href="#">B-AΔ7-H υπερβολή</a>).</p>	<p><b>A7, A18</b></p>
<p><b>AΔ8</b></p>	<p>Για να "δούμε" μια αλγεβρική παράσταση (όπως η <math>3x + 2</math>), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ορθογώνια μήκους <math>x</math> και πλάτους 1 για το <math>x</math> και τετράγωνα πλευράς 1 για το 1. Έτσι, η παράσταση <math>3x+2</math> μπορεί να απεικονιστεί όπως στο σχήμα 1. Χρησιμοποιώντας αυτά τα "πλακάκια", μπορούμε να βρούμε το διπλάσιο της παράστασης <math>x+3</math>, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.</p>	<p><b>A26, A28</b></p>

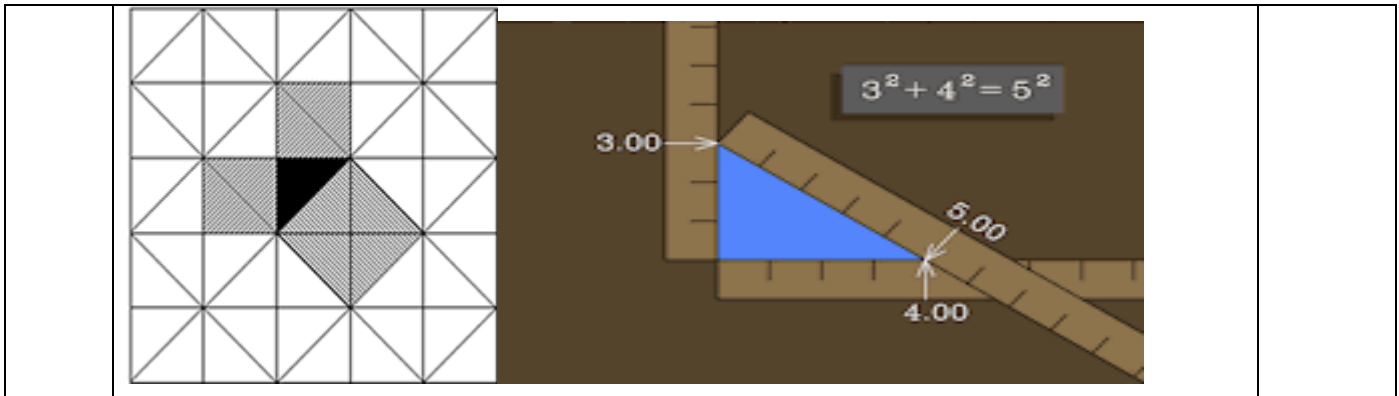


	 <p>α) Χρησιμοποιώντας τα πλακάκια γράψτε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις: <math>2x+3x</math> , <math>5x-2x</math> , <math>2x+5x+2</math> , <math>(2x+3)+(5x+3)</math></p> <p>β) Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την επιμεριστική ιδιότητα, για να απλοποιήσετε τις ίδιες παραστάσεις;</p> <p>γ) Κάποιος μαθητής έγραψε: <math>2x+5+6x=13x</math>. Είναι σωστό ή λάθος; Εξηγήστε την απάντησή σας με τους δύο τρόπους που χρησιμοποιήσατε στα δύο προηγούμενα ερωτήματα.</p>	
<p><b>ΑΔ9</b></p>	<p>Στα παρακάτω σχήματα περιγράφονται δύο (διαφορετικές) εξισώσεις. Στο ένα σχήμα όλα τα σακουλάκια έχουν το ίδιο βάρος και η ζυγαριά ισορροπεί. Στο άλλο σχήμα τα πλακάκια με το γράμμα <math>x</math> εκφράζουν το ίδιο αριθμό. Μπορείτε να βρείτε (χωρίς χαρτί και μολύβι) το βάρος που έχει κάθε σακουλάκι και τον αριθμό που εκφράζει το <math>x</math>; Περιγράψτε τον τρόπο που λύσατε κάθε πρόβλημα, πρώτα με λόγια και μετά με μαθηματικές σχέσεις.</p> 	<p><b>A30</b></p>
<p><b>ΑΔ10</b></p>	<p>Δύο γραφεία νοικιάζουν αυτοκίνητα. Το γραφείο «ΤΑΞΙΔΙΑ» παίρνει για δικαίωμα ενοικίασης 30 € και 0,20€ για κάθε χιλιόμετρο. Το γραφείο «ΔΕΛΦΟΙ» παίρνει 6€ για δικαίωμα ενοικίασης και 0,50€ για κάθε χιλιόμετρο. (α) Να βρείτε τις συναρτήσεις που δίνουν το ποσό που πρέπει να πληρώσουμε σε κάθε γραφείο για <math>x</math> χιλιόμετρα διαδρομής. (β) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων. (γ) Για πόσα χιλιόμετρα θα πληρωθεί και στα δύο γραφεία το ίδιο ποσό; Μπορείτε να απαντήσετε με περισσότερους από έναν τρόπους;</p> <p>Σχόλιο: η απάντηση στο ερώτημα (γ) μπορεί να βρεθεί γραφικά, αριθμητικά από τους πίνακες τιμών και αλγεβρικά με εξίσωση.</p>	<p><b>A29</b></p>
<p><b>ΓΔ1</b></p>	<p>Ως υλικό μιας εισαγωγικής δραστηριότητας που αναδεικνύει την έννοια του προσανατολισμένου ευθύγραμμου τμήματος χρησιμοποιούνται διάφορες πραγματικές καταστάσεις οι οποίες περικλείουν τις έννοιες της διεύθυνσης και φοράς:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Η επίδραση της διεύθυνσης του αέρα και της βαρύτητας στην τροχιά ενός βέλους που εκτοξεύεται στον ουρανό.</li> <li>• Η επίδραση της διεύθυνσης του αέρα στη διαδρομή ενός αεροπλάνου ή της διεύθυνσης του ρεύματος ενός ποταμού στη διαδρομή ενός πλοιαρίου που τον διασχίζει κάθετα.</li> </ul> <p>Οι μαθητές χρησιμοποιούν βέλη για την αναπαράσταση και μελέτη αυτών των καταστάσεων, αναζητούν έναν όρο για να διαφοροποιήσουν το προσανατολισμένο από το μη προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα και συζητούν την προέλευση του όρου “διάνυσμα”.</p>	<p><b>Γ1, Γ2</b></p>

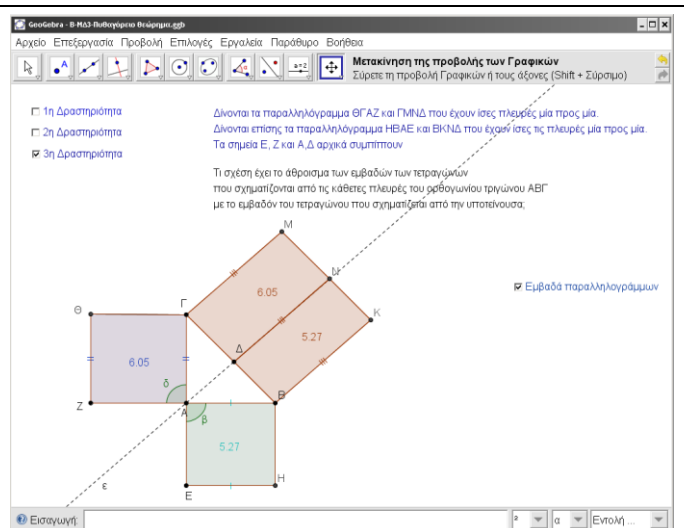
<p><b>ΓΔ2</b></p>	<p>Με το Geogebra κατανοούν τον ορισμό του μέτρου ενός τόξου και τη σχέση των μέτρων της εγγεγραμμένης γωνίας ενός τόξου και της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας (αρχείο: <a href="#">(B-ΓΔ2-Σχέση εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας)</a>).</p>		<p><b>Γ3</b></p>
<p><b>ΓΔ3</b></p>	<p>Με το Geogebra εμφανίζουν ύψη, διαμέσους, διχοτόμους και μεσοκάθετους τριγώνου, διερευνούν τη θέση των σημείων τομής τους σε διαφορετικά είδη τριγώνων και τη σχετική τους θέση (αρχείο <a href="#">B-Γ-Κέντρα τριγώνου</a>).</p>		<p><b>Γ4</b></p>
<p><b>ΓΔ4</b></p>	<p>Με το Geogebra σε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων διερευνούν τη σχέση ενός σημείου (τελικού) ως προς ένα άλλο σημείο (αρχικό). Το αρχικό σημείο έχει υποστεί έναν μετασχηματισμό (συμμετρία ως προς άξονα ή στροφή ως προς σημείο ή μετατόπιση κατά ένα διάνυσμα). Βρίσκουν τη σχέση που έχουν οι συντεταγμένες τους και γενικεύουν (αρχείο: <a href="#">B-ΓΔ4-Μετασχηματισμοί σημείου</a>).</p>		<p><b>Γ5, Γ6</b></p>

<p><b>ΓΔ5</b></p>	<p>Αναλύουν τη γνωστή από την προηγούμενη τάξη κατασκευή της μεσοκαθέτου <math>\epsilon</math> ενός ευθύγραμμου τμήματος <math>AB</math> και εξετάζουν τη σχέση των σημείων <math>A</math> και <math>B</math> ως προς την <math>\epsilon</math> (“αξονική συμμετρία ή ανάκλαση”).</p> <p>Για να αναδειχθεί η σχέση ανάμεσα σε μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος και τον άξονα συμμετρίας μιας ανάκλασης χρησιμοποιείται το πρόβλημα: «Τα δυο τρίγωνα είναι συμμετρικά ως προς άξονα. Να προτείνετε έναν γεωμετρικό τρόπο ώστε να σχεδιάσετε τον άξονα συμμετρίας»</p>		<p><b>Γ7, Γ8</b></p>
<p><b>ΓΔ6</b></p>	<p>Για να αναδειχθεί η σημασία ενός γεωμετρικού μετασχηματισμού (κεντρική συμμετρία) στην ανακάλυψη και αιτιολόγηση μιας ιδιότητας του ορθογωνίου τριγώνου (ιδιότητα της διαμέσου προς την υποτίνουσα) χρησιμοποιείται το πρόβλημα: «Η <math>AM</math> είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου <math>AB\Gamma</math>.</p> <p>α. Να σχεδιάσετε το συμμετρικό τρίγωνο του <math>AB\Gamma</math> ως προς κέντρο <math>M</math></p> <p>β. Τι είδους τετράπλευρο προκύπτει και γιατί;</p> <p>γ. Να εξετάσετε αν η διάμεσος <math>AM</math> είναι το μισό της υποτίνουσας <math>B\Gamma</math> και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.»</p>		<p><b>Γ8</b></p>
<p><b>ΜΔ1</b></p>	<p>Βασική δραστηριότητα για τη δημιουργία των τύπων εμβαδού των γεωμετρικών σχημάτων είναι ο μετασχηματισμός τους σε απλούστερα σχήματα με διατήρηση του εμβαδού. Χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα ή λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας οι μαθητές καθοδηγούνται μέσω κατάλληλων ερωτήσεων να λύσουν το πρόβλημα μετασχηματισμού ενός παραλληλογράμμου και ενός τριγώνου σε ισοδύναμο ορθογώνιο. Στη συνέχεια αυτής της δραστηριότητας διατυπώνουν και αιτιολογούν τους αντίστοιχους τύπους εμβαδού.</p> <p>Τα επόμενα σχήματα δείχνουν έναν από τους πολλούς τρόπους επίλυσης του προβλήματος:</p>		<p><b>Μ2</b></p>
<p><b>ΜΔ2</b></p>	<p>Οι μαθητές κατασκευάζουν τετράγωνα στις πλευρές ενός ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου (βλ. το διακοσμητικό μοτίβο στο σχήμα αριστερά) και χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης εμβαδού το ίδιο το ορθογώνιο τρίγωνο επαληθεύουν τη σχέση του Πυθαγόρειου θεωρήματος.</p> <p>Στη συνέχεια επαληθεύουν τη σχέση αυτή στο ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές μήκους 3cm και 4cm και υποτίνουσα μήκους 5cm.</p>		<p><b>Μ3</b></p>



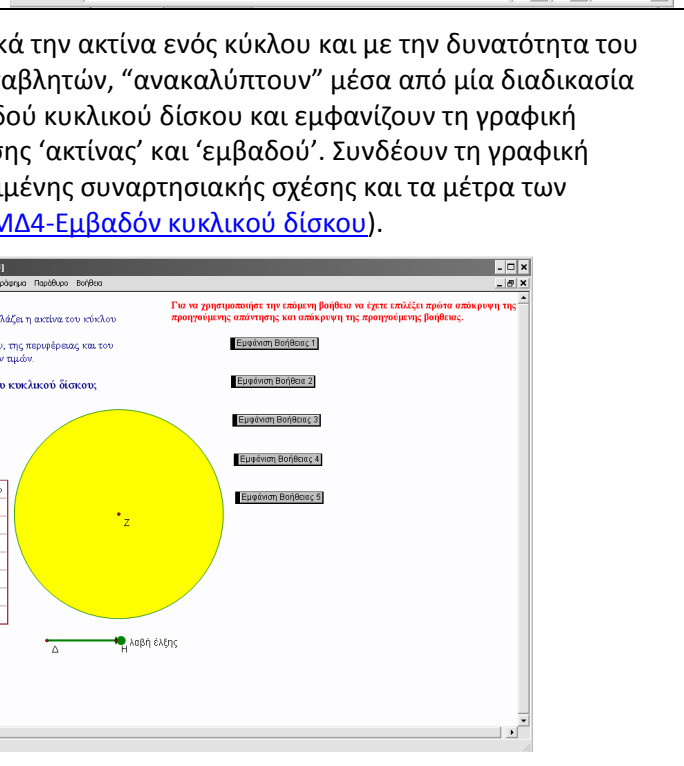


**ΜΔ3** Με το Geogebra κατανοούν γεωμετρικά το Πυθαγόρειο θεώρημα μετασχηματίζοντας ίσα παραλληλόγραμμα σε ισεμβιαδικά τετράγωνα και ορθογώνια, δημιουργώντας ταυτόχρονα τα τετράγωνα των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου. (αρχείο: [B-ΜΔ3-Πυθαγόρειο θεώρημα](#)).



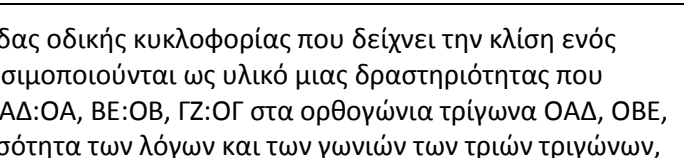
**M2, M3**

**ΜΔ4** Στο Sketchpad μεταβάλλουν δυναμικά την ακτίνα ενός κύκλου και με την δυνατότητα του λογισμικού να πινακοποιεί τιμές μεταβλητών, “ανακαλύπτουν” μέσα από μία διαδικασία μοντελοποίησης τον τύπο του εμβαδού κυκλικού δίσκου και εμφανίζουν τη γραφική παράσταση της συναρτησιακής σχέσης ‘ακτίνας’ και ‘εμβαδού’. Συνδέουν τη γραφική παράσταση με το είδος της συγκεκριμένης συναρτησιακής σχέσης και τα μέτρα των εμπλεκόμενων μεγεθών (αρχείο: [B-ΜΔ4-Εμβαδόν κυκλικού δίσκου](#)).



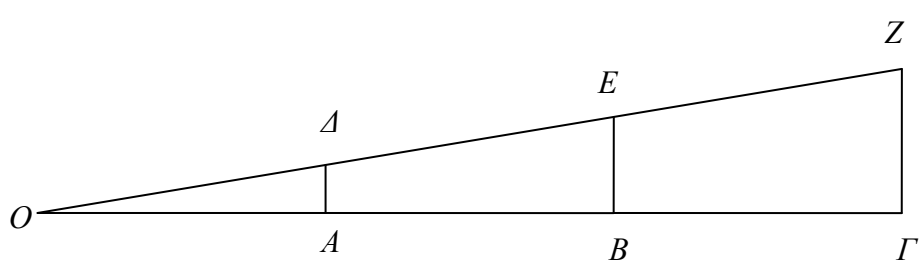
**M4, A1**

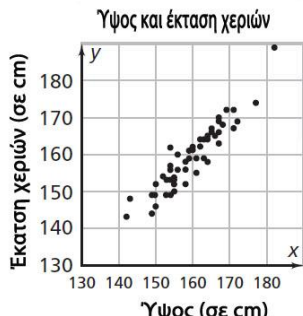
**ΜΔ5** Το πρόβλημα ερμηνείας μιας πινακίδας οδικής κυκλοφορίας που δείχνει την κλίση ενός δρόμου και το παρακάτω σχήμα χρησιμοποιούνται ως υλικό μιας δραστηριότητας που αναδεικνύει την ισότητα των λόγων  $AD:OA$ ,  $BE:OB$ ,  $FZ:OF$  στα ορθογώνια τρίγωνα  $OAD$ ,  $OBE$ ,  $OFZ$ . Οι μαθητές διαπιστώνουν την ισότητα των λόγων και των γωνιών των τριών τριγώνων,

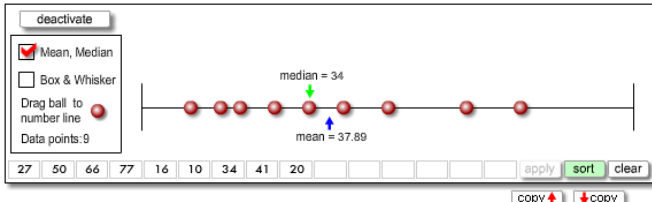


**M6**



	<p>εξετάζουν τη μορφή τους και αναζητούν ένα όρο για να εκφράσουν αυτή τη σχέση (μεγέθυνση, ομοιότητα).</p> 	
--	--	--

<p><b>ΣΔ1</b></p>	<p>Οι μαθητές διερευνούν το εξής ερώτημα: «Ποια είναι η σχέση που έχει το άνοιγμα των χεριών ενός ατόμου, όταν βρίσκονται σε έκταση με το ύψος του;» Συλλέγουν δεδομένα από μαθητές, τα αναπαριστούν σε διάγραμμα διασποράς, όπως το διπλανό, και επιχειρηματολογούν σχετικά, τεκμηριώνοντας τις απόψεις τους με βάση τα στοιχεία που συνέλεξαν, το διάγραμμα που δημιούργησαν και τις γνώσεις που έχουν από την Άλγεβρα και τις συναρτήσεις. Επίσης προσπαθούν να βρουν περιπτώσεις όπου η έκταση των χεριών είναι μικρότερη από το ύψος, αλλά και περιπτώσεις που να δείχνουν το αντίθετο.</p> 	<p><b>Σ3, Σ4</b></p>
-------------------	--	----------------------

<p><b>ΣΔ2</b></p>	<p>Μέσα από τον δυναμικό χειρισμό δεδομένων της εφαρμογής, οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν και να κατασκευάσουν καταστάσεις με μικρά σύνολα δεδομένων τα οποία θα ικανοποιούν κάποια κριτήρια ως προς το πλήθος, το εύρος ή τα μέτρα θέσης, με σκοπό να κατανοήσουν βαθύτερα και πιο διαισθητικά διάφορες πτυχές ή/και ιδιότητες εννοιών της στατιστικής, να αναπτύξουν στρατηγικές ελέγχου κάποιων παραμέτρων ανοικτών προβλημάτων καθώς και στρατηγικές για τη διερεύνηση τέτοιων προβλημάτων.</p>  <p>Διεύθυνση ιστοσελίδας : <a href="http://illuminations.nctm.org/activitydetail.aspx?ID=160">http://illuminations.nctm.org/activitydetail.aspx?ID=160</a>          Οδηγίες: <a href="#">Οδηγίες- Β-ΣΔ2- Διάμεσος_ Μέση τιμή</a></p>	<p><b>Σ7</b></p>
-------------------	---	------------------

## Γ΄ Γυμνασίου

### Θεματική ενότητα: Αριθμοί – Άλγεβρα

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 49

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	Βασικά θέματα	Δραστηριότητες	Εκπαιδευτικό υλικό
<p>A1. Μοντελοποιούν μια κατάσταση με τη συνάρτηση <math>y=ax^2</math>.</p> <p>A2. Εξετάζουν την μεταβολή του <math>y</math> για κάθε μοναδιαία αύξηση του <math>x</math> (συγκρίνουν με την γραμμική συνάρτηση)</p> <p>A3. Διερευνούν μέσω της γραφικής της παράστασης τις ιδιότητές της <math>y=ax^2</math> και το ρόλο της παραμέτρου <math>a</math>.</p> <p>A4. Επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης <math>y=ax^2</math>.</p> <p>A5. Βρίσκουν αλγεβρικά και γραφικά τα κοινά σημεία των συναρτήσεων <math>y=ax^2</math> και <math>y=ax+\beta</math>.</p>	<p><b>Κανονικότητες-Συναρτήσεις</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>η <math>y=ax^2</math> ως περίπτωση μη γραμμικής μεταβολής</li> </ul> <p>(4 ώρες)</p>	<p>Είναι σημαντική η διερεύνηση προβλημάτων που μοντελοποιούνται με τετραγωνικές συναρτήσεις, οι οποίες είναι μια μορφή μη γραμμικής μεταβολής. Η χρήση λογισμικού μπορεί να υποστηρίξει τη διερεύνηση του ρόλου του <math>a</math> και τη σύνδεση με τις εξισώσεις.</p> <p>(ενδεικτικές δραστηριότητες AΔ1, AΔ2)</p>	<p>Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Αργυράκης κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 4.1.</p> <p><a href="#">Γ- ΑΔ1-Το α στην <math>\psi=ax^2</math></a></p>
<p>A6. Διερευνούν και αποδεικνύουν τις ιδιότητες των ριζών <math>\sqrt{a\beta} = \sqrt{a} \sqrt{\beta}</math>, <math>\sqrt{\frac{a}{\beta}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\beta}}</math>.</p> <p>A7. Χρησιμοποιούν τις τετραγωνικές ρίζες και τις ιδιότητές τους στην απλοποίηση παραστάσεων και στην επίλυση προβλημάτων.</p>	<p><b>Άλγεβρική παράσταση</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Ιδιότητες τετραγωνικών ριζών, μετασχηματισμοί</li> </ul> <p>(3 ώρες)</p>	<p>Η διερεύνηση και απόδειξη των ιδιοτήτων και η εφαρμογή τους σε απλές παραστάσεις είναι βασικός στόχος των δραστηριοτήτων.</p> <p>(ενδεικτική δραστηριότητα AΔ3)</p>	<p>Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Αργυράκης κ.α, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 1.1.Γ.</p>
<p>A8. Αναγνωρίζουν τα</p>	<p><b>Άλγεβρική παράσταση</b></p>	<p>Οι δραστηριότητες</p>	<p>Σχολικό βιβλίο</p>

<p>μονώνυμα και τα πολυώνυμα, το βαθμό τους και υπολογίζουν την αριθμητική τιμή ενός πολυωνύμου.</p> <p>A9. Υπολογίζουν το άθροισμα, τη διαφορά και το γινόμενο μονωνύμων και (απλών) πολυωνύμων (κυρίως μιας μεταβλητής). Αναγνωρίζουν την επιμεριστική ιδιότητα όπου χρησιμοποιείται.</p> <p>A10. Μοντελοποιούν πρόβλημα τα με πολυώνυμα και χρησιμοποιούν τις πράξεις τους στην επίλυσή τους.</p> <p>A11. Διερευνούν και αποδεικνύουν αλγεβρικά και (όπου είναι δυνατόν) γεωμετρικά τις ταυτότητες  <math>(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2</math>,  <math>(\alpha \pm \beta)^3 = \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 \pm \beta^3</math>,  <math>\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)</math>,  <math>\alpha^3 \pm \beta^3 = (\alpha \pm \beta)(\alpha^2 \mp \alpha\beta + \beta^2)</math></p> <p>A12. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με χρήση ταυτοτήτων.</p> <p>A13. Αναγνωρίζουν στοιχεία της δομής μιας παράστασης (άθροισμα και οι όροι του, γινόμενο και οι παράγοντές του) και χρησιμοποιούν κατάλληλη ορολογία</p> <p>A14. Παραγοντοποιούν απλά πολυώνυμα (κυρίως μιας μεταβλητής) με κοινό παράγοντα, με ομαδοποίηση, με χρήση ταυτοτήτων.</p> <p>A15. Αναγνωρίζουν την επιμεριστική ιδιότητα ως το βασικό κοινό στοιχείο των πράξεων πολυωνύμων, των</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>δομή της αλγεβρικής παράστασης και μετασχηματισμοί. (24 ώρες)</li> </ul>	<p>μετασχηματισμού παραστάσεων να βρίσκονται σε ισορροπία με τις δραστηριότητες μοντελοποίησης καταστάσεων, γεωμετρικής ερμηνείας, διερεύνησης και αιτιολόγησης σχέσεων, αναγνώρισης δομών, αναγνώρισης αναλογιών με την αριθμητική (πχ στην εύρεση του ΕΚΠ, στις πράξεις κλασμάτων).</p> <p>(ενδεικτικές δραστηριότητες ΑΔ4, ΑΔ5, ΑΔ6)</p>	<p>(Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Αργυράκης κα, ΟΕΔΒ, 2010) κεφ 1<sup>ο</sup> (μόνο όσα αφορούν τα ΠΜΑ της 1<sup>ης</sup> στήλης)</p> <p><a href="http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_189_g_3_t_2.html?open=activities&amp;from=category_g_3_t_2.html">http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_189_g_3_t_2.html?open=activities&amp;from=category_g_3_t_2.html</a>          (πολλαπλασιασμός διωνύμων με πλακίδια).</p>
--	---	---	--

<p>ταυτοτήτων και της παραγοντοποίησης.</p> <p>A16. Προσδιορίζουν το ΕΚΠ μονωνύμων και απλών πολυωνύμων μιας μεταβλητής.</p> <p>A17. Υπολογίζουν το αποτέλεσμα των πράξεων με απλές ρητές παραστάσεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση).</p> <p>A18. Απλοποιούν απλές ρητές παραστάσεις.</p>			
<p>A19. Διερευνούν (με μοντέλα – μεταφορές) και διατυπώνουν τις βασικές ιδιότητες της διάταξης.</p> <p>A20. Μοντελοποιούν προβλήματα με την ανίσωση <math>ax + b &lt; c</math> (άγνωστος μόνο στο ένα μέλος) και την επιλύουν αλγεβρικά και γραφικά (σύνδεση με συνάρτηση της μορφής <math>y = ax + b</math>).</p> <p>A21. Μοντελοποιούν προβλήματα με γραμμικές ανισώσεις της μορφής <math>ax + b &lt; cx + d</math> (άγνωστος και στα δύο μέλη) και τις επιλύουν αλγεβρικά και γραφικά (σύνδεση με συναρτήσεις της μορφής <math>\psi = ax + b</math>).</p> <p>A22. Διακρίνουν τις διαφορές μεταξύ εξίσωσης (συνήθως μία λύση) και ανίσωσης (συνήθως άπειρες λύσεις), ώστε να μην θεωρούν ότι η μόνη διαφορά είναι στο σύμβολο.</p> <p>A23. Βρίσκουν τις κοινές λύσεις δύο ανισώσεων χρησιμοποιώντας τον</p>	<p><b>Ισότητες-ανισότητες</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ανίσωση α΄ βαθμού και μετασχηματισμοί (5 ώρες)</li> </ul>	<p>Παρά τις ομοιότητες εξίσωσης και ανίσωσης, που μπορούν να αξιοποιηθούν διδακτικά, πρέπει να δοθεί έμφαση στις διαφορές μεταξύ ισότητας – εξίσωσης και ανίσωσης – εξίσωσης. Η αναπαράσταση των λύσεων ανίσωσης στην αριθμογραμμή είναι ένα χρήσιμο μέσο και για τους παραπάνω στόχους.</p> <p>(ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ7)</p>	<p>Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 1.5.</p>

άξονα των πραγματικών αριθμών.			
<p>A24. Επιλύουν απλές πολυωνυμικές εξισώσεις (δευτέρου βαθμού ελλειπούς ή και πλήρους μορφής, αλλά και μεγαλύτερου βαθμού) με παραγοντοποίηση.</p> <p>A25. Μοντελοποιούν προβλήματα με απλές πολυωνυμικές εξισώσεις (κυρίως δευτεροβάθμιες), οι οποίες ανάγονται σε πρωτοβάθμιες με παραγοντοποίηση.</p>	<p><b>Ισότητες-Ανισότητες</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• πολυωνυμικές εξισώσεις</li> </ul> <p>(6 ώρες)</p>	<p>Η επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων αποτελεί μια ευκαιρία δικαιολόγησης της παραγοντοποίησης και σύνδεσης των πολυωνύμων με προβλήματα.</p> <p>(ενδεικτική δραστηριότητα AΔ8)</p>	<p>Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Αργυράκης κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 2.2Α, 2.3.</p>
<p>A26. Αναγνωρίζουν γραμμικές εξισώσεις της μορφής <math>ax+by=\gamma</math>, τις αναπαριστούν γραφικά και τις συνδέουν με συναρτήσεις της μορφής <math>\gamma=ax+\beta</math>.</p> <p>A27. Αναγνωρίζουν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και εξετάζουν αν ένα ζεύγος αριθμών είναι λύση του.</p> <p>A28. Ερμηνεύουν γραφικά ένα γραμμικό σύστημα και το πλήθος των λύσεών του.</p> <p>A29. Μοντελοποιούν προβλήματα με δύο γραμμικές εξισώσεις της μορφής <math>ax+by=\gamma</math> ή με δύο συναρτήσεις της μορφής <math>\gamma=ax+\beta</math>. Επιλύουν το σύστημα γραφικά και αλγεβρικά (με τις μεθόδους των αντίθετων συντελεστών και της αντικατάστασης) και επαληθεύουν τη λύση με βάση το πλαίσιο του προβλήματος.</p>	<p><b>Ισότητες-Ανισότητες</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• γραμμικά συστήματα</li> </ul> <p>(7 ώρες)</p>	<p>Οι δραστηριότητες μοντελοποίησης καταστάσεων, σύνδεσης με τις συναρτήσεις και τις αναπαραστάσεις τους, γραφικής ερμηνείας και επίλυσης συστημάτων είναι εξίσου σημαντικές με τις αλγεβρικές μεθόδους επίλυσης. Η χρήση λογισμικού μπορεί να υποστηρίξει τη γραφική ερμηνεία και επίλυση συστήματος.</p> <p>(ενδεικτικές δραστηριότητες AΔ9, AΔ10, AΔ11)</p>	<p>Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Αργυράκης κα, ΟΕΔΒ, 2010) κεφ 3<sup>ο</sup>.</p> <p><a href="#">Γ-ΑΔ10-Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος</a></p>

**Θεματική ενότητα: Γεωμετρία – Μέτρηση**

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 33

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	Βασικά θέματα	Δραστηριότητες	Εκπαιδευτικό υλικό
<p>Γ1. Χρησιμοποιούν τα κριτήρια ισότητας των τριγώνων για την αιτιολόγηση ιδιοτήτων των σχημάτων και κατασκευών.</p> <p>Γ2. Αναγνωρίζουν τα ομοιόθετα σχήματα και συνδέουν την ομοιοθεσία με την αναλογία (και τη σχετική συνάρτηση).</p> <p>Γ3. Κατασκευάζουν ομοιόθετα και όμοια σχήματα.</p> <p>Γ4. Αναγνωρίζουν τις σχέσεις περιμέτρων και εμβαδών των ομοίων σχημάτων.</p> <p>Γ5. Επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας την ομοιότητα και κλίμακες.</p>	<p><b>Μετασχηματισμοί</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• η διατήρηση της ισότητας των σχημάτων ως βασικό γνώρισμα της μεταφοράς, στροφής και συμμετρίας</li> <li>• ομοιότητα και ομοιοθεσία</li> <li>• διαδοχικοί μετασχηματισμοί (15 ώρες)</li> </ul>	<p>Είναι πολύ σημαντικό να γίνει μια επανάληψη των μετασχηματισμών που μελετήθηκαν στην προηγούμενη τάξη και να τονιστεί η διατήρηση της απόστασης και της ισότητας των σχημάτων ως χαρακτηριστική κοινή ιδιότητά τους.</p> <p>Στην ομοιοθεσία χαρακτηριστική ιδιότητα είναι η διατήρηση του λόγου των αποστάσεων.</p> <p>Κοινή ιδιότητα όλων των μετασχηματισμών που μελετήθηκαν είναι η διατήρηση της καθετότητας, της παραλληλίας και του μέτρου των γωνιών.</p> <p>Το θεώρημα του Θαλή θα αναφερθεί ως μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή των ομοίων τριγώνων.</p> <p>Οι σχέσεις περιμέτρων και εμβαδών των ομοίων σχημάτων θα εξεταστούν με την κατασκευή σε σύστημα συντεταγμένων του ομοιόθετου ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου.</p> <p>Ο δυναμικός χαρακτήρας των μετασχηματισμών</p>	<p>Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Δ. Αργυράκης κ.ά., Γεωμετρία, Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup>.</p> <p><a href="#">Γ-ΓΔ3-Ομοιότητα με μετασχηματισμούς</a></p> <p><a href="#">Γ-ΓΔ5-Λόγος εμβαδών και περιμέτρων ομοιόθετων ορθογωνίων</a></p>

		<p>δεικνύεται με τη χρήση λογισμικού.</p> <p>(ενδεικτικές δραστηριότητες ΓΔ1, ΓΔ2, ΓΔ3, ΓΔ4, ΓΔ5, ΓΔ6)</p>	
<p>M1. Υπολογίζουν το εμβαδόν της επιφάνειας πρισμάτων, πυραμίδων, κυλίνδρων, κώνων, σφαιρών και καταλήγουν σε τύπους.</p> <p>M2. Υπολογίζουν τον όγκο πρισμάτων, πυραμίδων, κυλίνδρων, κώνων, σφαιρών και καταλήγουν σε τύπους.</p>	<p><b>Μέτρηση επιφάνειας</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες μέτρησης επιφανειών</li> </ul> <p><b>Μέτρηση χωρητικότητας – όγκου</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες μέτρησης όγκου</li> </ul> <p>(8 ώρες)</p>	<p>Οι μαθητές κατασκευάζουν αναπτύγματα στερεών και χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες γνώσεις τους υπολογίζουν τα εμβαδά των αντίστοιχων επιφανειών και αιτιολογούν τους σχετικούς τύπους.</p> <p>Η μέτρηση του όγκου των στερεών προσφέρεται για τη δημιουργία συνδέσεων με τη Φυσική. Οι μαθητές ζυγίζουν μοντέλα στερεών που είναι κατασκευασμένα από το ίδιο υλικό και χρησιμοποιούν τον τύπο πυκνότητα = μάζα : όγκος για να υπολογίσουν τον αντίστοιχο όγκο. Τα αποτελέσματα χρησιμοποιούνται για να αιτιολογηθούν οι σχετικοί τύποι.</p> <p>(ενδεικτική δραστηριότητα ΜΔ1)</p>	<p>Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Π. Βλάμος κ.ά., Γεωμετρία, Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup></p> <p>Σχολικό βιβλίο Φυσική Β΄ Γυμνασίου, Ν. Αντωνίου κ.ά. (σσ.16-17).</p>
<p>M3. Επεκτείνουν τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών σε αμβλείες γωνίες.</p> <p>M4. Χρησιμοποιούν τις τριγωνομετρικές σχέσεις <math>\eta\mu(180^\circ-\theta)=\eta\mu\theta</math>, <math>\sigma\upsilon\nu(180^\circ-\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta</math>, <math>\epsilon\phi(180^\circ-\theta)=-\epsilon\phi\theta</math> και αποδεικνύουν απλές</p>	<p><b>Τριγωνομετρία</b></p> <p>(10 ώρες)</p>	<p>Η επίλυση ενός μη ορθογώνιου τριγώνου αναδεικνύει την ανάγκη επέκτασης των τριγωνομετρικών αριθμών για αμβλείες γωνίες.</p> <p>(ενδεικτική</p>	<p>Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Δ. Αργυράκης κ.ά., Γεωμετρία, Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup>.</p>

<p>τριγωνομετρικές ταυτότητες  <math>\epsilon\phi\theta = \eta\mu\theta / \sigma\upsilon\nu\theta</math>, <math>\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1</math>.</p> <p>M5. Χρησιμοποιούν τους νόμους ημιτόνων και συνημιτόνων για την επίλυση ενός τυχαίου τριγώνου σε σχετικά προβλήματα.</p>		<p><i>δραστηριότητα MΔ2)</i></p>	
--	--	----------------------------------	--

### Θεματική ενότητα: Στοχαστικά μαθηματικά

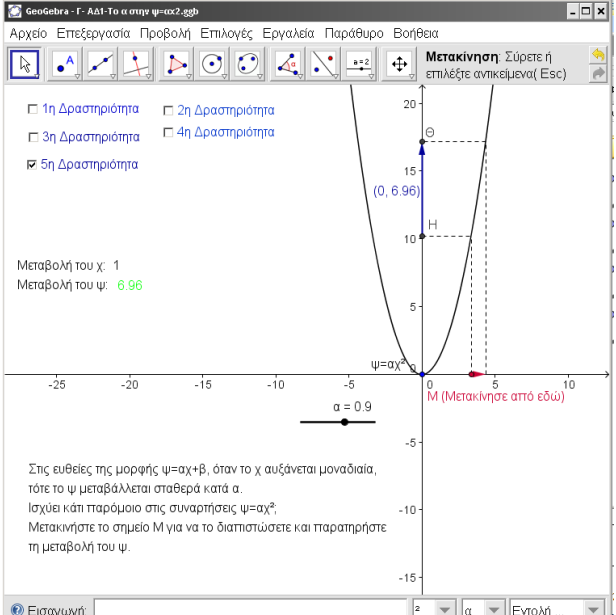
Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 14

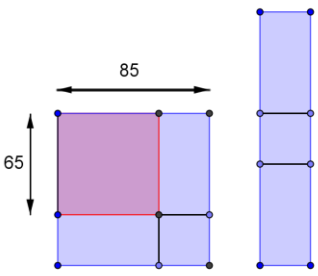
<p>P1. Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα</p>	<p><b>Βασικά θέματα</b></p>	<p><b>Δραστηριότητες</b></p>	<p><b>Εκπαιδευτικό υλικό</b></p>
<p>P2. Κατασκευάζουν ιστογράμματα</p> <p>P3. Αξιολογούν την αντιπροσωπευτικότητα ή μη ενός δείγματος</p> <p>P4. Συνδυάζουν γνωστές μεθόδους και εργαλεία για να σχεδιάσουν και να υλοποιήσουν μικρές στατιστικές έρευνες</p>	<p><b>Δεδομένα</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• συλλογή, αναπαράσταση, ερμηνεία δεδομένων</li> </ul> <p>(5 ώρες)</p>	<p>Οι μαθητές σχεδιάζουν και υλοποιούν μια στατιστική έρευνα</p>	<p>Μέρος του 4<sup>ου</sup> κεφαλαίου του βιβλίου: Μαθηματικά Β' Γυμνασίου (Βλάμος, Δρούτσας κλπ) με κατάλληλες τροποποιήσεις</p>
<p>P5. Προσδιορίζουν την μέση απόλυτη απόκλιση, για να περιγράψουν ποσοτικά την μεταβλητότητα των δεδομένων και να κάνουν συγκρίσεις δεδομένων</p>	<p><b>Μεταβλητότητα</b></p> <p>(3 ώρες)</p>	<p>(ενδεικτική δραστηριότητα ΣΔ1)</p>	
<p>P6. Διακρίνουν πότε δυο ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα ή όχι.</p> <p>P7. Διακρίνουν πότε δυο ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα ή όχι.</p>	<p><b>Πειράματα Τύχης - Δειγματικοί Χώροι</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ασυμβίβαστα ενδεχόμενα, ανεξάρτητα ενδεχόμενα</li> </ul> <p>(2 ώρες)</p>	<p>Οι μαθητές μέσα από παραδείγματα εξετάζουν (α) αν η πραγματοποίηση ενός ενδεχομένου αποκλείει την πραγματοποίηση ενός άλλου ενδεχομένου, (β) αν η πραγματοποίηση ενός ενδεχομένου επηρεάζει την</p>	

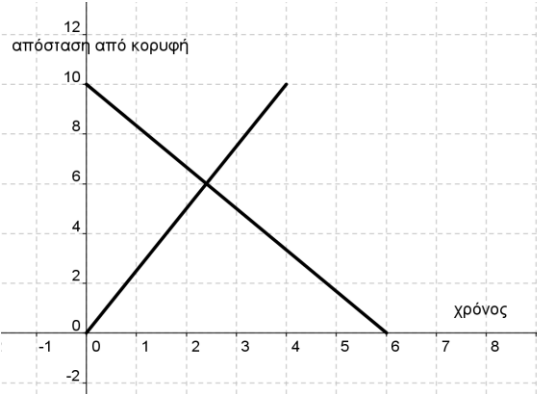
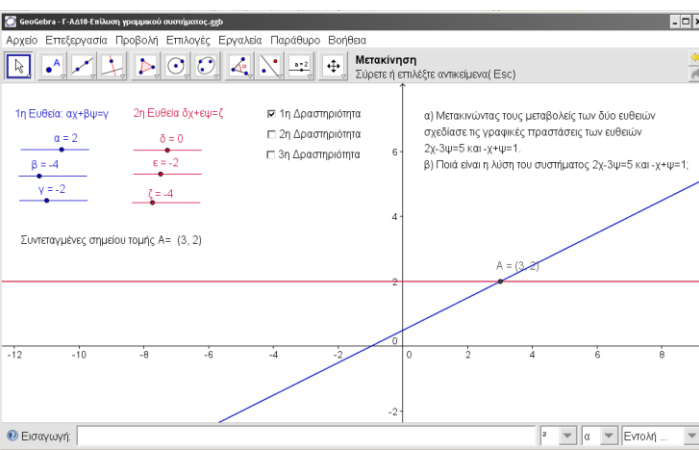


		πιθανότητα πραγματοποίησης ενός άλλου ενδεχομένου (π.χ. τα αποτελέσματα διαδοχικών ρίψεων ενός κέρματος).  Ενδεικτικές δραστηριότητες ΠΔ1, ΠΔ2.	
Π8. Απαριθμούν το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου με χρήση της Βασικής Αρχής Απαρίθμησης (BAA) και υπολογίζουν την αντίστοιχη πιθανότητα.	<b>Πιθανότητα Ενδεχομένου</b>  • <i>βασική Αρχή Απαρίθμησης και εφαρμογές της στις Πιθανότητες</i>  (4 ώρες)	Οι μαθητές μέσα από παραδείγματα υπολογίζουν το πλήθος των στοιχείων διαφόρων ενδεχομένων και τις αντίστοιχες πιθανότητες.  Ενδεικτικές δραστηριότητες ΠΔ3, ΠΔ4.	

**Ενδεικτικές δραστηριότητες**

Α/Α	Περιγραφή δραστηριότητας	ΠΜΑ										
ΑΔ1	<p>Με το Geogebra μεταβάλλουν δυναμικά το α στη συνάρτηση <math>y=ax^2</math> και παρατηρώντας τις αλλαγές στη γραφική παράσταση διερευνούν τις ιδιότητες της <math>y=ax^2</math>, το ρόλο του α και την μεταβολή του ψ, όταν το χ μεταβάλλεται μοναδιαία (αρχείο: <a href="#">Γ-ΑΔ1-Το α στην ψ=αχ<sup>2</sup></a>)</p>		Α2, Α3									
ΑΔ2	<p>Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων <math>y=4x-3</math> και <math>y=x^2</math>. Βρείτε τα σημεία τομής των δύο γραμμών πρώτα γραφικά και επαληθεύστε την απάντησή σας αλγεβρικά (με εξίσωση). Μπορείτε να κάνετε το ίδιο για τα ζευγάρια (β) <math>y=x-5</math> και <math>y=2x^2</math> (γ) <math>y=2x-1</math> και <math>y=x^2</math>;</p>	Α4, Α5										
ΑΔ3	<p>Η Μαρία υπολόγισε το γινόμενο <math>\sqrt{3} \cdot \sqrt{75}</math> και το βρήκε 15. Ο Γιάννης ισχυρίστηκε ότι δεν μπορεί το αποτέλεσμα να είναι ακέραιος. Πώς νομίζετε ότι οδηγήθηκε ο Γιάννης σε αυτό συμπέρασμα; Συμφωνείτε με το Γιάννη ή με τη Μαρία και γιατί;</p>	Α6										
ΑΔ4	<p>α) Ποια σχέση νομίζετε ότι έχουν οι παραστάσεις <math>(\alpha+\beta)^2</math> και <math>\alpha^2+\beta^2</math>; Είναι ίσες ή άνισες; Με ποιο τρόπο μπορείτε να το διαπιστώσετε;</p> <p>β) Χρησιμοποιήστε το διπλανό σχήμα, για να υπολογίσετε το <math>(\alpha+\beta)^2</math>.</p> <p>γ) Διερευνήστε αν μπορεί ποτέ να ισχύει ο ισχυρισμός που κάνατε στο πρώτο ερώτημα.</p>	<div style="text-align: center;"> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">α</td> <td style="text-align: center;">β</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">α</td> <td style="width: 40px; height: 40px;"></td> <td style="width: 40px; height: 40px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">β</td> <td style="width: 40px; height: 40px;"></td> <td style="width: 40px; height: 40px;"></td> </tr> </table> </div>		α	β	α			β			Α11
	α	β										
α												
β												
ΑΔ5	<p>Ο Ανδρέας πειραματίζεται με ζεύγη διψήφιων αριθμών. Ψάχνει τη διαφορά των τετραγώνων διάφορων τέτοιων αριθμών και συγκεντρώνει κάποια αποτελέσματα που του κίνησαν την περιέργεια:</p> <p>α) <math>55^2 - 45^2 = 1000</math>, <math>105^2 - 95^2 = 2000</math>, <math>85^2 - 65^2 = 3000</math></p> <p>Μπορείτε να βρείτε άλλα ζευγάρια που η διαφορά των τετραγώνων τους να είναι πολλαπλάσιο του 1000;</p>	Α11, Α12										

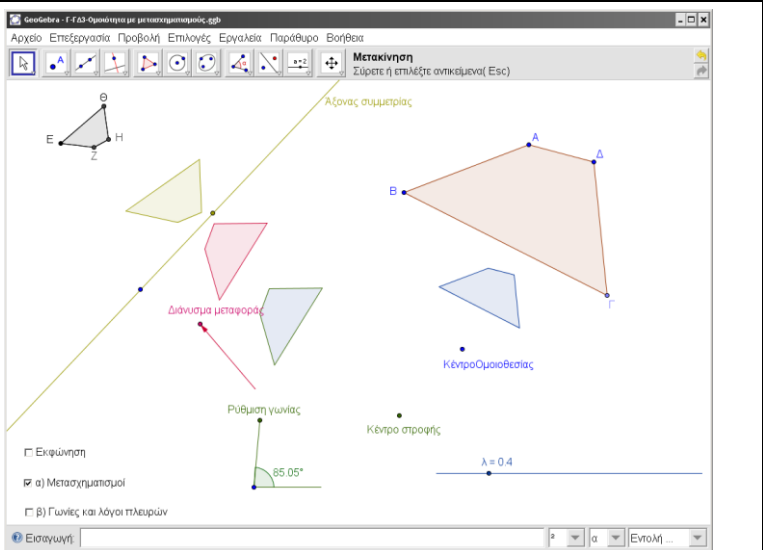
	<p>Μήπως παρατηρείτε κάτι ιδιαίτερο σε αυτά όλα αυτά τα ζευγάρια;</p> <p>β) Ο Ανδρέας με έκπληξη διαπίστωσε επίσης ότι:</p> $89^2 - 12^2 = 7777, \quad 78^2 - 23^2 = 5555$ <p>Μπορείτε να βρείτε άλλα ζευγάρια αριθμών που η διαφορά των τετραγώνων είναι αριθμός με επαναλαμβανόμενα ψηφία; Παρατηρείτε κάτι ιδιαίτερο σε αυτά τα ζευγάρια;</p> <p>γ) Θέλοντας να εξηγήσει τα εντυπωσιακά αποτελέσματα που παρατήρησε, ο Ανδρέας σχεδίασε μερικά διαγράμματα για να βοηθηθεί. Το διάγραμμα που σχεδίασε ,για να μελετήσει τη διαφορά <math>85^2 - 65^2</math>, φαίνεται στο διπλανό σχήμα.</p>  <p>Πώς συνδέεται το διάγραμμα του Ανδρέα με τον υπολογισμό της διαφοράς <math>85^2 - 65^2</math>;</p> <p>Πώς θα μπορούσε να υπολογιστεί η επιφάνεια του μακρόστενου μοβ ορθογωνίου (χωρίς τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης);</p> <p>Μπορείτε να σχεδιάσετε παρόμοια διαγράμματα για άλλους υπολογισμούς που έκανε ο Ανδρέας ή για υπολογισμούς που κάνατε εσείς;</p> <p>Πώς θα μπορούσαν αυτά τα διαγράμματα να βοηθήσουν τον Ανδρέα να αναπτύξει μία γρήγορη μέθοδο, για να υπολογίζει διαφορές τετραγώνων της μορφής <math>a^2 - b^2</math> για οποιαδήποτε <math>a</math> και <math>b</math>;</p>	
<p><b>AΔ6</b></p>	<p>α) Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς 60 και 225 και να βρείτε το ΕΚΠ τους.</p> <p>β) Με τον ίδιο τρόπο, να βρείτε το ΕΚΠ των μονωνύμων <math>6x^2y</math> και <math>9xy^3</math>, το ΕΚΠ των πολυωνύμων <math>x^2 - 1</math> και <math>x^2 + x</math></p>	<p><b>A16</b></p>
<p><b>AΔ7</b></p>	<p>Το εισιτήριο εισόδου σε ένα χιονοδρομικό κέντρο στοιχίζει €7 και συμπεριλαμβάνει την ενοικίαση του εξοπλισμού. Στην περίπτωση που ο επισκέπτης χρησιμοποιήσει δικό του εξοπλισμό, τότε το εισιτήριο εισόδου είναι €4. Αν το κόστος αγοράς του εξοπλισμού είναι €75, πόσες φορές θα πρέπει να επισκεφθεί το ίδιο άτομο το χιονοδρομικό κέντρο, ώστε να είναι συμφέρουσα η αγορά του εξοπλισμού;</p>	<p><b>A21, A22</b></p>
<p><b>AΔ8</b></p>	<p>Παρατηρήστε ότι <math>1^3=1</math>, δηλαδή ότι ο κύβος του 1 ισούται με το 1. Μπορείτε να βρείτε όλους τους αριθμούς που έχουν αυτή την ιδιότητα, δηλαδή ο κύβος του αριθμού να είναι ίσος με τον ίδιο τον αριθμό; Πόσοι τέτοιοι αριθμοί υπάρχουν;</p>	<p><b>A24, A25</b></p>

<p><b>ΑΔ9</b></p>	<p>Η Μαρία ξεκινάει το πρωί από τη βάση της κατασκήνωσης, για να ανέβει στην κορυφή του Ολύμπου, η οποία απέχει 10 χιλιόμετρα. Η Έλενα ξεκινάει την ίδια ώρα από την κορυφή, για να επιστρέψει στην κατασκήνωση από την ίδια διαδρομή. Τα γραφήματα που περιγράφουν την απόσταση κάθε ορειβάτισσας από την κορυφή του βουνού είναι σχεδιασμένα στο σχήμα. Ποια γραμμή αντιστοιχεί στη Μαρία και ποια στην Έλενα; Τι εκφράζει το σημείο τομής των δύο γραμμών; Σε πόση ώρα θα συναντήσει η Μαρία την Έλενα; Πώς μπορούμε να περιγράψουμε αλγεβρικά τη συνάντησή τους και να βρούμε την ώρα συνάντησης;</p> 	<p><b>A28, A29</b></p>
<p><b>ΑΔ10</b></p>	<p>Με το Geogebra μεταβάλλουν δυναμικά τους συντελεστές σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων και διερευνούν (α) πώς η μεταβολή των συντελεστών επηρεάζει την γραφική παράσταση κάθε γραμμικής εξίσωσης (β) τον αριθμό των λύσεων του συστήματος και (γ) τη σχέση των τιμών των συντελεστών με τις σχετικές θέσεις των δύο ευθειών και την γραφική επίλυση του συστήματος. (αρχείο: <a href="#">Γ-ΑΔ10-Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος</a>)</p> 	<p><b>A28, A29</b></p>
<p><b>ΑΔ11</b></p>	<p>Σε ένα πάρκινγκ υπάρχουν 20 θέσεις στάθμευσης οι οποίες είναι όλες κατειλημμένες. Σε κάποιες θέσεις έχουν σταθμεύσει μηχανές και σε κάποιες αυτοκίνητα. Μετρήσαμε τους τροχούς από τα αυτοκίνητα και τις μηχανές που ήταν σταθμευμένα στο πάρκινγκ και τους βρήκαμε 66. Πόσα αυτοκίνητα και πόσες μηχανές είναι σταθμευμένα στο πάρκινγκ;</p>	<p><b>A29</b></p>
<p><b>ΓΔ1</b></p>	<p>Οι μαθητές σχεδιάζουν σε σύστημα συντεταγμένων ένα γεωμετρικό σχήμα του οποίου δίνονται οι συντεταγμένες των κορυφών (x, y) [π.χ. το ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές (0, 0), (1,0), (0, 2)] και κατασκευάζουν διαδοχικά τα σχήματα που έχουν κορυφές τα σημεία: α) (x + 3, y + 4), β) (x, -y), γ) (-x, y), δ) (-x, -y) και ε) (-y, x).          Διαπιστώνουν ότι τα νέα σχήματα είναι αντίστοιχα η εικόνα του αρχικού ως προς: α) μεταφορά κατά ένα διάνυσμα μήκους 5, β) ανάκλαση ως προς τον άξονα x'x, γ) ανάκλαση ως προς τον άξονα y'y, δ) ανάκλαση με κέντρο την αρχή των αξόνων, ε) στροφή με κέντρο την αρχή των αξόνων και γωνία 90°.          Συζητούν τη σχέση των σχημάτων αυτών με το αρχικό και χρησιμοποιούν τις έννοιες της μεταφοράς, ανάκλασης και στροφής για να καταλήξουν σε ένα γενικό ορισμό ης ισότητας.</p>	<p><b>Γ1</b></p>
<p><b>ΓΔ2</b></p>	<p>Οι μαθητές χρησιμοποιούν το επιδιασκόπιο για να προβάλλουν σε μεγέθυνση διάφορα γεωμετρικά σχήματα από μια διαφάνεια σε μια οθόνη. Χρησιμοποιούν δύο διαφάνειες</p>	<p><b>Γ2, Γ3</b></p>

στις οποίες έχουν σχεδιαστεί δύο όμοια τρίγωνα, τοποθετούν τη διαφάνεια με το μικρότερο τρίγωνο στο επιδιασκόπιο και αναρτούν τη διαφάνεια με το μεγαλύτερο τρίγωνο στην οθόνη. Προβάλλουν το μικρό τρίγωνο στην οθόνη και αυξομειώνουν τη μεγέθυνσή του με ρυθμίσεις του προβολέα, μέχρις ότου η μεγέθυνση εφαρμόσει ακριβώς στο μεγαλύτερο τρίγωνο που έχει αναρτηθεί στην οθόνη. Επαναλαμβάνουν την ίδια διαδικασία με δύο διαφάνειες στις οποίες έχουν σχεδιαστεί ανάομοια τρίγωνα. Χρησιμοποιούν τις έννοιες της ομοιοθεσίας και της ισότητας, για να περιγράψουν την προηγούμενη διαδικασία και να καταλήξουν σε ένα γενικό ορισμό της ομοιότητας.

**ΓΔ3**

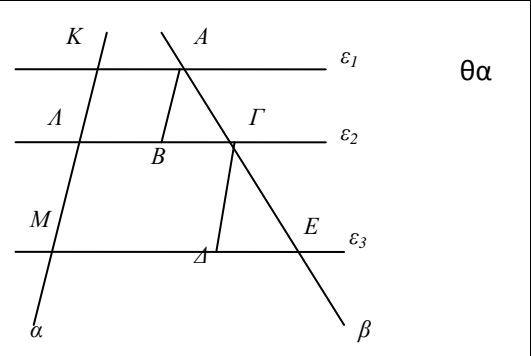
Με το Geogebra οι μαθητές ελέγχουν την ομοιότητα δύο σχημάτων με δύο τρόπους: (α) μέσω συνδυαστικών μετασχηματισμών (ομοιοθεσία, στροφή, μεταφορά, ανάκλαση) και (β) με χρήση του κριτηρίου ισότητας γωνιών και αναλογίας πλευρών. (αρχείο: [Γ-ΓΔ3-Ομοιότητα με μετασχηματισμούς](#))



**Γ2, Γ3**

**ΓΔ4**

Το επόμενο σχήμα χρησιμοποιείται στο πλαίσιο μιας δραστηριότητας, στην οποία αποδειχθεί το θεώρημα του Θαλή ως εφαρμογή των ομοίων τριγώνων.



**Γ2**

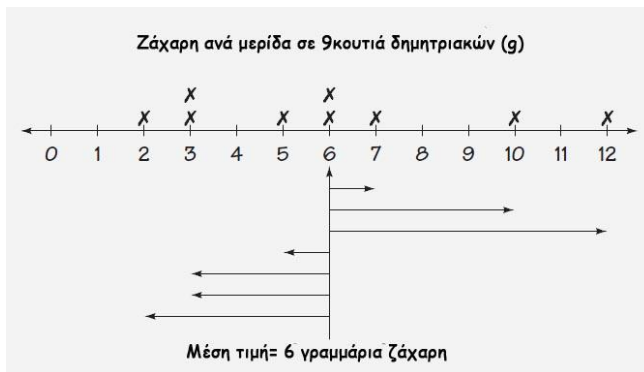
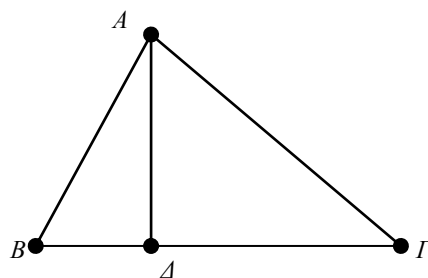
**ΓΔ5**

Με το Geogebra οι μαθητές μεταβάλλουν το λόγο ομοιοθεσίας δύο ορθογώνιων και εμπλέκονται σε δραστηριότητες συσχέτισης του συγκεκριμένου λόγου με το λόγο των περιμέτρων και το λόγο των εμβαδών των δύο ορθογώνιων (αρχείο: [Γ-ΓΔ5-Λόγος εμβαδών και περιμέτρων ομοιόθετων ορθογώνιων](#)).

	A	B
1	Λόγος ομοιοθεσίας	4.5
2		
3	Περίμετρος ΑΒΓΔ	6
4	Περίμετρος Α Β Γ Δ'	54
5		
6	Λόγος περιμέτρων	9
7		
8		
9		
10	Εμβαδόν ΑΒΓΔ	2
11	Εμβαδόν Α Β Γ Δ'	162
12		
13	Λόγος εμβαδών	81
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		

**Γ2, Γ4**

<p><b>ΓΔ6</b></p>	<p>Ένας μηχανικός, τα μάτια του οποίου βρίσκονται σε ύψος 1,8m από το έδαφος, χρησιμοποιεί την εξής διαδικασία, για να μετρήσει το ύψος μιας κατακόρυφης κεραίας: Τοποθετεί σε οριζόντια θέση στο έδαφος έναν καθρέπτη σε απόσταση 10 μέτρων από τη βάση της κεραίας. Στη συνέχεια μετακινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση και παρατηρεί ότι σε απόσταση 0,9m από τον καθρέπτη βλέπει μέσα σε αυτόν την κορυφή της κεραίας. Από τα στοιχεία αυτά υπολογίζει ότι το ύψος της κεραίας είναι 20m. Να κάνετε ένα σχεδιάγραμμα και να εξηγήσετε γιατί αυτή η διαδικασία δίνει σωστό αποτέλεσμα.</p>	<p><b>Γ5</b></p>
<p><b>ΜΔ1</b></p>	<p>Οι μαθητές χρησιμοποιούν τα αποτελέσματα ενός πραγματικού ή νοητικού πειράματος, στο οποίο κατασκευάζονται από το ίδιο υλικό ένα παραλληλεπίπεδο και ένα πρίσμα με ίσες βάσεις και ίσα ύψη και εν συνεχεία προσδιορίζεται η μάζα τους. Η γνώση της μάζας των στερεών και της πυκνότητας του υλικού επιτρέπει τον υπολογισμό των όγκων σύμφωνα με τον τύπο: πυκνότητα = μάζα : όγκος. Το πείραμα επαναλαμβάνεται με ένα πρίσμα και μια πυραμίδα που έχουν ίσες βάσεις και ίσα ύψη. Από τα αποτελέσματα προσδιορίζονται οι σχέσεις ανάμεσα στους όγκους του παραλληλεπιπέδου, του πρίσματος και της πυραμίδας.</p>	<p><b>Μ2</b></p>
<p><b>ΜΔ2</b></p>	<p>Οι μαθητές χρησιμοποιούν την Τριγωνομετρία και το Πυθαγόρειο θεώρημα για να προσδιορίσουν σχέσεις ανάμεσα στις πλευρές και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ενός οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ με ύψος ΑΔ. Οι σχέσεις αυτές διατυπώνονται στη μορφή γενικών προτάσεων (νόμοι ημιτόνων και συνημιτόνων) και εξετάζεται η δυνατότητα της επέκτασής τους σε αμβλυγώνια τρίγωνα.</p>	<p><b>Μ3, Μ5</b></p>
<p><b>ΣΔ1</b></p>	<p>Η Άννα έφτιαξε το διπλανό σημειόγραμμα που αφορά την ποσότητα ζάχαρης ανά μερίδα σε 9 κουτιά δημητριακών. Υπολόγισε τη μέση τιμή και βρήκε ότι είναι 6 γραμμάρια ζάχαρης και μετά δημιούργησε τα υπόλοιπα στοιχεία του διαγράμματος.</p> <p>α) Τι υποδηλώνουν τα βέλη που υπάρχουν εκατέρωθεν της γραμμής που δείχνει την θέση της μέσης τιμής;</p> <p>β) Υπολογίστε το μήκος του κάθε βέλους και το άθροισμα των μηκών για τα βέλη που δείχνουν προς τα δεξιά και ξεχωριστά το άθροισμα των μηκών για τα βέλη που δείχνουν αριστερά.</p> <p>γ) Τι σχέση έχουν τα δύο αθροίσματα; Γιατί νομίζετε ότι συμβαίνει αυτό; Εξηγήστε αν αυτό θα συμβαίνει πάντα ή όχι.</p> <p>δ) Πώς μπορούμε να αξιοποιήσουμε κάποια από τα παραπάνω, για να βρούμε τη μέση απόσταση που έχουν τα δεδομένα από την μέση τιμή;</p>	<p><b>Σ4</b></p>
<p><b>ΠΔ1</b></p>	<p>Ρίχνουμε δυο ζάρια και θεωρούμε τα ενδεχόμενα                  Α: να φέρουν άθροισμα 9</p>	<p><b>Π1</b></p>



	<p>B: τουλάχιστον ένα από τα δυο ζάρια να φέρει 1 ή 2</p> <p>Γ: τουλάχιστον ένα από τα δυο ζάρια να φέρει 5 ή 6</p> <p>Ρωτάμε τους μαθητές αν είναι δυνατό να πραγματοποιηθούν συγχρόνως δυο από τα παραπάνω ενδεχόμενα και ποια.</p>	
<b>ΠΔ2</b>	<p>Σε δυο κουτιά βάζουμε από τρεις ίσες κιμωλίες όχι όμως ακριβώς τα ίδια χρώματα στα δυο κουτιά π.χ. λευκή, μπλε, κόκκινη στο 1<sup>ο</sup> κουτί και λευκή, λευκή μπλε στο 2<sup>ο</sup> κουτί. Ρίχνουμε ένα κέρμα και με βάση το αποτέλεσμα διαλέγουμε κουτί. Κατόπιν διαλέγουμε μια κιμωλία από το κάθε κουτί και θεωρούμε τα ενδεχόμενα</p> <p>A: επιλέγω το 2<sup>ο</sup> κουτί</p> <p>B: επιλέγω λευκή κιμωλία</p> <p>Ρωτάμε τους μαθητές κατά πόσο η πραγματοποίηση ενός ενδεχομένου επηρεάζει ή όχι την πραγματοποίηση του άλλου ενδεχομένου;</p> <p>Στη συνέχεια θέτουμε το ίδιο πρόβλημα βάζοντας όμως στα κουτιά τις ίδιες ακριβώς κιμωλίες.</p>	<b>Π2</b>
<b>ΠΔ3</b>	<p>Δίνουμε στους μαθητές ένα μενού εστιατορίου με 3 ορεκτικά, 2 σαλάτες, 4 κύρια πιάτα και 2 γλυκά και ζητάμε κάθε μαθητής να δώσει διαφορετική παραγγελία από τους συμμαθητές του. Κατόπιν βρίσκουμε πόσες διαφορετικές παραγγελίες μπορούμε να κάνουμε με το συγκεκριμένο μενού. Στη συνέχεια στους υπολογισμούς μπορούμε να βάλουμε και περιορισμούς όπως να μην παραγγείλουμε μαζί το τάδε ορεκτικό με το τάδε κύριο πιάτο.</p>	<b>Π3</b>
<b>ΠΔ4</b>	<p>Δίνουμε στους μαθητές ένα ερωτηματολόγιο με 4 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, όπου σε κάθε ερώτηση υπάρχουν τρεις απαντήσεις, εκ των οποίων μόνο μια σωστή. Οι ερωτήσεις είναι τέτοιες, ώστε να αναγκαστούν οι μαθητές να τις απαντήσουν στην τύχη. Ζητάμε την πιθανότητα να απαντήσουν όλες τις ερωτήσεις σωστά καθώς και την πιθανότητα να τις απαντήσουν όλες λάθος.</p>	<b>Π3</b>

ΣΥΝΘΕΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ 3<sup>ου</sup> Κύκλου (Α' - Β' - Γ' Γυμνασίου)

## Πίνακας Περιεχομένων

A/A	Τίτλος	Θέμα	Τάξη	Εκπαιδευτικό υλικό
1	«Σχεδιάζοντας με τετράπλευρα»	Στο πλαίσιο της κατασκευής συνθέσεων με τετράπλευρα οι μαθητές κατασκευάζουν παραλληλόγραμμα, τα τρία είδη παραλληλογράμμου και τραπέζια. Χρησιμοποιούν το υπολογιστικό περιβάλλον Χελωνόκοσμος που συνδυάζει εργαλεία συμβολικής έκφρασης και δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών αντικειμένων.	Α' Γυμνασίου. Κάποιες φάσεις, με κατάλληλες τροποποιήσεις, μπορεί να εφαρμοστούν σε επόμενες τάξεις.	Αρχείο λογισμικού Χελωνόκοσμος: <a href="#">1 -Φάσεις 1-2</a> Φύλλο εργασίας σε doc: <a href="#">1- Φύλλο εργασίας</a>
2	«Η αιτιολόγηση του “κανόνα των προσήμων” από τους μαθηματικούς του 18ου αιώνα»	Οι μαθητές μελετούν ένα ιστορικό μαθηματικό κείμενο του 18ου αιώνα στο οποίο παρουσιάζονται δύο τρόποι αιτιολόγησης του “κανόνα των προσήμων”. Αναλύουν τους συγκεκριμένους τρόπους και θα τους συγκρίνουν με αντίστοιχους που υπάρχουν σε σύγχρονα διδακτικά βιβλία ή άλλες πηγές.	Α' Γυμνασίου	
3	«Αιολική ενέργεια - Κατασκευάζουμε έναν ανεμόμυλο;»	Στο πλαίσιο της κατασκευής μοντέλων ανεμόμυλων οι μαθητές μελετούν την κατασκευή παραλληλογράμμων μέσα από παραμετρικές διαδικασίες. Επίσης, διερευνούν τη σκοπιμότητα της χρήσης ανεμογεννητριών για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας μέσα από αντιπαράθεση απόψεων και μετά από τη μελέτη κατάλληλης βιβλιογραφίας και ενημερωτικού υλικού.	Α' Γυμνασίου Κάποιες φάσεις, με κατάλληλες τροποποιήσεις, μπορούν να εφαρμοστούν σε επόμενες τάξεις	Αρχεία λογισμικού Χελωνόκοσμος: <a href="#">3 -φάση 1</a> <a href="#">3-φάση 2</a> Φύλλο εργασίας σε doc: <a href="#">3- Φύλλο εργασίας</a>  Οδηγός Ανάπτυξης Διαθεματικών Δραστηριοτήτων Περιβαλλοντικής Εκπαίδευσης, Διδακτικά Πακέτα Γυμνασίου <a href="http://pi-schools.sch.gr/gymnasio/">http://pi-schools.sch.gr/gymnasio/</a>  Ιστότοπος της UNESCO για την Εκπαίδευση για την Αειφόρο Ανάπτυξη <a href="http://www.unesco.org/new/en/education/themes/leading-the-international-agenda/education-for-sustainable-development/publications/">http://www.unesco.org/new/en/education/themes/leading-the-international-agenda/education-for-sustainable-development/publications/</a>

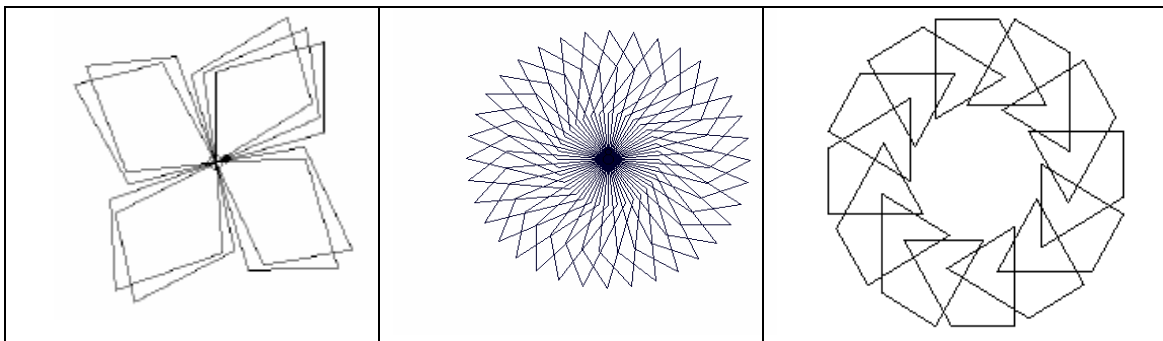


				<p>Ιστότοπος της Ευρωπαϊκής Ένωσης:  <a href="http://europa.eu/pol/ener/index_el.htm">http://europa.eu/pol/ener/index_el.htm</a></p> <p>Ευρωπαϊκός Οργανισμός Περιβάλλοντος  <a href="http://www.eea.europa.eu/themes/energy">http://www.eea.europa.eu/themes/energy</a></p> <p>Υπουργείο Περιβάλλοντος, Ενέργειας και Κλιματικής αλλαγής:  <a href="http://www.ypeka.gr/Default.aspx?tabid=225&amp;language=el-GR">http://www.ypeka.gr/Default.aspx?tabid=225&amp;language=el-GR</a></p> <p>Κέντρο Ανανεώσιμων Πηγών Ενέργειας:  <a href="http://www.cres.gr/kape/publications/download.htm">http://www.cres.gr/kape/publications/download.htm</a></p>
4	«Αιτιολόγηση (“αναζήτηση της αιτίας”) των γεωμετρικών προτάσεων στην αρχαία Ελλάδα»	Στους μαθητές δίνεται μια γεωμετρική πρόταση για τις εξωτερικές γωνίες του τριγώνου και θα ζητηθεί από αυτούς να εξετάσουν αν ισχύει πάντοτε ή όχι. Στη συνέχεια μελετούν ένα αρχαιοελληνικό μαθηματικό κείμενο (σε μετάφραση), στο οποίο παρουσιάζεται ένας τρόπος αιτιολόγησης της ίδιας γεωμετρικής πρότασης διαφορετικός από την τυπική Ευκλείδεια απόδειξη με βάση αξιώματα και προηγούμενες προτάσεις.	Α' Γυμνασίου	<p>Αρχείο Sketchpad:  <a href="#">4-΄ Παράδοξες ιδιότητες των γεωμετρικών προτάσεων</a></p>
5	«Αναζητώντας το λάθος του γραμμωτού κώδικα»	Μέσα από ένα πραγματικό πρόβλημα οι μαθητές μελετούν τις γραμμικές συναρτήσεις $\psi = \alpha x$ και $\psi = \alpha x + \beta$ , χρησιμοποιώντας το υπολογιστικό περιβάλλον Function Probe (FP) που διασυνδέει τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων (πίνακα τιμών, γραφική παράσταση και συμβολική έκφραση).	Β' Γυμνασίου	<p>Αρχεία Function Probe:  <a href="#">5-φάση 1-αρχικό</a>  <a href="#">5-φάση 1-τελικό</a>  <a href="#">5-φάση 2-ερ3-τελικό</a>  <a href="#">5-φάση 2-ερ6β-τελικό</a>  <a href="#">5-φάση 4-τελικό</a>  <a href="#">5- Φύλλο εργασίας</a></p>
6	«Αρνητικοί αριθμοί και εξισώσεις»	Οι μαθητές μελετούν ένα ιστορικό κείμενο στο οποίο ένας σπουδαίος μαθηματικός απορρίπτει τη χρήση των αρνητικών αριθμών όταν αυτοί	Β' Γυμνασίου	

		εμφανίζονται ως λύσεις εξισώσεων. Στη συνέχεια ασχολούνται με ένα πρόβλημα στο οποίο θα διαφανεί η σημασία των αρνητικών αριθμών για την επίλυση των εξισώσεων.		
7	«Παράδοξες» ιδιότητες των γεωμετρικών προτάσεων»	Στους μαθητές δίνεται προς επίλυση ένα γεωμετρικό πρόβλημα. Στη συνέχεια μελετούν ένα αρχαιοελληνικό μαθηματικό κείμενο (σε μετάφραση) στο οποίο τονίζεται ο παράδοξος χαρακτήρας της λύσης του συγκεκριμένου προβλήματος.	Β' Γυμνασίου	Αρχεία Sketchpad: <a href="#">7-“Παράδοξες” ιδιότητες των γεωμετρικών προτάσεων</a>
8	«Παγκόσμιο χωριό - Οι άνθρωποι και οι κοινωνίες πίσω από τους αριθμούς»	Στο πλαίσιο των στατιστικών ερευνών που κάνουν οι μαθητές, στο μάθημα των μαθηματικών, μελετούν ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα σε αυτούς και τους μαθητές άλλων χωρών, συλλέγουν δεδομένα από το διαδίκτυο και τα επεξεργάζονται χρησιμοποιώντας το υπολογιστικό περιβάλλον των λογιστικών φύλλων.	Β' Γυμνασίου. Η εργασία μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε τάξη.	
9	«Μελετώντας την κάτοψη ενός σπιτιού»	Με αφετηρία ένα πραγματικό πρόβλημα που σχετίζεται με το μετασχηματισμό της κάτοψης ενός σπιτιού οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της ομοιοθεσίας και της ομοιότητας γεωμετρικών σχημάτων. Διαπραγματεύονται τη σχέση του λόγου των περιμέτρων και του λόγου των εμβαδών ομοιόθετων γεωμετρικών σχημάτων με το λόγο ομοιότητας και θα διερευνήσουν το πρόβλημα του κόστους της οικοδομής σε σχέση με την περίμετρο και το εμβαδόν της.	Γ' Γυμνασίου	Αρχεία Geogebra: <a href="#">9-φάση 1-Ομοιόθετο σημείου</a> <a href="#">9-φάση 1-Ομοιόθετο τμήματος</a> <a href="#">9-φάση 1-Λόγος περιμέτρων-εμβαδών</a> <a href="#">9-φάση 2-Ομοιότητα</a> <a href="#">9-φάση 3</a>
10	«Ανακαλύπτοντας τη χρυσή αναλογία»	Χωρίζοντας ένα ευθύγραμμο τμήμα σε μέσο και άκρο λόγο, οι μαθητές ανακαλύπτουν τη χρυσή αναλογία και τον αριθμό φ. Τον υπολογίζουν προσεγγιστικά και διερευνούν συνεργατικά την εμφάνιση του λόγου φ στη φύση, στην αρχιτεκτονική και στις τέχνες.	Γ' Γυμνασίου	Αρχείο Geogebra: <a href="#">10- Ψάχνοντας για τη χρυσή αναλογία</a>

## ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 1 (Α' Γυμνασίου) «Σχεδιάζοντας με τετράπλευρα»

Ο καθηγητής των καλλιτεχνικών του σχολείου σας έχει αναθέσει να σχεδιάσετε δυναμικά σχέδια με δομικό λίθο τα τετράπλευρα. Σας πρότεινε να κατασκευάσετε τα σχέδια στο λογισμικό «Χελωνόκοσμος», ώστε να μπορείτε να τροποποιείτε το σχήμα τους και τον αριθμό των χρησιμοποιούμενων τετραπλεύρων (παραλληλογράμμων και τραπεζιών) όπως και να μπορείτε να τα κινείτε ώστε να φαίνονται περισσότερο εντυπωσιακά. Οι επόμενες διερευνήσεις θα βοηθήσουν την ομάδα σας να κάνει τέτοιες κατασκευές.



### Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

**1η φάση:** Οι μαθητές κατασκευάζουν τετράπλευρα χρησιμοποιώντας το δυναμικό χειρισμό μεταβλητών που αναπαριστούν τις γωνίες του. Στη συνέχεια κατασκευάζουν παραλληλόγραμμα με τρεις μεταβλητές αφού διερευνήσουν πόσες μεταβλητές για πλευρές και γωνίες είναι απολύτως απαραίτητες για να γράψουμε μια παραμετρική διαδικασία που θα κατασκευάζει παραλληλόγραμμα διαφορετικών τύπων και μεγεθών.

**2η φάση:** Οι μαθητές μετασχηματίζουν τετράπλευρα σε τραπέζια και παραλληλόγραμμα και στη συνέχεια σε ορθογώνια, ρόμβους και τετράγωνα. Διαπραγματεύονται τη σχέση των διάφορων μορφών τετραπλεύρου.

Για παράδειγμα, ζητείται από τους μαθητές να διορθώσουν παραμετρικές διαδικασίες ώστε να κατασκευάζουν διαφορετικά είδη παραλληλογράμμων και τραπεζιών διερευνώντας παράλληλα τις γεωμετρικές τους ιδιότητες.

**3η φάση:** Οι μαθητές χρησιμοποιούν τα υπολογιστικά εργαλεία για να κατασκευάσουν δυναμικές συνθέσεις σχεδίων βασισμένων σε διαφορετικά είδη τετραπλεύρων που θα μπορούν να χειριστούν δυναμικά με το μεταβολέα.

### Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Στην παραδοσιακή τάξη η διδασκαλία των διάφορων ειδών τετραπλεύρων γίνεται με στατικά μέσα αναπαράστασης και εμφανίζεται εντελώς αποκομμένη από έννοιες της άλγεβρας. Στο πλαίσιο αυτό οι μαθητές έχουν περιορισμένες δυνατότητες εμπλοκής τους σε διαδικασίες διερεύνησης των ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων και των τραπεζιών και των μεταξύ τους σχέσεων. Στην παρούσα εργασία και με τη βοήθεια του Χελωνόκοσμου οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα:

- να συνδέσουν διαφορετικές έννοιες και αναπαραστάσεις (π.χ. να συνδέσουν την κατασκευή ενός γεωμετρικού σχήματος με την έννοια της μεταβλητής),

- να πειραματιστούν με τις αλλαγές στις τιμές των μεταβλητών των πλευρών ή/και των γωνιών σε παραμετρικές διαδικασίες κατασκευής τεθλασμένων πολυγωνικών γραμμών και να διερευνήσουν τις προϋποθέσεις κατασκευής παραλληλογράμμων και τις ιδιότητές τους,
- να χρησιμοποιήσουν τις παραμετρικές διαδικασίες ως δομικό λίθο για να μοντελοποιήσουν την κατασκευή πολύπλοκων γεωμετρικών σχεδίων,
- να αναγνωρίσουν την αξία του γενικευμένου -χάρη στα μαθηματικά – εργαλείου ως του μηχανισμού μέσω του οποίου μπορεί να κατασκευάζουμε πολύπλοκες γεωμετρικές συνθέσεις.

Μέσω της χρήσης μεταβλητών προσφέρονται ευκαιρίες στους μαθητές να αναπτύξουν εικασίες, να διορθώσουν παραμετρικές διαδικασίες και να διαχειριστούν τα λάθη τους, να εξαγάγουν συμπεράσματα και να διατυπώσουν κανόνες για την κατασκευή παραλληλογράμμων και τραπεζίων. Αυτές ακριβώς οι δυνατότητες έχουν ιδιαίτερη διδακτική αξία αφού στην συνήθη διδακτική πρακτική αποτελούν την κατάληξη και όχι την αφετηρία της διερεύνησης των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων.

(Η κεντρική δομή της συνθετικής εργασίας προέρχεται από το σενάριο 1 του επιμορφωτικού υλικού για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης Β' επιπέδου για τη χρήση των ΤΠΕ στην εκπαιδευτική διαδικασία – ΥΠΔΒΜ, Πάτρα 2010).

## ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 2 (Α' Γυμνασίου)

### «Η αιτιολόγηση του “κανόνα των προσήμων” από τους μαθηματικούς του 18ου αιώνα»

**Nicholas Saunderson: The Elements of Algebra (1741)**

*Σχετικά με τον πολλαπλασιασμό αλγεβρικών ποσοτήτων.*

*Και πρώτα, πώς να βρίσκει κανείς το πρόσημο του γινομένου στον πολλαπλασιασμό, από εκείνα του πολλαπλασιαστή και του πολλαπλασιαστέου*

Πριν προχωρήσουμε στον πολλαπλασιασμό αλγεβρικών ποσοτήτων, να έχουμε υπόψη ότι, αν τα πρόσημα του πολλαπλασιαστή και του πολλαπλασιαστέου είναι ίδια, δηλαδή, και τα δυο θετικά, ή και τα δυο αρνητικά, το γινόμενο θα είναι θετικό, αλλιώς θα είναι αρνητικό: έτσι όταν το +4 πολλαπλασιάζεται με το +3, ή το -4 με το -3 προκύπτει σε κάθε περίπτωση +12. Αλλά όταν το -4 πολλαπλασιάζεται με το +3 ή το +4 με το -3 προκύπτει σε κάθε περίπτωση -12.

Αν ο αναγνώστης αναμένει μια απόδειξη αυτού του κανόνα, πρέπει αρχικά να του γνωστοποιήσουμε δύο πράγματα: πρώτον, λέμε ότι κάποιοι αριθμοί βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδος, όταν αυξάνονται ή μειώνονται με ίσες διαφορές, όπως οι 0, 2, 4, 6, ή 6, 4, 2, 0. Επίσης όπως οι 3, 0, -3 ή 4, 0, -4, ή 12, 0, -12 ή -12, 0, +12. Από εδώ έπεται ότι αριθμοί με τους οποίους μπορεί να σχηματιστεί μια αριθμητική πρόοδος είναι το λιγότερο τρεις, και ότι αν οι δύο πρώτοι από αυτούς είναι γνωστοί, τότε ο τρίτος μπορεί εύκολα να βρεθεί. Έτσι, αν οι δύο πρώτοι όροι είναι 4 και 2, ο επόμενος θα είναι το 0, αν οι δύο πρώτοι είναι 12 και 0, ο επόμενος θα είναι -12, αν οι δύο πρώτοι είναι -12 και 0, ο επόμενος θα είναι +12, κ.ο.κ.

Δεύτερον, αν ένα σύνολο αριθμών σε αριθμητική πρόοδος, όπως οι 3, 2 και 1, πολλαπλασιάζονται διαδοχικά με έναν κοινό πολλαπλασιαστή, όπως το 4, ή αν ένας μεμονωμένος αριθμός, όπως το 4 πολλαπλασιάζεται διαδοχικά με ένα σύνολο αριθμών σε αριθμητική πρόοδος, όπως οι 3, 2 και 1, τα γινόμενα 12, 8, και 4 θα βρίσκονται, σε κάθε περίπτωση, σε αριθμητική πρόοδος.

Με αυτό το δεδομένο (το οποίο μέχρι ενός σημείου είναι αυτονόητο), ο κανόνας που έχουμε να αποδείξουμε αναλύεται σε τέσσερις περιπτώσεις:

Πρώτον, ότι το +4 όταν πολλαπλασιάζεται με το +3 παράγει +12.

Δεύτερον, ότι το -4 όταν πολλαπλασιάζεται με το +3 παράγει -12.

Τρίτον, ότι το +4 όταν πολλαπλασιάζεται με το -3 παράγει -12.

Και τέλος, ότι το -4 όταν πολλαπλασιάζεται με το -3 παράγει +12. Αυτές οι περιπτώσεις γενικά εκφράζονται με συντομία ως εξής: πρώτον + επί + δίνει + · δεύτερον - επί + δίνει - · τρίτον + επί - δίνει - · τέταρτον - επί - δίνει +.

*Περίπτωση πρώτη.* Ότι το +4 όταν πολλαπλασιάζεται με το +3 παράγει +12, είναι αυτονόητο, και δεν χρειάζεται απόδειξη. Αν όμως ζητηθεί, θα μπορούσε να γίνει σύμφωνα με την πρώτη παράγραφο της τρίτης ενότητας· διότι ο πολλαπλασιασμός +4 επί +3 είναι το ίδιο με την πρόσθεση των 4 + 4 + 4 σε ένα άθροισμα· αλλά όταν τα 4 + 4 + 4 προστίθενται σε ένα άθροισμα δίνουν +12, επομένως όταν το +4 πολλαπλασιάζεται με το +3, δίνει +12.

*Περίπτωση δεύτερη.* Και από τη δεύτερη παράγραφο της τρίτης ενότητας θα μπορούσε με τον ίδιο τρόπο να αποδειχθεί, ότι το -4 όταν πολλαπλασιάζεται με το +3 παράγει -

12. Όμως θα το αποδείξω εδώ με άλλο τρόπο, ως εξής: πολλαπλασιάζω τους όρους της αριθμητικής προόδου 4, 0, -4 με το +3, και τα γινόμενα θα βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδο, όπως αναφέρθηκε παραπάνω· αλλά τα δύο πρώτα γινόμενα είναι 12 και 0, επομένως το τρίτο θα είναι -12. Άρα το -4 όταν πολλαπλασιάζεται με το +3 παράγει -12.

*Περίπτωση τρίτη.* Να αποδειχθεί ότι το +4 όταν πολλαπλασιάζεται με το -3 παράγει -12. Πολλαπλασιάζω το +4 με τους +3, 0 και -3 διαδοχικά και τα γινόμενα θα βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδο· αλλά τα δύο πρώτα είναι 12 και 0, επομένως το τρίτο θα είναι -12. Άρα +4 όταν πολλαπλασιάζεται με το -3 παράγει -12.

*Περίπτωση τέταρτη.* Τέλος, για να αποδειχθεί ότι το -4 όταν πολλαπλασιάζεται με το -3 παράγει +12, πολλαπλασιάζω το -4 με τους 3, 0 και -3 διαδοχικά και τα γινόμενα θα βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδο· αλλά τα δύο πρώτα γινόμενα είναι -12 και 0, σύμφωνα με την δεύτερη περίπτωση. Επομένως το τρίτο γινόμενο θα είναι +12. Άρα το -4 όταν πολλαπλασιάζεται με το -3 παράγει +12.

Αυτές οι 4 περιπτώσεις μπορούν επίσης να αποδειχθούν πιο σύντομα ως εξής: το +4 όταν πολλαπλασιάζεται με το +3 παράγει +12· επομένως το -4 με το +3, ή το +4 με το -3 οφείλουν να παράγουν κάτι αντίθετο προς το +12, δηλαδή το -12. Αλλά όταν το -4 πολλαπλασιαζόμενο με το +3 παράγει -12, τότε το -4 πολλαπλασιαζόμενο με το -3 οφείλει να παράγει κάτι αντίθετο προς το -12, δηλαδή το +12· ώστε αυτή η τελευταία περίπτωση, που φοβίζει τόσο πολύ τους αρχάριους, εμφανίζεται να μη είναι τίποτε περισσότερο από μια κοινή αρχή της Γραμματικής, δηλαδή, ότι δυο αρνήσεις κάνουν μια κατάφαση· οποία αναμφίβολα αληθεύει στη Γραμματική, αν και ενδεχομένως δεν παρατηρείται πάντοτε στις γλώσσες.

### **Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής**

**1η φάση:** Οι μαθητές μελετούν το ιστορικό κείμενο, κάνουν συνοπτική περιγραφή και συγκρίνουν τους δύο τρόπους αιτιολόγησης του “κανόνα των προσήμων”. Στη συνέχεια εντοπίζουν μια άλλη αιτιολόγηση του κανόνα σε σύγχρονες πηγές (διδασκτικά βιβλία, εγκυκλοπαίδειες, διαδίκτυο) και κάνουν συνοπτική περιγραφή της.

**2η φάση:** Οι μαθητές παρουσιάζουν στην τάξη τα αποτελέσματα της εργασίας τους, ανταλλάσσουν ιδέες και καταλήγουν σε ορισμένα συμπεράσματα σχετικά με το νόημα της αιτιολόγησης των πράξεων των ακεραίων αριθμών.

### **Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα**

Παρά το γεγονός ότι έχει ηλικία 270 ετών, η πρώτη αιτιολόγηση του “κανόνα των προσήμων” που υπάρχει στο ιστορικό κείμενο διαθέτει δύο πολύ σύγχρονα διδακτικά και μαθηματικά χαρακτηριστικά:

- α) Αξιοποιεί την έννοια του “μοτίβου” στη μορφή της αριθμητικής προόδου.
- β) Χρησιμοποιεί ως “αξίωμα” την ιδιότητα του συγκεκριμένου “μοτίβου” να παραμένει αναλλοίωτο στον πολλαπλασιασμό (μια σύμβαση που δεν διαφέρει ουσιωδώς από τη σύγχρονη αξιωματική παραδοχή ότι η επιμεριστική ιδιότητα ισχύει  $a \cdot \text{r}i\text{g}i\text{t}\text{i}$  και για τους αρνητικούς αριθμούς).

Η δραστηριότητα δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να εκτιμήσουν ορισμένα διαχρονικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας, όπως είναι η έννοια της απόδειξης, και να διαπιστώσουν ότι στην αποδεικτική διαδικασία παίζουν θεμελιώδη ρόλο ορισμένες παραδοχές στη μορφή περισσότερο ή λιγότερο φανερών αξιωμάτων.

**Σχόλιο:** Μεγάλο ενδιαφέρον ως θέμα συμπληρωματικής εργασίας παρουσιάζει επίσης η βιογραφία του συγγραφέα Nicholas Saunderson και ο τρόπος που διδάχθηκε Μαθηματικά (A.M.E.A. και Lucasian Professor of Mathematics στο Πανεπιστήμιο του Cambridge).

### ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 3 (Α' Γυμνασίου) «Αιολική ενέργεια - Κατασκευάζουμε έναν ανεμόμυλο;»

Ο ανεμόμυλος είναι μια μηχανή που αξιοποιεί την αιολική ενέργεια. Αρχικά χρησιμοποιήθηκε για την άλεση δημητριακών και την άντληση νερού ενώ στη συνέχεια κατασκευάστηκαν οι ανεμογεννήτριες για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας.



Ο καθηγητής τεχνολογίας του σχολείου σας έχει αναθέσει να σχεδιάσετε ένα σχέδιο για να κατασκευάσετε στη συνέχεια ένα μοντέλο ανεμόμυλου του οποίου τα πτερύγια θα έχουν σχήμα παραλληλογράμμου. Σας πρότεινε να κατασκευάσετε το σχέδιο του ανεμόμυλου στο λογισμικό «Χελωνόκοσμος», ώστε να μπορείτε να τροποποιείτε το σχήμα και τον αριθμό των πτερυγίων. Οι επόμενες διερευνήσεις θα βοηθήσουν την ομάδα σας να κάνει αυτή την κατασκευή και παράλληλα να μελετήσει τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της χρήσης ανεμογεννητριών και τα πιθανά οφέλη μιας περιοχής από την ανάπτυξη της χρήσης της αιολικής ενέργειας. Αφού ερευνήσετε τη βιβλιογραφία και το κατάλληλο ενημερωτικό υλικό που θα σας υποδείξει ο υπεύθυνος καθηγητής, οργανώστε μια αντιπαράθεση απόψεων σχετικά με την εγκατάσταση ή μη ανεμογεννητριών στην περιοχή σας. Τεκμηριώστε με επιχειρήματα τις απόψεις σας και προσπαθείτε να φθάσετε σε μία κοινά αποδεκτή λύση.

#### **Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής**

**1<sup>η</sup> φάση:** Οι μαθητές κατασκευάζουν παραλληλόγραμμα χρησιμοποιώντας το δυναμικό χειρισμό μεταβλητών που αναπαριστούν τις γωνίες του. Στη συνέχεια κατασκευάζουν παραλληλόγραμμα με τρεις μεταβλητές.

**2<sup>η</sup> φάση:** Οι μαθητές χρησιμοποιούν τα υπολογιστικά εργαλεία για να περιστρέψουν παραλληλόγραμμα και να κατασκευάσουν διαφορετικά μοντέλα ανεμόμυλων. Παράλληλα, στο πλαίσιο αυτό οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της στροφής ενός σχήματος και στην κεντρική συμμετρία.

**3<sup>η</sup> φάση:** Οι μαθητές χωρισμένοι σε δύο ομάδες αντιπαράτιθενται σχετικά με την εγκατάσταση ανεμογεννητριών στην περιοχή τους και με επιχειρήματα τεκμηριώνουν και καταγράφουν τις απόψεις τους. Επιδίωξη είναι η εξεύρεση μίας κοινά αποδεκτής λύσης.

Για παράδειγμα, η πρώτη ομάδα υποστηρίζει την άποψη ότι η χρήση ανεμογεννητριών συμβάλλει στη μείωση της έντασης του φαινομένου του θερμοκηπίου, ως ανανεώσιμη πηγή παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, ενώ παράλληλα προσφέρει ευκαιρίες ανάπτυξης στην περιοχή. Η δεύτερη ομάδα υποστηρίζει ότι η χρήση ανεμογεννητριών έχει μειονεκτήματα, όπως επιπτώσεις στο τοπικό περιβάλλον, μικρή ισχύς, μείωση της αξίας της γης στην περιοχή.



**Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα****Μαθηματικά**

Στην παραδοσιακή τάξη η διδασκαλία των παραλληλογράμμων γίνεται με στατικά μέσα αναπαράστασης κι έτσι οι μαθητές έχουν περιορισμένες δυνατότητες εμπλοκής τους σε διαδικασίες διερεύνησης των ιδιοτήτων τους. Στην παρούσα εργασία και με τη βοήθεια των εργαλείων του Χελωνόκοσμου οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα:

- να συνδέσουν διαφορετικές έννοιες και αναπαραστάσεις (π.χ. να συνδέσουν την κατασκευή ενός γεωμετρικού σχήματος με την έννοια της μεταβλητής),
- να πειραματιστούν με τις αλλαγές στις τιμές των μεταβλητών των πλευρών ή/και των γωνιών σε παραμετρικές διαδικασίες κατασκευής τεθλασμένων πολυγωνικών γραμμών και να διερευνήσουν τις προϋποθέσεις κατασκευής παραλληλογράμμων και τις ιδιότητές τους,
- να χρησιμοποιήσουν τις παραμετρικές διαδικασίες ως δομικό λίθο για να μοντελοποιήσουν την κατασκευή αντικειμένων του πραγματικού κόσμου.

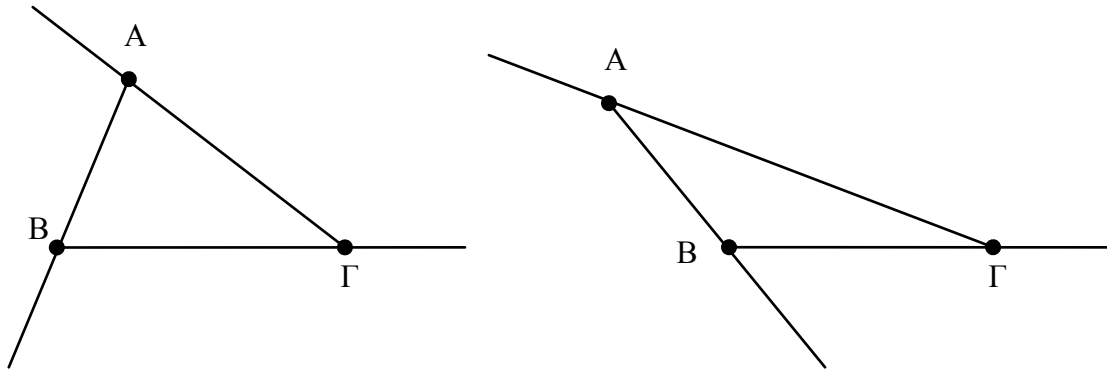
**Περιβάλλον και Εκπαίδευση για την Αειφόρο Ανάπτυξη**

Με την αντιπαράθεση απόψεων σχετικά με την εγκατάσταση ανεμογεννητριών σε μία περιοχή, για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας από ανανεώσιμες πηγές, οι μαθητές μπορούν:

- να διακρίνουν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της χρήσης ανεμογεννητριών στο τοπικό περιβάλλον και την αειφόρο ανάπτυξη μίας περιοχής,
- να αξιοποιήσουν και να ερμηνεύσουν βιβλιογραφικά δεδομένα και στοιχεία σχετικά με την παραγωγή ενέργειας από ανεμογεννήτριες,
- να διατυπώσουν επιχειρήματα και τεκμηριωμένες απόψεις.

### ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 4 (Α' Γυμνασίου) «Αιτιολόγηση (“αναζήτηση της αιτίας”) των γεωμετρικών προτάσεων στην αρχαία Ελλάδα»

Είναι κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου μεγαλύτερη από τις εσωτερικές γωνίες;  
Στα δύο παρακάτω σχήματα έχουμε σχεδιάσει ένα οξυγώνιο και ένα αμβλυγώνιο  
τρίγωνο ΑΒΓ και έχουμε σχηματίσει τις εξωτερικές γωνίες του.



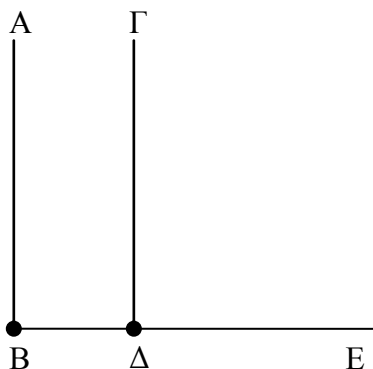
Κάποιος ισχυρίζεται ότι: Σε κάθε τρίγωνο, μια εξωτερική γωνία είναι πάντοτε μεγαλύτερη από όλες τις εσωτερικές γωνίες.

Ένας άλλος ισχυρίζεται ότι: Σε κάθε τρίγωνο, μια εξωτερική γωνία είναι πάντοτε μεγαλύτερη από δύο εσωτερικές γωνίες.

Να εξετάσετε αν αυτοί οι ισχυρισμοί είναι σωστοί. Αν δεν είναι, να τους συμπληρώσετε ή να τους τροποποιήσετε έτσι ώστε να είναι σωστοί.

**Ένα απόσπασμα από το έργο του Πρόκλου  
Σχόλια στο α' βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη**

Σε κάθε τρίγωνο, αν προεκταθεί μια από τις πλευρές, η εξωτερική γωνία είναι μεγαλύτερη από οποιαδήποτε εσωτερική και απέναντι γωνία.



Θεωρούμε δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ τα οποία τέμνει μια ευθεία ΒΕ έτσι ώστε οι γωνίες ΑΒΔ και ΓΔΕ να είναι ίσες. Τότε τα τμήματα ΑΒ, ΓΔ είναι παράλληλα.

Αν το ΑΒ παραμένει ακίνητο και θεωρήσουμε ότι το ΓΔ στρέφεται προς το ΑΒ για να συναντηθούν, τότε η γωνία ΓΔΕ θα μεγαλώνει διότι όσο πλησιάζει το ΓΔ προς το ΑΒ, τόσο απομακρύνεται από το ΔΕ. Και αν παραμένει ακίνητο το ΓΔ και θεωρήσουμε ότι το ΑΒ στρέφεται προς το ΓΔ για να συναντηθούν, τότε η γωνία ΑΒΔ θα μικραίνει διότι το ΑΒ καθώς στρέφεται προς το ΓΔ στρέφεται και προς το ΒΔ. Και αν θεωρήσουμε ότι

στρέφονται και τα δύο, το ένα προς το άλλο, θα διαπιστώσουμε ότι το μεν ΑΒ πλησιάζοντας προς το ΒΔ μικραίνει τη γωνία, ενώ το ΓΔ καθώς στρέφεται προς το ΑΒ απομακρύνεται από το ΔΕ και έτσι μεγαλώνει τη γωνία ΓΔΕ.

Αναγκαστικά λοιπόν, αν συναντηθούν οι AB, ΓΔ και σχηματιστεί ένα τρίγωνο, η εξωτερική γωνία θα είναι μεγαλύτερη από την απέναντι εσωτερική. Διότι όταν η εσωτερική παραμένει η ίδια, η εξωτερική αυξάνεται και όταν η εξωτερική παραμένει η ίδια, η εσωτερική μειώνεται. Ή όταν και οι δυο μεταβάλλονται, η εσωτερική μειώνεται και η εξωτερική αυξάνεται. Αιτία αυτών των αλλαγών είναι η κίνηση των ευθυγράμμων τμημάτων, το μεν ένα πλησιάζοντας προς την πλευρά που σχηματίζει την εσωτερική γωνία, το δε άλλο απομακρυνόμενο από την πλευρά που σχηματίζει την εξωτερική γωνία. Από αυτό μπορείς να συμπεράνεις πώς οι κατασκευές των πραγμάτων φέρνουν μπροστά στα μάτια μας τις αληθινές αιτίες των ζητούμενων.

### **Ερωτήσεις**

- 1) Το κείμενο αυτό ενισχύει ή όχι το συμπέρασμα στο οποίο καταλήξατε σχετικά με τις εξωτερικές γωνίες του τριγώνου;
- 2) Πώς συγκρίνετε τον τρόπο που χρησιμοποιήσατε για να καταλήξετε στο δικό σας συμπέρασμα με τον τρόπο αιτιολόγησης που χρησιμοποιεί ο συγγραφέας του κειμένου;

### **Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής**

**1η φάση:** Οι μαθητές διερευνούν τη γεωμετρική πρόταση και χρησιμοποιούν διάφορα μέσα (σχεδίαση, μετρήσεις, υπολογισμούς κ.λ.π.) για να διατυπώσουν την άποψή τους και να την υποστηρίξουν με επιχειρήματα. Στη συνέχεια μελετούν το ιστορικό κείμενο και απαντούν στα ερωτήματα που το συνοδεύουν.

**2η φάση:** Οι μαθητές παρουσιάζουν στην τάξη τα αποτελέσματα της εργασίας τους, συγκρίνουν διαφορετικούς τρόπους επαλήθευσης, ανταλλάσσουν ιδέες και καταλήγουν σε ορισμένα συμπεράσματα σχετικά με το νόημα και τα μέσα αιτιολόγησης των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων.

### **Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα**

Το ιστορικό κείμενο δίνει ένα παράδειγμα της μεθόδου αιτιολόγησης που οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί ονόμαζαν “απόδειξη από αιτία” και τη διαχώριζαν από την Ευκλείδεια αποδεικτική μέθοδο που ονόμαζαν “απόδειξη από τεκμήριο”.

Η δραστηριότητα δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να γνωρίσουν μια πρωταρχική μέθοδο “αιτιολόγησης” που έχει τα χαρακτηριστικά του νοητικού πειράματος, να εκτιμήσουν τη σημασία της κίνησης των γεωμετρικών σχημάτων και να διαπιστώσουν ότι η επαλήθευση των ιδιοτήτων μπορεί να γίνει με διαδικασίες που δεν χρησιμοποιούν όργανα σχεδίασης ή μετρήσεων.

## ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 5 (Β' Γυμνασίου)

### «Αναζητώντας το λάθος του γραμμωτού κώδικα»

Ένας ελεγκτής πωλήσεων σε ένα πολυκατάστημα τροφίμων, δέχεται διαμαρτυρίες πελατών για υπερτιμολογήσεις προϊόντων που αγοράζουν από το τμήμα οπωροκηπευτικών. Εκεί τα προϊόντα συσκευάζονται, ζυγίζονται και τιμολογούνται με το σύστημα του γραμμωτού κώδικα (barcode) από μια συγκεκριμένη ζυγαριά. Ο υπάλληλος τοποθετεί την ετικέτα με το γραμμωτό κώδικα που εκτυπώνει η ζυγαριά και ακολούθως διαβάζεται από το σύστημα ανάγνωσης του ταμείου. Θέλει να ελέγξει αν η ζυγαριά δίνει λάθος τιμές. Έχει ενημερώσει τον πωλητή που ζυγίζει και τιμολογεί τα προϊόντα, να καταγράφει την ποσότητα  $x$  (σε κιλά) και δίπλα το ποσό με το οποίο τιμολογήθηκε το προϊόν. Ο πωλητής παρέδωσε στον

x Βάρος (σε Kg)	y συνολική τιμή (σε ευρώ)	a=y/x τιμή μονάδος
1.2	2.76	2.3
3.1	4.34	1.4
5.1	3.57	0.7
7.1	4.97	0.7
3.8	8.74	2.3
5.9	4.13	0.7
6	8.4	1.4
9.5	21.85	2.3
4.5	3.15	0.7
2.3	3.22	1.4
0.9	0.63	0.7
4.7	6.58	1.4
8.6	19.78	2.3
9	6.3	0.7
7.5	17.25	2.3
2.5	3.5	1.4
3.2	7.36	2.3
5.2	7.28	1.4
4	3.28	0.82
5.5	12.65	2.3
1.4	4.48	3.2
4.6	10.58	2.3
7.4	5.18	0.7
2.3	3.22	1.4
3.3	10.56	3.2
4.2	13.44	3.2
1.9	6.08	3.2
2.7	3.78	1.4
5.1	16.32	3.2
6.2	4.34	0.7

ελεγκτή έναν πίνακα από τριάντα πωλήσεις που αφορούσαν 4 προϊόντα. Ο ελεγκτής, με βάση τον πίνακα αυτό, θα ελέγξει αν υπήρξαν λάθη τιμολόγησης σε κάποιο προϊόν. Στη δραστηριότητα αυτή, εκτός από το αποτέλεσμα, έχει σημασία και ο χρόνος υλοποίησης ο οποίος θα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί με την βοήθεια των υπολογιστικών εργαλείων που διαθέτουν.

#### Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

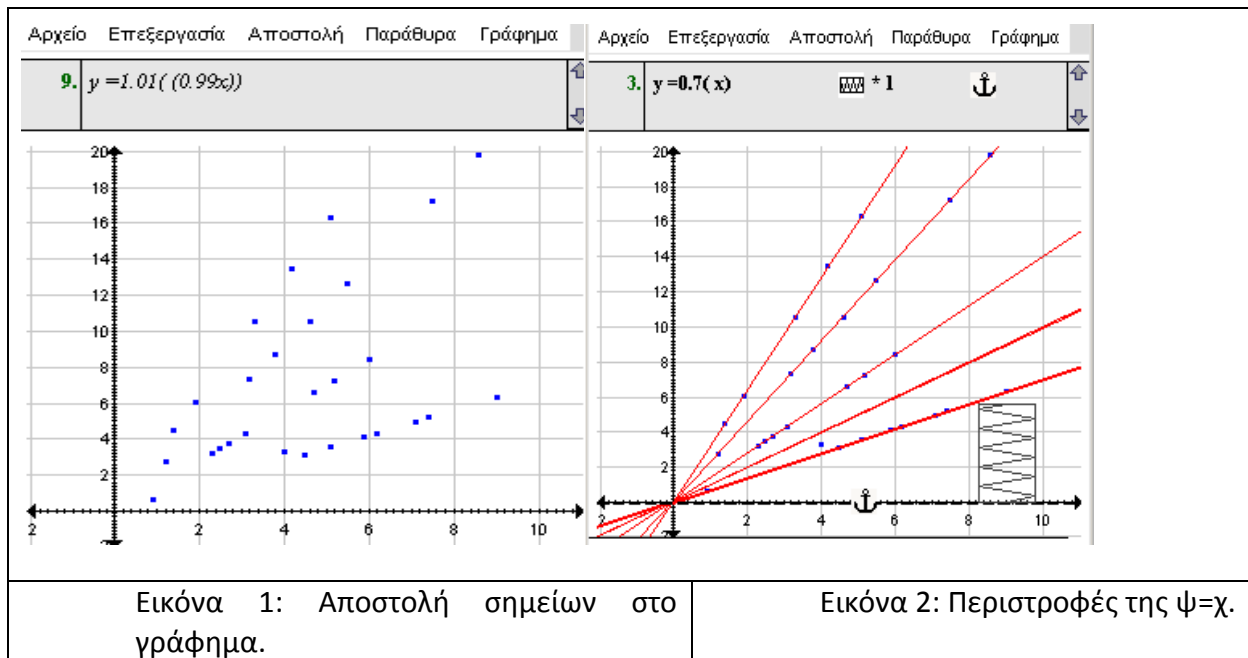
##### 1η φάση

Οι μαθητές μέσα από τη διερεύνηση του παραπάνω προβλήματος θα απεικονίσουν σε πίνακα τιμών και σε σύστημα ημιαξόνων σχέσεις αναλογίας. Στη συνέχεια θα εμπλακούν με τη σύνδεση της συγκεκριμένης αναπαράστασης με τη γραφική παράσταση της  $\psi = ax$ , την κλίση της αντίστοιχης ευθείας και το συντελεστή αναλογίας.

#### Παραδείγματα δραστηριοτήτων

1) Στέλνουμε τα ζεύγη βάρους και τιμές στο γράφημα. Μπορούμε να χωρίσουμε τα σημεία σε ομάδες; Αν ναι, με ποιο κριτήριο;

2) Μπορούμε να εκφράσουμε με σχέσεις αναλογίας αυτές τις ομάδες σημείων; Θα βοηθήσει η κατασκευή της  $\psi = x$  που μπορεί να περιστραφεί με το εργαλείο κατακόρυφου ελαστικού χειρισμού του Function Probe (FP). Υπάρχει κάποια σχέση αναλογίας; Αν ναι, να γραφεί ο τύπος της και να εξεταστεί αν εμφανίζεται ο συντελεστής αναλογίας σε στοιχεία του πίνακα τιμών; Αν ναι, τι ακριβώς εκφράζει;



3) Σε πόσες περιπτώσεις έγινε υπερτιμολόγηση και σε ποιο/α είδος/η; Ποιά/ες θα έπρεπε να είναι η/οι κανονική/ες τιμή; Γνωρίζουμε ότι οι τιμές ανά κιλό αυτών των προϊόντων είναι πολλαπλάσιες του δεκαλέπτου του ευρώ.

4) Η κάθε ομάδα επιλέγει μία από τις τέσσερις ευθείες. Προσαρμόζουμε το εργαλείο μεταβολής στη γραφική παράσταση της ευθείας. Δημιουργείται ένα τρίγωνο στο οποίο το λογισμικό μας δίνει την κλίση αυτής της ευθείας (ως πηλίκο της διαφοράς των τεταγμένων προς τη διαφορά των τεταγμένων). Με τι ισούται αυτό το πηλίκο; Παρουσιάζει η κάθε ομάδα τα συμπεράσματά της στην ολομέλεια της τάξης.

5) Ο ελεγκτής πωλήσεων αντικατέστησε την ελαττωματική ζυγαριά αλλά θέλει επιπλέον να φτιάξει έναν πίνακα για τον υπάλληλο που ζυγίζει τα προϊόντα, με σκοπό να ελέγχει για λίγες ημέρες μετά την αντικατάσταση, τις τιμές που εκτυπώνει η ζυγαριά. Ο πίνακας αυτός θα έχει στην πρώτη στήλη το βάρος των προϊόντων από 0 έως 10 Kg με βήμα 0,1 Kg και στις υπόλοιπες 4 στήλες θα έχει την αντίστοιχη τιμή του κάθε προϊόντος. Η κάθε ομάδα να κατασκευάσει την πρώτη στήλη του πίνακα και τη στήλη με τις τιμές για το προϊόν που ασχολήθηκε στην επόμενη ερώτηση. Πως μπορούμε να ελέγξουμε την ορθότητα του πίνακα από τη γραφική παράσταση;

## 2η φάση

Οι μαθητές θα εισαχθούν στην έννοια της γραμμικής συνάρτησης  $\psi = \alpha\chi$  εκτός πλαισίου συγκεκριμένου προβλήματος και θα διερευνήσουν τη γραφική της παράσταση, την κλίση της και τη σχέση της με τα τεταρτημόρια στα οποία βρίσκεται η γραφική παράσταση. Ακολούθως, θα γίνει εισαγωγή στη συνάρτηση  $\psi = \alpha\chi + \beta$  ως παράλληλη μεταφορά της  $\psi = \alpha\chi$  μέσα από την επέκταση του αρχικού προβλήματος που δόθηκε στους μαθητές και θα μελετηθεί ο ρόλος των παραμέτρων  $\alpha$  και  $\beta$ .

## Παραδείγματα δραστηριοτήτων

- 1) Δύο ποσά  $\chi$  και  $\psi$  είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας 2. Αν  $\psi/\chi = 2$ , τότε  $\psi = \underline{\hspace{2cm}}$ . Αυτή η σχέση, είναι συνάρτηση του  $\psi$  ως προς  $\chi$ ; Αν  $\psi/\chi = \alpha$ , τότε  $\psi = \underline{\hspace{2cm}}$ . Αυτή η σχέση, είναι συνάρτηση του  $\psi$  ως προς  $\chi$ ; Τι συμβαίνει όταν  $\alpha = 0$ ;

2) Κάθε ομάδα δίνει 5 συναρτήσεις της μορφής  $\psi = \alpha\chi$  στη ομάδα που έχει στα δεξιά της και παίρνει αντίστοιχα 5 συναρτήσεις από την ομάδα που έχει στα αριστερά της. Η κάθε ομάδα κατασκευάζει τις γραφικές παραστάσεις αυτών των συναρτήσεων. Υπάρχει κάποιο σημείο του καρτεσιανού επιπέδου από το οποίο διέρχεται η γραφική παράσταση της  $\psi = \alpha\chi$  ανεξάρτητα από την τιμή του  $\alpha$ ; Αιτιολογούμε την άποψή μας.

3) Τον αριθμό  $\alpha$  στην  $\psi = \alpha\chi$  τον ονομάζουμε συντελεστή διεύθυνσης. Κατασκευάζουμε την ευθεία  $\psi = \chi$  και με το εργαλείο κατακόρυφου ελαστικού χειρισμού, μεταβάλλουμε την ευθεία. Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης παίρνει διάφορες τιμές. Σε ποια τεταρτημόρια βρίσκεται η γραφική παράσταση όταν  $\alpha > 0$  και σε ποιά όταν  $\alpha < 0$ ;

4) Κάθε ομάδα δίνει 2 συναρτήσεις της μορφής  $\psi = \alpha\chi$  στη ομάδα που έχει στα δεξιά της και παίρνει αντίστοιχα 2 συναρτήσεις από την ομάδα που έχει στα αριστερά της. Η μία θα πρέπει να έχει συντελεστή διεύθυνσης θετικό και η άλλη αρνητικό. Η κάθε ομάδα πρέπει να κατασκευάσει τις γραφικές παραστάσεις αυτών των συναρτήσεων. Πόσο μεταβάλλεται το  $\psi$  όταν το  $\chi$  αυξάνεται κατά 1; Μπορούμε να δημιουργήσουμε 11 σημεία πάνω στη γραφική παράσταση της κάθε ευθείας που οι τετμημένες τους να διαφέρουν κατά 1 και στη συνέχεια αποστέλλοντας τις συντεταγμένες στον πίνακα τιμών να βρούμε τις διαφορές των τεταγμένων τους.

5) Παιχνίδι: Κάθε ομάδα τοποθετεί 5 σημεία στο γράφημα της ομάδας που βρίσκεται στα δεξιά της (κανένα σημείο δεν πρέπει να βρίσκεται πάνω στον άξονα  $\psi' \psi$ ). Πρέπει η ομάδα να βρει για κάθε σημείο, μία συνάρτηση της μορφής  $\psi = \alpha\chi$  η οποία να διέρχεται από αυτό το σημείο. Κερδίζει η ομάδα που βρίσκει πρώτη τις πέντε ευθείες.

6) Αν τοποθετήσουμε ένα σημείο που ανήκει στον άξονα  $\psi' \psi$  (εκτός του σημείου  $(0,0)$ ), ορίζεται συνάρτηση της μορφής  $\psi = \alpha\chi$  που να διέρχεται από αυτό το σημείο; Αιτιολογούμε την άποψή μας.

7) Συνέχεια του αρχικού προβλήματος: «Στο πολυκατάστημα, το προϊόν με τιμή μονάδος 0,7 € υπάρχει δυνατότητα να συσκευαστεί με ειδικό τρόπο αν το επιθυμεί ο πελάτης, χρεώνοντας σε κάθε αγορά αυτού του προϊόντος και ανεξάρτητα από την ποσότητα αγοράς, 0,5 € επιπλέον».

α) Ο πωλητής που ζυγίζει, συσκευάζει και κοστολογεί το προϊόν χρειάζεται ένα πίνακα που σε μία στήλη να έχει όλα τα βάρη από 0 έως 10 κιλά (ανά 100 gr), στη διπλανή στήλη την τιμή του προϊόντος χωρίς την ειδική συσκευασία και στην τελευταία στήλη την τιμή μαζί με τη συσκευασία. Φτιάχνουμε ένα τέτοιο πίνακα.

β) Στέλνουμε και τις δύο περιπτώσεις βάρους-τιμής, στο γράφημα. Τι παρατηρούμε; Ποιοι είναι οι τύποι των δύο συναρτήσεων; Πληκτρολογούμε στο γράφημα τους τύπους των δύο συναρτήσεων ώστε να κατασκευαστεί η γραφική τους παράσταση. Διέρχεται η κάθε μία από την αντίστοιχη ομάδα σημείων;

γ) Κάθε ομάδα κατασκευάζει τη δική της γραφική παράσταση της μορφής  $\psi = \alpha\chi$  σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα και στη συνέχεια μεταφέροντας αυτή τη γραφική παράσταση κατασκευάζει ευθείες της μορφής  $\psi = \alpha\chi + \beta$ . Σε ποιο σημείο τέμνει η κάθε μία των άξονα  $\psi' \psi$ ;

<b>Ομάδα</b>	<b>Κατασκευή</b>	<b>Κατασκευή μετά από μεταφορά</b>
1η	$\psi=2\chi$	$\psi=2\chi+1$ , $\psi=2\chi+4$ , $\psi=2\chi-3$
2η	$\psi=0.5\chi$	$\psi=0.5\chi+2$ , $\psi=0.5\chi+5$ , $\psi=0.5\chi-4$
3η	$\psi=-3\chi$	$\psi=-3\chi+2$ , $\psi=-3\chi+4$ , $\psi=-3\chi-5$
4η	$\psi=1.5\chi$	$\psi=1.5\chi+3$ , $\psi=1.5\chi+4$ , $\psi=1.5\chi-2$
5η	$\psi=-2.7\chi$	$\psi=-2.7\chi+4$ , $\psi=-2.7\chi+1$ , $\psi=-2.7\chi-3$

Γενικεύουμε και καταγράφουμε τα συμπεράσματά μας για τη σχέση της γραφικής παράστασης της  $\psi=\alpha\chi+\beta$  με τη γραφική παράσταση της  $\psi=\alpha\chi$ .

δ) Κάθε ομάδα δίνει 3 εξισώσεις ευθειών της μορφής  $\psi=\alpha\chi+\beta$  με ακέραιους συντελεστές στην ομάδα που βρίσκεται στα δεξιά της και παίρνει αντίστοιχα 3 τέτοιες ευθείες από την ομάδα στα αριστερά της. Ο στόχος είναι να τοποθετηθούν στο γράφημα δύο σημεία της κάθε ευθείας γνωρίζοντας το ρόλο των παραμέτρων  $\alpha$  και  $\beta$  στη γραφική παράσταση της ευθείας. Ο έλεγχος θα γίνει από την ομάδα που έθεσε τις εξισώσεις των ευθειών κάνοντας τις γραφικές παραστάσεις αυτών των ευθειών και ελέγχοντας αν πράγματι διέρχονται από αυτά τα σημεία.

#### **Παραδείγματα εργασιών για το σπίτι**

Ο κάθε μαθητής θα ανεβάσει τις απαντήσεις των παρακάτω εργασιών στα ψηφιακά εργαλεία επικοινωνίας του σχολείου.

1. Γράψε μία σύντομη έκθεση για το ρόλο του  $\alpha$  στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $\psi=\alpha\chi$ .
2. Μια συνάρτηση της μορφής  $\psi=\alpha\chi$  διέρχεται από το σημείο  $(2, -3,6)$ . Να βρεις τη συνάρτηση  $\psi=\alpha\chi$  που διέρχεται από αυτό το σημείο, με 3 τουλάχιστον διαφορετικούς τρόπους. Γράψε αναλυτικά τις σκέψεις σου.
3. Κατασκεύασε σε μιλιμετρέ χαρτί τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $\psi=2\chi$  και της συμμετρικής της ως προς των άξονα  $\chi'\chi$ . Ποιος είναι ο τύπος της συμμετρικής της; Ποια είναι η συμμετρική της  $\psi=\alpha\chi$  ως προς τον άξονα  $\chi'\chi$ ;
4. Ο Δημήτρης και η Μαρία είναι μαθητές της Β' γυμνασίου και προσπαθούν να λύσουν το πρόβλημα που τους έβαλε ο καθηγητής τους: «Δίνονται τα σημεία  $A(0,3)$  και  $B(1,-2)$ . Ποια ευθεία της μορφής  $\psi=\alpha\chi+\beta$  διέρχεται από αυτά τα σημεία;». Ο Δημήτρης ξεκινάει να λύσει το πρόβλημα αντικαθιστώντας στον τύπο της συνάρτησης τις συντεταγμένες των σημείων. Σε ένα λεπτό όμως η Μαρία ισχυρίζεται ότι βρήκε τη λύση χρησιμοποιώντας το ρόλο των συντελεστών  $\alpha$  και  $\beta$ . Ο Δημήτρης αμφισβητεί τον τρόπο της Μαρίας αλλά όταν τελειώνει διαπιστώνει ότι είχαν βρει την ίδια ευθεία. Ποια είναι αυτή η ευθεία και πως έλυσαν το πρόβλημα τα δύο παιδιά;

#### **3η φάση**

Οι μαθητές/-τριες εμπλέκονται σε δραστηριότητες γραφικής επίλυσης εξισώσεων και ανισώσεων της μορφής  $ax+b >(=,>)γx+d$  μέσα από πραγματικά προβλήματα.

#### **Παραδείγματα δραστηριοτήτων**

Το κόστος δύο εταιριών (Α και Β) κινητής τηλεφωνίας είναι:

A: πάγιο μηνιαίο κόστος 9 ευρώ και κόστος 0,1 ευρώ ανά λεπτό συνομιλίας,

B: έχει πάγιο μηνιαίο κόστος 3 ευρώ και κόστος 0,2 ευρώ ανά λεπτό συνομιλίας.

1) Αν συμβολίσουμε με  $x$  τα μηνιαία λεπτά συνομιλίας και  $y$  τα χρήματα σε ευρώ που πρέπει να πληρώσουμε, γράφουμε για κάθε εταιρεία τη συνάρτηση των χρημάτων ως προς τα λεπτά συνομιλίας και κάνουμε τη γραφική παράσταση των δύο συναρτήσεων.

2) Τέμνονται οι δύο γραφικές παραστάσεις σε κάποιο σημείο; Αν ναι, πώς ερμηνεύουμε τις συντεταγμένες αυτού του σημείου στο πλαίσιο του προβλήματος;

3) Πόσα λεπτά συνομιλίας πρέπει να κάνει κάποιος μηνιαία, για να είναι συμφέρουσα η επιλογή της εταιρείας Α και πόσα για να είναι συμφέρουσα η επιλογή της εταιρείας Β;

#### **Παραδείγματα εργασιών για το σπίτι**

1. Κάθε ομάδα ανεβάζει ένα παρόμοιο πρόβλημα στα ψηφιακά εργαλεία επικοινωνίας του σχολείου με προσφορές από τρεις εταιρείες τηλεφωνίας και λύνει το πρόβλημα της περισσότερο συμφέρουσας προσφοράς με βάση τον αριθμό των μηνιαίων λεπτών συνομιλίας.

2. Κάθε ομάδα ανεβάζει στα ψηφιακά εργαλεία επικοινωνίας του σχολείου ένα πρόβλημα και θέτει ένα ερώτημα που η επίλυσή του μπορεί να βασιστεί σε ανισώσεις της μορφής  $ax+b >γx+d$ . Στη συνέχεια λύνει γραφικά και αλγεβρικά την ανίσωση. Η κάθε ομάδα ελέγχει τα προβλήματα των άλλων ομάδων και προτείνει τρόπους βελτίωσής τους.

#### **Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα**

Ως αφετηρία στην παρούσα συνθετική εργασία χρησιμοποιείται ένα πραγματικό πρόβλημα που προσφέρει το πλαίσιο για να νοηματοδοτηθεί από τους μαθητές η γραφική αναπαράσταση των αναλόγων ποσών. Έτσι, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα συνδέσουν την κλίση της ευθείας  $\psi=ax$  με το συντελεστή αναλογίας στα ανάλογα ποσά, να μελετήσουν τη σχέση της κλίσης με τα τεταρτημόρια στα οποία βρίσκεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης και να νοηματοδοτήσουν την κλίση ως μεταβολή των τιμών του  $\psi$  όταν το  $x$  αυξάνεται κατά 1.

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας η  $\psi=ax+b$  προκύπτει μέσα από τον δυναμικό μετασχηματισμό της  $\psi=ax$  ώστε να δοθούν στους μαθητές ευκαιρίες σύνδεσης των δύο συγκεκριμένων συναρτήσεων. Αυτή ακριβώς η δυνατότητα μετασχηματισμού της γραφικής παράστασης έχει μία ιδιαίτερη διδακτική αξία αφού στην συνήθη πρακτική ο μετασχηματισμός αυτός είναι η κατάληξη και όχι η αφετηρία της διερεύνησης μίας συνάρτησης. Τέλος, επιδιώκεται οι μαθητές να διερευνήσουν το ρόλο των  $a$  και  $b$  στις γραμμικές συναρτήσεις και να εμπλακούν στην γραφική επίλυση και ερμηνεία εξισώσεων και ανισώσεων της μορφής  $ax+b >(=,>)γx+d$ .

Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης στο FP είναι δυναμικά συνδεδεμένες και έτσι διευρύνονται οι ευκαιρίες των μαθητών να κατανοήσουν το ρόλο των



αναπαραστάσεων αυτών στον ορισμό της γραμμικής συνάρτησης αλλά και στο πλαίσιο της επίλυσης προβλήματος.

Οι κοινωνικοί στόχοι για τους μαθητές εντοπίζονται στη συνεργασία και τη συλλογική διαπραγμάτευση των ιδεών τους σε επίπεδο ομάδας, σε επίπεδο τάξης και στο επίπεδο της επικοινωνίας τους μέσω ψηφιακών εργαλείων συζητήσεων. Στα πλαίσια αυτά ο στόχος είναι να ενισχυθεί η κοινωνική αλληλεπίδραση μέσα από τη ενεργό εμπλοκή των μαθητών σε συνεργατικές και διαλογικές πρακτικές.

## ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 6 (Β' Γυμνασίου)

### «Αρνητικοί αριθμοί και εξισώσεις»

**Αποσπάσματα από το λήμμα “Αρνητικοί” της *Encyclopédie* (1751–1765)  
(συγγραφέας του λήμματος ο *Jean d’Alembert*)**

Αρνητικές ποσότητες στην Άλγεβρα είναι εκείνες που επηρεάζονται από το σημείο – και οι οποίες θεωρούνται από πολλούς μαθηματικούς ως μικρότερες από το μηδέν. Αυτή όμως η τελευταία ιδέα δεν είναι ορθή, όπως θα δούμε παρακάτω ...

Οι ποσότητες που ονομάζονται αρνητικές, θεωρούμενες λαθεμένα ότι βρίσκονται κάτω από το μηδέν, παριστάνονται πολύ συχνά από πραγματικές ποσότητες ...

Ας υποθέσουμε π.χ. ότι αναζητούμε την τιμή ενός αριθμού  $x$ , ο οποίος όταν προστίθεται στο 100 μας δίνει 50. Σύμφωνα με τους κανόνες της Άλγεβρας, έχουμε  $x + 100 = 50$ , δηλαδή  $x = -50$ . Αυτό που διαπιστώνουμε είναι ότι η ποσότητα  $x$  ισούται με 50 και ότι αντί να προστίθεται στο 100 θα πρέπει να αφαιρείται. Πράγμα που σημαίνει ότι το πρόβλημα θα έπρεπε να είχε διατυπωθεί ως εξής: Να βρεθεί ένα μέγεθος  $x$  το οποίο, όταν αφαιρείται από το 100 να αφήνει υπόλοιπο 50. Αν το πρόβλημα είχε διατυπωθεί με αυτόν τον τρόπο, τότε θα είχαμε  $100 - x = 50$  και  $x = 50$  και η αρνητική μορφή του  $x$  δεν θα επιβίωνε πλέον. Έτσι λοιπόν οι αρνητικές ποσότητες υποδηλώνουν στην πραγματικότητα θετικές ποσότητες στους υπολογισμούς, οι οποίες όμως είχαν υποτεθεί σε λάθος θέση. ...

Έτσι λοιπόν, πραγματικά και ξεκάθαρα, δεν υπάρχουν καθόλου μεμονωμένες αρνητικές ποσότητες: το  $-3$  θεωρούμενο αφηρημένα δεν έχει κανένα νόημα. Όταν όμως λέω ότι ένας άνθρωπος έδωσε σε κάποιον άλλο  $-3$  écus, αυτό σημαίνει σε κατανοητή γλώσσα ότι του οφείλει 3 écus.

#### **Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής**

**1η φάση:** Οι μαθητές μελετούν το ιστορικό κείμενο, περιγράφουν με συντομία τη θέση που υποστηρίζει ο συγγραφέας και διατυπώνουν τη δική τους άποψη. Στη συνέχεια εξετάζουν το παρακάτω πρόβλημα και απαντούν στα ερωτήματα που το συνοδεύουν.

Πρόβλημα: Χρειάζονται οι αρνητικοί αριθμοί στην επίλυση των εξισώσεων;

Ζητήματα όπως αυτά που θίγει ο *Jean d’Alembert* στο προηγούμενο απόσπασμα (και αρκετοί άλλοι με πολύ μεγαλύτερη ένταση) είχαν χωρίσει τους μαθηματικούς του 18ου αιώνα σε δύο στρατόπεδα, σε “οπαδούς” και “αντίπαλους” των αρνητικών. Οι “οπαδοί” υποστήριζαν ότι οι αρνητικοί είναι χρήσιμοι, παρά το γεγονός ότι δύσκολα μπορεί να αποδοθεί ένα πραγματικό νόημα στις πράξεις τους, ενώ “αντίπαλοι” θεωρούσαν ότι τα Μαθηματικά μπορούν να υπάρξουν και χωρίς τους αρνητικούς. Τη φύση της διαμάχης μπορούμε να την καταλάβουμε με το επόμενο παράδειγμα, στο οποίο ένας υποθετικός “αντίπαλος” και ένας υποθετικός “οπαδός” των αρνητικών επιλύουν με διαφορετικό τρόπο ο καθένας μια απλή εξίσωση :

<p>“ΑΝΤΙΠΑΛΟΣ”</p> <p>Λύνω την εξίσωση <math>7x - 5 = 10x - 11</math> χωρίς χρήση των αρνητικών αριθμών</p>	<p>“ΟΠΑΔΟΣ”</p> <p>Λύνω την εξίσωση <math>7x - 5 = 10x - 11</math> με χρήση των αρνητικών αριθμών</p>
<p><math>7x - 5 = 10x - 11</math></p> <p><math>11 - 5 = 10x - 7x</math></p> <p><math>6 = 3x</math></p>	<p><math>7x - 5 = 10x - 11</math></p> <p><math>7x - 10x = 5 - 11</math></p> <p><math>-3x = -6</math></p>

$x = 6 : 3$ $x = 2$	$x = (-6) : (-3)$ $x = 2$
------------------------	------------------------------

Ερωτήσεις

- 1) Ποια είναι η βασική διαφορά στους δύο τρόπους επίλυσης;
- 2) Διακρίνετε πλεονεκτήματα ή μειονεκτήματα σε κάθε τρόπο;
- 3) Μπορείτε να χαρακτηρίσετε τον έναν τρόπο ταχύτερο ή πιο πρακτικό από τον άλλο;
- 4) Μπορείτε να εξηγήσετε έναν κανόνα των πράξεων των αρνητικών αριθμών με βάση τους δύο διαφορετικούς τρόπους επίλυσης της ίδιας εξίσωσης;

**2η φάση:** Οι μαθητές συζητούν στην τάξη τη θέση που υποστηρίζει ο συγγραφέας του ιστορικού κειμένου, παρουσιάζουν τη δική τους άποψη και τη συνδέουν με τις απαντήσεις που έδωσαν στο πρόβλημα.

***Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα***

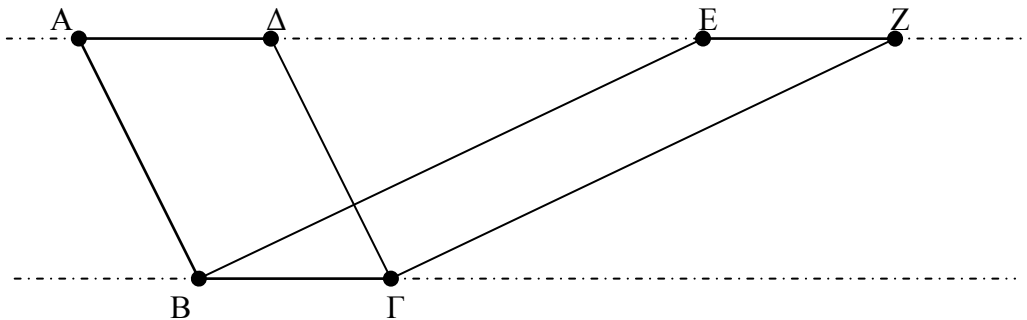
Η δραστηριότητα δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να εκτιμήσουν ότι η εισαγωγή των αρνητικών αριθμών έγινε για να εξυπηρετηθούν πρωταρχικά οι ανάγκες της μαθηματικής πρακτικής (π.χ. ευελιξία στην επίλυση των εξισώσεων) και όχι πραγματικές ανάγκες (π.χ. η μέτρηση της θερμοκρασίας). Αυτό το γεγονός μπορεί να συμβάλει στη θεραπεία της “τραυματικής” εμπειρίας που προκαλεί η πρώτη επαφή με τις πράξεις των αρνητικών αριθμών οι οποίες οδηγούν στην απώλεια του νοήματος των αριθμητικών πράξεων (π.χ. η πρόσθεση μπορεί να προκαλεί ελάττωση, η αφαίρεση αύξηση κ.λπ.).

## ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 7 (Β' Γυμνασίου)

### «"Παράδοξες" ιδιότητες των γεωμετρικών προτάσεων»

#### Ένα πρόβλημα για το εμβαδόν των παραλληλογράμμων

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε σχεδιάσει δύο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΒΓΖ με την ίδια βάση ΒΓ και τις κορυφές τους πάνω σε δύο παράλληλες ευθείες.



Να εξετάσετε αν τα δύο παραλληλόγραμμα είναι ισοδύναμα, δηλαδή αν έχουν το ίδιο εμβαδόν και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

#### Ένα απόσπασμα από το έργο του Πρόκλου

##### Σχόλια στο α' βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη

Προκαλούσε πλήρη αμηχανία σε όλους εκείνους που αγνοούσαν την επιστήμη της Γεωμετρίας το γεγονός ότι τα παραλληλόγραμμα που έχουν την ίδια βάση και βρίσκονται ανάμεσα στις ίδιες παράλληλες, πρέπει να είναι ισοδύναμα μεταξύ τους. Διότι πώς είναι δυνατόν να παραμένει η ισότητα των εμβαδών, όταν τα μήκη των δύο άλλων πλευρών αυξάνονται επ' άπειρον; (αφού μπορούμε – προεκτείνοντας τις δύο παράλληλες – να αυξήσουμε όσο θέλουμε τα μήκη τους). Εύλογα θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς γιατί να παραμένει η ισότητα των εμβαδών όταν συμβαίνει αυτό. Διότι όταν το πλάτος είναι ίδιο (αφού η βάση είναι κοινή) και το μήκος μεγαλώνει, πώς γίνεται να μη μεγαλώνει και το εμβαδό; Αυτό το θεώρημα λοιπόν, και το αντίστοιχο για τα τρίγωνα, ανήκουν στα λεγόμενα “παράδοξα θεωρήματα” των Μαθηματικών....

Μένουν έκπληκτοι λοιπόν οι περισσότεροι όταν μαθαίνουν ότι ο πολλαπλασιασμός του μήκους των πλευρών δεν ανατρέπει την ισότητα των εμβαδών. Η αλήθεια είναι όμως ότι ο σημαντικότερος παράγοντας για την αύξηση ή ελάττωση του εμβαδού είναι η ισότητα ή ανισότητα των γωνιών. Διότι όσο πιο άνισες κάνουμε τις γωνίες, τόσο περισσότερο ελαττώνουμε το εμβαδό όταν διατηρούμε σταθερό το μήκος και το πλάτος· έτσι λοιπόν, για να διατηρήσουμε την ισότητα των εμβαδών, πρέπει να αυξήσουμε την πλευρά.

- 1) Θεωρείτε δικαιολογημένη την αμηχανία και την έκπληξη αυτών που αντιμετώπιζαν το συγκεκριμένο πρόβλημα;
- 2) Διαπιστώνετε ότι στο πρόβλημα αυτό εμφανίζεται κάποια αντίφαση ανάμεσα στην εποπτεία και τα αποτελέσματα των Μαθηματικών;

#### Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

**1η φάση:** Οι μαθητές διερευνούν τη γεωμετρικό πρόβλημα και χρησιμοποιούν διάφορα μέσα (μετρήσεις, υπολογισμούς, συλλογισμούς, κλπ) για να το λύσουν. Η δυνατότητα

χρήσης εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας από τους μαθητές για την κατασκευή και χειρισμό των σχημάτων του αρχαίου κειμένου αναμένεται να εμπλουτίσει τον πειραματισμό των μαθητών καθώς θα τους επιτρέψει να ενεργοποιήσουν τις νοερές κινήσεις (στροφή και μετατόπιση αντίστοιχα) που περιγράφονται στις κατασκευές των σχημάτων αυτών. Στη συνέχεια οι μαθητές μελετούν το ιστορικό κείμενο και απαντούν στα ερωτήματα που το συνοδεύουν.

**2η φάση:** Οι μαθητές παρουσιάζουν στην τάξη τα αποτελέσματα της εργασίας τους, ανταλλάσσουν ιδέες και καταλήγουν σε ορισμένα συμπεράσματα για τη σχέση ανάμεσα σε ένα συμπέρασμα που φαίνεται διαισθητικά προφανές και στο συμπέρασμα που προκύπτει ως αποτέλεσμα της αιτιολόγησης των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων.

### ***Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα***

Το ιστορικό κείμενο δίνει ένα παράδειγμα των γεωμετρικών προτάσεων που οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί αποκαλούσαν “παράδοξα θεωρήματα” επειδή το συμπέρασμά τους έρχεται σε άμεση αντίθεση με αυτό που υποδεικνύει η διαίσθηση και η κοινή λογική.

Η δραστηριότητα δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να έλθουν σε επαφή με ένα παράδειγμα της διάστασης που υφίσταται πολύ συχνά ανάμεσα σε μια μαθηματική πρόταση και τη διαισθητική προφάνεια, και να εκτιμήσουν έτσι την εγκυρότητα που παρέχει το αποτέλεσμα της μαθηματικής απόδειξης.

Η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας αναμένεται να ενισχύσει την εισαγωγή των μαθητών στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς οι οποίοι αποτελούν βασική καινοτομία στο νέο ΑΠΣ Γεωμετρίας του Γυμνασίου.

**ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 8 (Β' Γυμνασίου)**  
**«Παγκόσμιο χωριό - Οι άνθρωποι και οι κοινωνίες πίσω από τους αριθμούς»**

Ο καθηγητής μαθηματικών του σχολείου, σας έχει αναθέσει να σχεδιάσετε και να εκτελέσετε μια μικρή στατιστική έρευνα που να αφορά «τυπικά» χαρακτηριστικά ανάμεσα σε μαθητές όλου του κόσμου. Μία πολύ πλούσια πηγή για να συλλέξετε δεδομένα είναι το διαδίκτυο. Σας πρότεινε να συλλέξετε δεδομένα από το διεθνές έργο «απογραφή στο σχολείο» (Census At School International) με σκοπό να τα επεξεργαστείτε και να ανακαλύψετε ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα σε σας και σε μαθητές άλλων χωρών και παράλληλα να συντάξετε στο τέλος μία μικρή αναφορά για ενδιαφέροντα στοιχεία που βρήκατε μέσα από αυτή την έρευνα. Οι επόμενες διερευνήσεις θα βοηθήσουν την ομάδα σας να πραγματοποιήσει αυτή την έρευνα και παράλληλα να μελετήσει θέματα ή φαινόμενα που αφορούν την σχολική ζωή ή θέματα που αφορούν το περιβάλλον ή θέματα που αφορούν την παγκόσμια κοινότητα.

**Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής**

**1<sup>η</sup> φάση:** Οι μαθητές με την βοήθεια των καθηγητών της τεχνολογίας και των ξένων γλωσσών, συλλέγουν δεδομένα από τον διαδικτυακό ιστότοπο <http://www.censusatschool.com/en/links> για κάποιες από τις χώρες που συμμετέχουν. Για να είναι δυνατή η σύγκριση ανάμεσα στις διαφορετικές χώρες υπάρχουν κοινές ερωτήσεις ενώ παράλληλα η κάθε χώρα έχει και «εθνικές» ερωτήσεις, που εξετάζουν διάφορα θέματα σχετικά με τους μαθητές της χώρας.

Για παράδειγμα, συλλέγουν δεδομένα σε ένα υπολογιστικό περιβάλλον λογιστικών φύλλων, για τις διάφορες χώρες με σκοπό να τα επεξεργαστούν, καθώς και τα σχετικά ερωτηματολόγια όπως το παρακάτω, που προέρχεται από την Νότια Αφρική:

## CensusAtSchool Form

Grades 8 - 12

Learner number:

ABOUT YOU	ABOUT YOUR HOUSEHOLD	SCHOOL																																																														
<p><b>1. Are you a</b></p> <p><input type="checkbox"/> 1 Male?    <input type="checkbox"/> 2 Female?</p> <p><b>2. What is your date of birth?</b></p> <p><input style="width: 20px;" type="text"/> <input style="width: 20px;" type="text"/> <input style="width: 20px;" type="text"/> <input style="width: 20px;" type="text"/></p> <p style="text-align: center; font-size: small;">(day      month      year)</p> <p><b>3. What grade are you in at school?</b></p> <p>Grade <input style="width: 20px;" type="text"/></p> <p style="text-align: center; font-size: small;">e.g. Grade 10</p> <p><b>4. Where were you born?</b></p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; font-size: small;"> <tr><td style="width: 20px; text-align: center;">1</td><td>Eastern Cape</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">2</td><td>Free State</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td>Gauteng</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">4</td><td>Kwazulu-Natal</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">5</td><td>Mpumalanga</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">6</td><td>Northern Cape</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">7</td><td>Northern Province</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">8</td><td>North West</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">9</td><td>Western Cape</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">10</td><td>Outside South Africa</td></tr> </table> <p><b>5. How tall are you? Answer to the nearest centimetre.</b></p> <p><input style="width: 50px;" type="text"/> centimetres</p> <p><b>6. What is the length of your right foot? Answer to the nearest centimetre.</b></p> <p><input style="width: 50px;" type="text"/> centimetres</p> <p><b>7. What sport that you have played this year is your favourite sport?</b> Use the sport coding list to code your answer or put 0 if you do not have a favourite sport.</p> <p>Sport code: <input style="width: 20px;" type="text"/></p> <p><b>8. What sport would you like to participate in?</b> Use the sport coding list to code your answer or put 0 if there is no sport you would like to participate in.</p> <p>Sport code: <input style="width: 20px;" type="text"/></p>	1	Eastern Cape	2	Free State	3	Gauteng	4	Kwazulu-Natal	5	Mpumalanga	6	Northern Cape	7	Northern Province	8	North West	9	Western Cape	10	Outside South Africa	<p><b>9. Tick the box if you have:</b></p> <p><input type="checkbox"/> Running water inside your house</p> <p><input type="checkbox"/> A radio at home</p> <p><input type="checkbox"/> A TV at home</p> <p><input type="checkbox"/> A telephone at home</p> <p><input type="checkbox"/> Access to a computer at home</p> <p><input type="checkbox"/> Access to the Internet at home</p> <p><input type="checkbox"/> Access to a library</p> <p><input type="checkbox"/> Cellular Phone of your own</p> <p><b>10. Do you live in a</b></p> <p><input type="checkbox"/> 1 House on separate yard/stand</p> <p><input type="checkbox"/> 2 Traditional House</p> <p><input type="checkbox"/> 3 Flat</p> <p><input type="checkbox"/> 4 Town/cluster house</p> <p><input type="checkbox"/> 5 Retirement village</p> <p><input type="checkbox"/> 6 Room in back yard</p> <p><input type="checkbox"/> 7 Shack/Zozo back in yard/stand</p> <p><input type="checkbox"/> 8 Room in squatter settlement</p> <p><input type="checkbox"/> 9 Tent/Caravan</p> <p><input type="checkbox"/> 10 Other (specify)</p> <p><input style="width: 50px;" type="text"/></p> <p><b>11. How many people live in your household? (include yourself)</b></p> <p><input style="width: 50px;" type="text"/> people</p> <p><b>12. How many people still at school (Grade 1-12) live in your household? (include yourself)</b></p> <p><input style="width: 50px;" type="text"/> Males</p> <p><input style="width: 50px;" type="text"/> Females</p>	<p><b>13. What is your favourite subject/learning area at school? Enter the code letter(s) in the box in order of your preference.</b></p> <p>1st <input style="width: 50px;" type="text"/></p> <p>2nd <input style="width: 50px;" type="text"/></p> <p>3rd <input style="width: 50px;" type="text"/></p> <p style="font-size: small;">The codes are:</p> <table style="width: 100%; font-size: small;"> <tr><td>1 LLC</td><td>2 NS</td></tr> <tr><td>3 T</td><td>4 HSS</td></tr> <tr><td>5 EMS</td><td>6 AC</td></tr> <tr><td>7 LO</td><td>8 MLMMS</td></tr> <tr><td>9 Maths</td><td>10 History</td></tr> <tr><td>11 Geography</td><td>12 Science</td></tr> <tr><td>13 Biology</td><td>14 Guidance</td></tr> <tr><td>15 Accountancy</td><td></td></tr> <tr><td>16 Industrial Arts</td><td></td></tr> <tr><td>17 Home Economics</td><td></td></tr> <tr><td>18 Languages</td><td></td></tr> <tr><td>19 Other Subjects (specify)</td><td></td></tr> </table> <p><b>14. How do you usually travel to school?</b></p> <p><input type="checkbox"/> The codes are:</p> <table style="width: 100%; font-size: small;"> <tr><td>1 Walk</td><td>2 Bus</td></tr> <tr><td>3 Car</td><td>4 Bicycle</td></tr> <tr><td>5 Train</td><td>6 Taxi</td></tr> <tr><td>7 Motorcycle / scooter</td><td></td></tr> <tr><td>8 Other</td><td></td></tr> </table> <p><b>15. How long does it usually take you to travel to school?</b></p> <p><input style="width: 50px;" type="text"/> minutes</p> <p><b>16. What distance do you travel from home to school in km?</b></p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; font-size: small;"> <tr><td style="width: 20px; text-align: center;">1</td><td>Less than 1km</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">2</td><td>1 to 5 km</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td>6 to 10km</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">4</td><td>11km or over</td></tr> </table>	1 LLC	2 NS	3 T	4 HSS	5 EMS	6 AC	7 LO	8 MLMMS	9 Maths	10 History	11 Geography	12 Science	13 Biology	14 Guidance	15 Accountancy		16 Industrial Arts		17 Home Economics		18 Languages		19 Other Subjects (specify)		1 Walk	2 Bus	3 Car	4 Bicycle	5 Train	6 Taxi	7 Motorcycle / scooter		8 Other		1	Less than 1km	2	1 to 5 km	3	6 to 10km	4	11km or over
1	Eastern Cape																																																															
2	Free State																																																															
3	Gauteng																																																															
4	Kwazulu-Natal																																																															
5	Mpumalanga																																																															
6	Northern Cape																																																															
7	Northern Province																																																															
8	North West																																																															
9	Western Cape																																																															
10	Outside South Africa																																																															
1 LLC	2 NS																																																															
3 T	4 HSS																																																															
5 EMS	6 AC																																																															
7 LO	8 MLMMS																																																															
9 Maths	10 History																																																															
11 Geography	12 Science																																																															
13 Biology	14 Guidance																																																															
15 Accountancy																																																																
16 Industrial Arts																																																																
17 Home Economics																																																																
18 Languages																																																																
19 Other Subjects (specify)																																																																
1 Walk	2 Bus																																																															
3 Car	4 Bicycle																																																															
5 Train	6 Taxi																																																															
7 Motorcycle / scooter																																																																
8 Other																																																																
1	Less than 1km																																																															
2	1 to 5 km																																																															
3	6 to 10km																																																															
4	11km or over																																																															

Οι μαθητές επεξεργάζονται τα δεδομένα για κάποιες από τις κοινές ερωτήσεις που υπάρχουν, όπως για παράδειγμα ερωτήσεις που αφορούν αθλητικές δραστηριότητες (θα χρειαστεί και το αρχείο της κωδικοποίησης των αθλημάτων) ή αγαπημένα μαθήματα.

**2<sup>η</sup> φάση:** Με αφορμή τις μη κοινές ερωτήσεις ανάμεσα στις διαφορετικές χώρες, οι μαθητές αναζητούν περισσότερες πληροφορίες για θέματα που μπορεί να τους έκαναν εντύπωση.

Για παράδειγμα, με αφορμή το ερωτηματολόγιο της Νότιας Αφρικής, οι μαθητές αναζητούν πληροφορίες για τις συνθήκες διαβίωσης των μαθητών ( π.χ. ύπαρξη ή όχι τρεχούμενου νερού) και τις επιπτώσεις αυτού στην καθημερινή ζωή ή του στοιχειώδους εξοπλισμού των σχολείων της Νότιας Αφρικής και τις επιπτώσεις αυτού στις ευκαιρίες μάθησης των μαθητών (π.χ. χωρίς ηλεκτρικό ρεύμα στο σχολείο δεν υπάρχει η δυνατότητα αναζήτησης πηγών πληροφορίας από το διαδίκτυο) ή με αφορμή την ερώτηση από το ερωτηματολόγιο του Καναδά σχετικά με την ενδοσχολική βία μελετούν και συζητούν για το φαινόμενο αυτό.

**3<sup>η</sup> φάση:** Με την βοήθεια εκπαιδευτικών διαφόρων ειδικοτήτων, μελετούν βαθύτερα κάποια θέματα και την σημασία τους για τον άνθρωπο, το περιβάλλον ή την ανθρωπότητα.

Για παράδειγμα μελετούν το θέμα των υδάτινων πόρων, τη σημασία τους στην καθημερινή ζωή, το θέμα της αλόγιστης και άσκοπης χρήσης τους και την σημασία τους σε παγκόσμιο επίπεδο ως πιθανή αιτία συγκρούσεων ή μελετούν την σημασία και την αξία κοινής γλώσσας συνεννόησης των ανθρώπων (διεθνείς γλώσσες, μαθηματικά) και της κατανόησης τους για την επεξεργασία πληροφοριών.

**4<sup>η</sup> φάση:** Συντάσσουν μία μικρή αναφορά για τα θέματα που τους έκαναν εντύπωση σχετικά με προβλήματα ή δυσκολίες που αντιμετωπίζουν ή τις δυνατότητες που έχουν οι μαθητές, σε θέματα καθημερινής επιβίωσης, εκπαίδευσης ή υγείας σε διαφορετικές χώρες και παρουσιάζουν τα αποτελέσματα των ερευνών τους.

### ***Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα***

Τα σχολικά μαθήματα είναι απομονωμένα το ένα από το άλλο, με αποτέλεσμα η γνώση που προσφέρεται σε κάποιο απ' αυτά να μην συνδέεται με την γνώση που προσφέρεται από κάποιο άλλο. Η δε γνώση, αυτή καθ' αυτή, δεν έχει όλη την αξία και τη σημασία που της αρμόζει για την μελλοντική εξέλιξη των μαθητών σε αυριανούς πολίτες και την διαμόρφωσή τους ως προσωπικότητες, μια και συνδέεται συχνά μόνον με την μελλοντική χρήση της σε κάποιο επάγγελμα. Με αφορμή όλη την έρευνα ίσως βοηθήσουμε τους μαθητές μας να γίνουν πιο συνειδητά άτομα και πολίτες αυτού του κόσμου, που θα αναγνωρίζουν και θα σέβονται τις δυνατότητες που έχουν στην παρούσα φάση της ζωής τους, θα είναι σε θέση να ερμηνεύουν τον κόσμο και το περιβάλλον τους, θα αναγνωρίζουν τις τεράστιες δυνατότητες της ανθρωπότητας και θα ερμηνεύουν τις αδυναμίες της.

Προκειμένου να διδαχτούν κάποιες έννοιες της στατιστικής στο σχολείο συχνά χρησιμοποιούνται έτοιμα προκατασκευασμένα δεδομένα, που μπορεί να μην είναι πραγματικά. Έτσι χάνεται η ευκαιρία οι μαθητές να έχουν ένα πραγματικό πλαίσιο αναφοράς με βάση το οποίο θα συνδέσουν τις διαφορετικές έννοιες και διαδικασίες της στατιστικής.

Στην παρούσα εργασία οι μαθητές θα εμπλακούν ενεργά στην έρευνα και θα χρησιμοποιήσουν την στατιστική ως ένα εργαλείο ανάλυσης δεδομένων και εξαγωγής συμπερασμάτων. Θα πρέπει να συλλέξουν δεδομένα, να τα αναπαραστήσουν κατάλληλα, να ερμηνεύσουν πίνακες και στατιστικά διαγράμματα και να τα αναλύσουν με σκοπό να καταλήξουν σε συμπεράσματα που να είναι τεκμηριωμένα με βάση τα δεδομένα και τις μεθόδους που χρησιμοποίησαν.

Ταυτόχρονα, θα διαπιστώσουν τη σημασία που έχουν τα μαθηματικά (και όχι μόνο) ως κοινή γλώσσα της ανθρωπότητας, ως ένα μέσο για την κατανόηση του κόσμου ενώ θα αναγνωρίσουν της προσφορά τους σε τομείς της κοινωνικής ζωής. Η διαπίστωση των δυνατοτήτων που προσφέρουν τα μαθηματικά στον άνθρωπο για να μελετήσει, να περιγράψει και να κατανοήσει τον κόσμο που τον περιβάλλει αναμένεται να ενισχύσει θετικές στάσεις των μαθητών/τριών απέναντι στα μαθηματικά.



## ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 9 (Γ' Γυμνασίου) «Μελετώντας την κάτοψη ενός σπιτιού»

Ο κ. Αναγνώστου διαθέτει ένα οικοπέδο  $360\text{m}^2$  σε ένα οικισμό κάτω των 2000 κατοίκων. Το μέγιστο ποσοστό κάλυψης του οικοπέδου σ' αυτήν την περιοχή είναι 70% (δηλαδή θα πρέπει να μένει ακάλυπτο τουλάχιστον το 30% του οικοπέδου) και ο συντελεστής δόμησης για τα πρώτα  $100\text{m}^2$  του οικοπέδου είναι 1,6, για τα επόμενα  $100\text{m}^2$  είναι 0,8, για τα επόμενα  $100\text{m}^2$  είναι 0,6 και πέραν των  $300\text{m}^2$  είναι 0,4. Στην επόμενη εικόνα εμφανίζεται το σχέδιο ενός πολιτικού μηχανικού στον οποίο απευθύνθηκε ο κ. Αναγνώστου για την ανέγερση μιας κατοικίας. Το σχέδιο έγινε με βάση τους περιορισμούς του οικιστικού νόμου. (Συντελεστής Δόμησης είναι ο αριθμός ο οποίος πολλαπλασιάζεται με την επιφάνεια του οικοπέδου και δίνει την συνολική επιφάνεια όλων των κτιρίων, σε όλους τους ορόφους που θα ανεγερθούν στο οικοπέδο. Για παράδειγμα, σ' αυτήν την περιοχή για ένα οικοπέδο  $320\text{m}^2$  μπορεί κάποιος να κτίσει  $160\text{m}^2$  για τα πρώτα  $100\text{m}^2$ ,  $80\text{m}^2$  για τα επόμενα  $100\text{m}^2$ ,  $60\text{m}^2$  για τα επόμενα  $100\text{m}^2$  και  $8\text{m}^2$  για τα υπόλοιπα  $20\text{m}^2$ . Συνολικά δηλαδή  $328\text{m}^2$  σε όλους τους ορόφους).



**Εικόνα 1.** Το προτεινόμενο σχέδιο από τον πολιτικό μηχανικό.

Πριν αποφασίσει σχετικά με το τελικό σχέδιο ο κ. Αναγνώστου θέλει να δοκιμάσει και δύο άλλες ιδέες. Η πρώτη ιδέα είναι να μεγαλώσει το παραπάνω σχέδιο, διατηρώντας όμως τις αναλογίες του, ώστε να εκμεταλλευτεί τη μέγιστη επιφάνεια κάλυψης του οικοπέδου. Η δεύτερη ιδέα είναι να κτίσει και άλλον όροφο, ακριβώς όπως το ισόγειο και να αξιοποιήσει το μέγιστο εμβαδόν που δικαιούται να κτίσει σύμφωνα με τους συντελεστές δόμησης του οικιστικού νόμου. Το κόστος της οικοδομής, σύμφωνα με την ποιότητα των υλικών που επέλεξε ο κ. Αναγνώστου, καθορίζεται από την περίμετρο και από το εμβαδόν της κατασκευής. Το κόστος είναι 2000€ για κάθε μέτρο της περιμέτρου του ισογείου, και 1100€ για κάθε μέτρο της περιμέτρου του 1ου ορόφου (η διαφορά του ισογείου οφείλεται στο κόστος των θεμελίων της οικοδομής). Σ' αυτό το κόστος προστίθενται και 850€ για κάθε  $\text{m}^2$ . Πόσο θα κοστίσει σε κάθε περίπτωση το κάθε

τετραγωνικό μέτρο που θα κτίσει ο κ. Αναγνώστου και ποια είναι η περισσότερο συμφέρουσα λύση ως προς το κόστος ανά τ.μ.;

Οι επόμενες διερευνήσεις θα μας βοηθήσουν να υπολογίσουμε τις διαστάσεις του σπιτιού σ' αυτές τις δύο περιπτώσεις και να βρούμε την οικονομικότερη λύση ανά  $m^2$  για τον κ. Αναγνώστου.

Σημείωση: Η νομοθεσία που αναφέρεται στο πρόβλημα είναι πραγματική.

### **Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής**

**1η φάση:** Οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της ομοιοθεσίας με το ομοιόθετο ενός σημείου και ενός τμήματος και διαπιστώνουν ότι τα ομοιόθετα τμήματα έχουν τον ίδιο λόγο με τον λόγο ομοιοθεσίας και είναι παράλληλα. Επίσης, διαπραγματεύονται τον λόγο των περιμέτρων και των εμβαδών ομοιόθετων γεωμετρικών σχημάτων.

**2η φάση:** Οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της ομοιότητας ως ένα σύνολο μετασχηματισμών δύο σχημάτων. Στη συνέχεια αναγνωρίζουν όμοια σχήματα από τις γωνίες και το λόγο των πλευρών τους.

**3η φάση:** Οι μαθητές απαντούν σε ερωτήσεις που αφορούν το αρχικό πρόβλημα του μετασχηματισμού της κάτοψης ενός σπιτιού. Διερευνούν το εμβαδόν του σχεδίου σε σχέση με το λόγο ομοιότητας. Διερευνούν το πρόβλημα κόστους της οικοδομής σε σχέση με την περίμετρο και το εμβαδόν της.

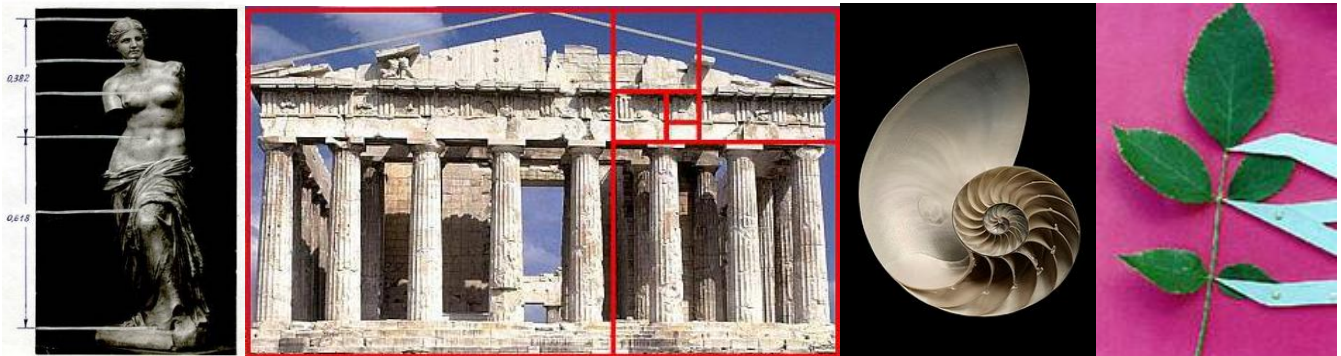
### **Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα**

Στην παραδοσιακή τάξη η διδασκαλία των εννοιών της ομοιοθεσίας και της ομοιότητας των γεωμετρικών σχημάτων γίνεται με στατικά μέσα αναπαράστασης και δύσκολα συνδέεται με την μοντελοποίηση πραγματικών προβλημάτων και την μελέτη τους με βάση τις συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες. Στο πλαίσιο αυτό οι μαθητές έχουν περιορισμένες δυνατότητες εμπλοκής τους σε διαδικασίες κατασκευής ομοιόθετων και όμοιων γεωμετρικών σχημάτων και διερεύνησης των ιδιοτήτων τους. Στην παρούσα εργασία και με τη βοήθεια του Geogebra οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα:

- να πειραματιστούν με την κατασκευή ομοιόθετων γεωμετρικών σχημάτων,
- να συνδέσουν τις έννοιες ομοιότητας και ομοιοθεσίας και να διερευνήσουν τον 'μηχανισμό' κατασκευής όμοιων γεωμετρικών σχημάτων μέσω της ομοιοθεσίας και άλλων διαδοχικών μετασχηματισμών,
- να διερευνήσουν τις ιδιότητες των όμοιων γεωμετρικών σχημάτων και να διαπραγματευτούν τη σχέση του λόγου των περιμέτρων και του λόγου των εμβαδών ομοιόθετων γεωμετρικών σχημάτων με το λόγο ομοιότητας,
- να συνδέσουν την επίλυση πραγματικών προβλημάτων με τις έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού όμοιων γεωμετρικών σχημάτων,
- να αναγνωρίσουν την αξία των μετασχηματισμών στην επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά.

## ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 10 (Γ' Γυμνασίου) «Ανακαλύπτοντας τη χρυσή αναλογία»

Τι κοινό μπορεί να έχουν ο Παρθενώνας, ένας κοχλίας, οι αναλογίες του ανθρώπινου σώματος, ο τρόπος με τον οποίο φυτρώνουν τα φύλλα στα κλαδιά και η Μόνα Λίζα του Λεονάρντο ντα Βίντσι; Η απάντηση κρύβεται στον μαγικό αριθμό  $\phi$ , που συμβολίζεται έτσι διεθνώς από το πρώτο γράμμα του ονόματος του γλύπτη Φειδία. Αν χωρίσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δύο μέρη, έτσι ώστε ο λόγος του με το μεγαλύτερο μέρος, να είναι ίσος με το λόγο του μεγαλύτερου προς το μικρότερο μέρος, τότε αυτός ο λόγος που σχηματίζεται ισούται με  $\phi$ . Ο λόγος  $\phi$  εμφανίζεται στο σύμπαν, στη φύση και στα ανθρώπινα δημιουργήματα. Από την αρχαιότητα είχε παρατηρηθεί ότι δημιουργεί την αίσθηση του ωραίου και γι' αυτό χρησιμοποιήθηκε στην Αρχιτεκτονική, στην Γλυπτική, στη Ζωγραφική. Οι επόμενες διερευνήσεις θα σας βοηθήσουν να ανακαλύψετε περισσότερα για τον αριθμό  $\phi$  και την εμφάνισή του στη φύση και στα ανθρώπινα δημιουργήματα.



### Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

**1<sup>η</sup> φάση:** Οι μαθητές εισάγονται στο μαθηματικό πρόβλημα της χρυσής τομής. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιήσει και ψηφιακό περιβάλλον για τον υπολογισμό του  $\phi$  (π.χ. στο Geogebra). Σε ένα τμήμα  $a$  με μεταβαλλόμενο μήκος έχει τοποθετηθεί ένα σημείο σε απόσταση  $x$  από το ένα άκρο. Μεταβάλλοντας το μήκος του  $x$  οι μαθητές παρατηρούν τη μεταβολή των λόγων  $a/x$  και  $x/(a-x)$ . Καλούνται να εντοπίσουν πότε οι λόγοι γίνονται ίσοι, να υπολογίσουν τον αριθμό  $\phi$  και να συμπεράνουν μετά από πειραματισμό ότι είναι ανεξάρτητος από το μήκος του τμήματος  $a$ . Στη συνέχεια σχηματίζουν την εξίσωση  $\phi^2 = \phi + 1$  και συνδέουν τον αριθμό  $\phi$  με την τομή των συναρτήσεων  $\psi = x^2$  και  $\psi = x + 1$ .

**2<sup>η</sup> φάση:** Οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες και η κάθε ομάδα αναλαμβάνει τις δικές της διερευνήσεις. Οι ομάδες έχουν τη δυνατότητα να συλλέξουν πληροφορίες και να συγκεντρώσουν υλικό (π.χ. εικόνες, φωτογραφίες) σχετικά με τη εμφάνιση του  $\phi$  στη φύση και στα ανθρώπινα δημιουργήματα. Μπορεί μάλιστα ο χωρισμός των ομάδων να γίνει θεματικά όπως παρακάτω:

**Ομάδα Μαθηματικών:** Δίνεται στους μαθητές το πρόβλημα της ακολουθίας του Fibonacci, βρίσκουν ένα μεγάλο πλήθος όρων αυτής της ακολουθίας, υπολογίζουν το λόγο των διαδοχικών όρων, υπολογίζουν τη διαφορά των λόγων από τον αριθμό  $\phi$  και διαπιστώνουν ότι ο λόγος αυτός πλησιάζει συνεχώς προς τον αριθμό  $\phi$ . Χρησιμοποιώντας τεχνολογία (π.χ. Function Probe ή Excel) μπορεί να εξοικονομηθεί πολύτιμος χρόνος στους υπολογισμούς αυτούς. Στη συνέχεια ανακαλύπτουν τους αριθμούς Fibonacci στο τρίγωνο του Pascal.

**Ομάδα Αρχιτεκτονικής και Τεχνών:** Οι μαθητές αναζητούν ιστορικά και αρχιτεκτονικά στοιχεία για διάφορα αρχιτεκτονικά μνημεία όπως για τον Παρθενώνα, την Πυραμίδα του Χέοπα κ.α. και διερευνούν τη σχέση τους με τη χρυσή αναλογία.

**Ομάδα Βιολογίας :** Οι μαθητές μελετούν τη εμφάνιση του φ στη φύση (φύλλα, έντομα κ.λ.π.) και στις αναλογίες του ανθρώπινου σώματος.

Στη συνέχεια οι μαθητές μπορεί να κληθούν να εισάγουν φωτογραφίες σε κατάλληλα διαμορφωμένο αρχείο του Geogebra όπου έχουν την δυνατότητα να εξετάσουν, αν τμήματα της φωτογραφίας τηρούν τη χρυσή αναλογία.

**3<sup>η</sup> φάση:** Οι μαθητές παρουσιάζουν στην ολομέλεια της τάξης τα συμπεράσματα από τη διερεύνησή τους και ακολουθεί συζήτηση μετά από κάθε παρουσίαση. Αναρτούν στα ψηφιακά εργαλεία επικοινωνίας του σχολείου μία συνοπτική έκθεση των συμπερασμάτων τους.

### ***Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα***

Η διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών (π.χ. των λόγων και αναλογιών) συνήθως γίνεται στην τάξη χωρίς αναφορές σε παραδείγματα από τον πραγματικό κόσμο, τις επιστήμες και τον πολιτισμό. Η παρούσα εργασία αναμένεται να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν την αναγκαιότητα της διδασκαλίας των μαθηματικών και ειδικότερα να τα συνδέσουν με την αναζήτηση των μαθηματικών δομών στη φύση και στις ανθρώπινες δραστηριότητες. Στην παρούσα εργασία οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα:

- να συνδέσουν τα μαθηματικά με άλλες επιστήμες και τον πολιτισμό,
- να τοποθετήσουν τα μαθηματικά στην ιστορική, πολιτιστική και κοινωνική τους διάσταση,
- να θεωρήσουν τα μαθηματικά ως μια ανθρώπινη κατασκευή μέσω της οποίας μπορούμε να ερμηνεύσουμε τον κόσμο που μας περιβάλλει και να αναγνωρίσουμε τις δομές και τις κανονικότητες που εμφανίζονται μέσα σ' αυτόν,

Η επικοινωνία για τα μαθηματικά θα ενισχύσει τις ευκαιρίες κατανόησης των αντίστοιχων μαθηματικών εννοιών ενώ η συνεργατική διερεύνηση θα βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν συνεργατικές και διαλογικές δεξιότητες και μεταδεξιότητες.

**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ**

Ball D. L., Thames M.H. & Phelps G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59, 389-407.

Black, P and Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning, *Assessment in Education*, 5 (1), 7 – 74.

Borkowski, J. G. (1992). Metacognitive theory: a framework for teaching literacy, writing, and math skills. *Journal of Learning Disabilities*, 25 (4), 253-257.

Bragg, P. & Outhred, I. (2000). Students' Knowledge of Length Units: Do They Know More than Rules about Rulers? In T. Nakarahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, 97-104). Hiroshima, Japan: Program Committee.

Bragg, P. & Outhred, I. (2004). A measure of rulers – the importance of units in a measure. In J. Hoines, M. & A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2, 159–166). Bergen, Norway: Bergen University College.

Broadfoot, M.P. (1996), *Education, Assessment and Society*, Open University Press, Buckingham.

Brown, A. L., Bransford, J.D., Ferrara, R.A. & Campione, J.C. (1983). Learning, remembering, and understanding. In P.H. Mussen (Ed.) *Handbook of child psychology* (Vol. 3: Cognitive development pp 77-166). New York: Wiley

Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992), Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (ed.), *The Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.

Clements, D., & Sarama, J. (2000). Young Children's Ideas about Geometric Shapes. *Teaching Children Mathematics*, 6(8), 482-491.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: the learning trajectory approach*. New York & London: Routledge.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. V. Mammana, V. (ed.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI Study*, 37-51. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. & Scaffer, R. (2005). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education*. American Statistical Association

Freudenthal, H., (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Mathematics Education Library. D. Reidel, Boston.

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2007). How Students Learn Statistics Revisited: A Current Review of Research on Teaching and Learning Statistics. *International Statistical Review*, 75 (3), 372–396.

Garfield, J. B. & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning: Connecting Research and Teaching Practice*. Springer Science & Business Media

Gutierrez, A. (1996). Visualization in 3- Dimensional Geometry: In Search of a Framework. In L.Puig & A. Guitierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-20). Valencia: University of Valencia, Spain

Harlen, W. and Deakin Crick, R. (2003). Testing and Motivation for Learning, *Assessment in Education*, 10 (2),169 – 208

Henningsen, M. and Stein, M. K. (1997). Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-Based Factors that support and Inhibit High-Level Mathematical Thinking and Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 524-549.

Heuvel – Panhuizen, M. (2001). *Children learn mathematics: a learning – teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school*. Utrecht: Freudenthal Institute & National Institute for Curriculum Development.

Jones, G.A. (Ed.) (2005). *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning*. Springer Science & Business Media

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707- 762). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Leont'ev, A. N. (1978). *Activity, Consciousness, and Personality*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Millett, A., Brown, M. Askew, M. (2004). *Primary mathematics and the developing professional*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Mammana, C., & Villani, V. (1998). Geometry and Geometry: Teaching Through the ages. In C. V. Mammana, V. (Ed.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI Study* (pp. 1-3). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Niss, M. (1996). Goals of mathematics teaching. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 11-47). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (Eds.), *3rd Mediterranean conference on mathematical education*. Athens, Jan. 2003, pp. 115-124. Athens: Hellenic Math. Society.

- Outhred, L. & Mitchelmore, M. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 147-167.
- Outhred, L., Mitchelmore, M., Mcphail, D. & Gould, P. (2003). Count Me into Measurement. In D. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and Teaching Measurement: 2003 Yearbook*, 81-99. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.
- Owens, K., & Outhred, L. (2006). The Complexity of Learning Geometry and Measurement. In A.Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 83-116). Rotterdam, Taipei: Sense Publishers.
- Romberg, T. (2004). *Standards-Based Mathematics Assessment in Middle School: Rethinking Classroom Practice*, Teachers' College, Columbia University New York and London.
- Samara, J. & Clements, D. H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children*. Routledge.
- Schoenfeld, A. H. (1987). What's the fuss about metacognition. In A. H. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum Associates.
- Share, B. M. & Dover, A. C. (1987) Metacognition, intelligence, and giftedness. *Gifted Child Quarterly*, 31, (1), 37-39.
- Shaughnessy, M. J. (2007). Research on Statistics Learning and Reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research On Mathematics Teaching and Learning: a Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 957-1010). NCTM.
- Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London, Washington: The Palmer Press.
- van den Heuvel-Panhuizen, & Buys, K. (Eds.) (2005). *Young Children Learn Measurement and Geometry. A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for the Lower Grades in Primary School*. Tal Project, 227-326. NL: Utrecht: Freudenthal Institute, Utrecht University & National Institute for Curriculum Development
- Van de Walle, J. (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο*. Αθήνα: Τυπωθήτω – Γιώργος Δαρδανός.
- Wenger, E., McDermott, R., & Snyder, W. M. (2002). *Cultivating communities of practice*. Boston, MA: Harvard Business School Press.
- Wittmann, E. (2005). Plenary Lecture presented at the International Colloquium "Mathematical Learning from Early Childhood to Adulthood" organized by the *Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques* in collaboration with the *Institut de mathématique de l'Université de Mons-Hainaut*, Mons/Belgium.

Βερούκιος, Π. (2010). *Συναρτησιακή προσέγγιση βασικών μαθηματικών εννοιών στο Γυμνάσιο*, Αδημοσίευτη Διδακτορική Διατριβή, ΕΚΠΑ: Μαθηματικό Τμήμα.

Δραμαλίδης, Α. & Σακονίδης, Χ. (2006) Η επίδοση μαθητών ηλικίας 12-15 χρόνων σε θέματα σχολικής άλγεβρας, *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, τεύχος 11, σελ. 100-114.

Κολέζα, Ε. & Φακούδης, Ε. (2009). Το πρόβλημα της επιλογής πλαισίου για την εισαγωγή μαθηματικών εννοιών. Η περίπτωση της πρόσθεσης και αφαίρεση ρητών αριθμών στα νέα σχολικά εγχειρίδια. Στο Φ. Καλαβάσης, Σ. Καφούση, Μ. Χιονίδου – Μοσκοφόγλου, Χ. Σκουμπουρδή και Γ. Φεσάκης (επιμ.) *Πρακτικά 3<sup>ου</sup> Πανελληνίου Συνεδρίου Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών: Μαθηματικής Εκπαίδευση και Διδακτικές Πρακτικές* (σελ. 373-382). Αθήνα: Νέες Τεχνολογίες.

Σακονίδης, Χ. (2001). *Μαθηματικά: οδηγίες για τον εκπαιδευτικό*. Αθήνα: ΥΠΕΠΘ-Ερευνητικό Πρόγραμμα «Πηνελόπη»: Ανάπτυξη εκπαιδευτικού λογισμικού πολυμέσων/ «Δημιουργός Μοντέλων».

Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μικρά Παιδιά, Μεγάλα Μαθηματικά Νοήματα*. Αθήνα: Gutenberg.

Σακονίδης, Χ. (2001). *Μαθηματικά: οδηγίες για τον εκπαιδευτικό*. Αθήνα: ΥΠΕΠΘ-Ερευνητικό Πρόγραμμα «Πηνελόπη»: Ανάπτυξη εκπαιδευτικού λογισμικού πολυμέσων/ «Δημιουργός Μοντέλων».