

ΤΙ ΕΜΑΘΕ ΕΝΑΣ ΔΑΣΚΑΛΟΣ ΚΑΙ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΟΥ ΤΗΣ 1^{ης} ΤΑΞΗΣ ΤΟΥ 5^{ου}
ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΡΟΔΟΥ ΣΕ ΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑ ΠΑΝΩ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ ΜΕ ΤΗΝ
ΧΡΗΣΗ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΩΝ ΧΕΙΡΟΠΙΑΣΤΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ

Μιτσούλλης Χρήστος
Εκπαιδευτικός- Υποψήφιος Διδάκτορας ΤΕΠΑΕΣ
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία, περιγράφεται η διαδικασία σχεδιασμού και υλοποίησης καθώς και τα προκαταρκτικά ευρήματα πιλοτικής έρευνας, τμήματος ευρύτερης έρευνας που βρίσκεται σε εξέλιξη. Στόχος της είναι η διερεύνηση των συνθηκών, της αποτελεσματικότητας και των περιορισμών χειρισμού και χρήσης συγκεκριμένων χειροπιαστών αντικειμένων (σ.χ.α.) και υλικών για την διδασκαλία των γωνιών. Μελετήθηκαν η συμπεριφορά και οι πρακτικές των μαθητών και του δάσκαλου σε μια σειρά δραστηριοτήτων με σ.χ.α. στα πλαίσια συνήθους σχολικής τάξης Α' γυμνασίου. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η χρήση των σ.χ.α. και υλικών και στην περίπτωση της έννοιας της γωνίας, όπως και γενικότερα, έχει πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα, όπως επισημαίνεται άλλωστε και στην διεθνή βιβλιογραφία (Ball.D.L. 1992, Cobb P., Yakei E., Wood T., 1992). Γι' αυτό χρειάζεται πριν ο εκπαιδευτικός τα εισαγάγει στην τάξη να γνωρίζει και να λαμβάνει υπόψη του, εκτός των άλλων παραγόντων και τους περιορισμούς που συνοδεύουν την χρήση τους. Επιπλέον να έχει επιλέξει κατάλληλα πεδία εμπειρίας και εννοιολογικά πλαίσια για να σχεδιάσει τις δραστηριότητες και να θεμελιώσει τις πολιτιστικές αλληλεπιδράσεις και πρακτικές της τάξης.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Συγκεκριμένα χειροπιαστά αντικείμενα, διαφάνεια, αναπαραστάσεις, νοητικά αντικείμενα, η έννοιας της γωνίας.

SUMMARY

This presentation describes the process of planning and developing as well as the preliminary results of a pilot research. The aim of this research is to explore the conditions, the limitations and the effectiveness of the use of concrete materials (structured or unstructured materials, manipulatives, natural and other objects and materials) in the process of teaching-learning the angles in an ordinary first grade class of a middle level public school. Preliminary findings have shown- in accordance with the international bibliography- that the use of concrete materials has advantages and disadvantages. Therefore it is necessary for the teacher before introducing them in the classroom to know and take into consideration the limitations that accompany the concrete materials which are related with their representational characteristics(nature,form), their representational function(epistemic fidelity, transparency) and their mediated role(mediated activity).

KEYWORDS: Concrete materials, transparency, manipulatives, representations, mental objects, concepts of angle.

ΤΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Α. ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΑ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΑ ΧΕΙΡΟΠΙΑΣΤΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ

Στα μαθηματικά της εκπαίδευσης, η σημασία των πραγματικών προβλημάτων και των πρακτικών δραστηριοτήτων που συνδέονται με υλικά αντικείμενα και που διευκολύνουν την κατανόηση κάνοντας δυνατή την μετάβαση από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο, έχει αναγνωριστεί και προτείνεται από φιλόσοφους, μαθηματικούς, ψυχολόγους, παιδαγωγούς και ένα πλήθος ερευνητών (Comenius, Froedel, Pestalozzi, Cattegno, Montessori, Piaget, Dewey, Bruner, Dienes, κ.α.). Παρ' όλα αυτά, έρευνες αποτυπωμένες στην διεθνή βιβλιογραφία, σχετικές με την αποτελεσματικότητα της μάθησης με χρήση χειροπιαστών υλικών και αντικειμένων είναι αντιφατικές, και αναφέρουν επιτυχίες και αποτυχίες (, Freidman 1978, Sowell 1989). Οι παραδοσιακές αντιλήψεις που στηρίζονται στην θεωρία της επεξεργασίας της πληροφορίας (Resnick & Omanson 1987, Lesh, Behr, & Post 1987) για την χρήση των συγκεκριμένων αντικειμένων εστιάζονται στις εγγενείς ποιότητες που επιδεικνύει το υλικό και πως αυτές θα προωθήσουν την γνωστική ικανότητα του μαθητή καθιστώντας τον ικανό να δει τις υποκείμενες αρχές και σχέσεις μέσω αυτών. Η υποτιθέμενη διαφάνεια των αντικειμένων εξαρτάται από την τυπική αντιστοίχιση μεταξύ των απτών χαρακτηριστικών των φυσικών αντικειμένων και της

γνώσης στόχου όπως κατασκευάστηκε από τους ειδικούς. Η τυπική θεσμοποιημένη αποκρυσταλλωμένη μαθηματική γνώση λαμβάνεται ως το σημείο αφετηρίας για την ανάπτυξη διδακτικών δραστηριοτήτων. Είναι μια από τα πάνω (top-down) προσέγγιση η οποία συνδέεται στην ουσία με την ιδέα της μεταφοράς γνώσης Gravenmeijer (1994). Τις τελευταίες δεκαετίες ο ριζοσπαστικός και ο κοινωνικός Εποικοδομητισμός (Radical, social, Constructivism) (Glaserfeld, 1995, Cobb P., Yackel E., Wood T., (1992) έδωσαν ώθηση στην χρήση των υλικών αντικειμένων για την ενεργητική μάθηση και την διδασκαλία μαθηματικών εννοιών διερευνώντας αποτελεσματικούς τρόπους χρήσης τους επισημαίνοντας όμως παράλληλα ότι υπάρχουν όρια και περιορισμοί που τα συνοδεύουν. Οι μαθηματικές έννοιες που είναι για άλλους ενσωματωμένες και για άλλους ενσφηνωμένες στις διδακτικές αυτές αναπαραστάσεις είναι φανερές μόνο για τους ειδικούς που ήδη γνωρίζουν την ύπαρξη τους και είναι ικανοί να τις αναγνωρίσουν. Για τους μαθητές είναι απλά αντικείμενα. Με άλλα λόγια από μόνα τους τα αντικείμενα δεν μεταφέρουν γνώση. Οι Lesh, Behr, & Post 1987 επίσης αναφέρουν: «Μία διαφανής αναπαράσταση δεν θα πρέπει να έχει ούτε περισσότερο ούτε λιγότερο νόημα από την (τις)ιδέα (έες) ή δομή(ές) που αναπαριστά». Ο Roschelle (1990) έχει τονίσει ότι αυτή η άποψη έχει υποβιβάσει το θέμα της διαφάνειας του αντικειμένου σε θέμα μέτρησης της επιστημολογικής του πιστότητας. Έτσι, αναφέρει ο Meira (1998), ή έννοια της διαφάνειας είναι περιορισμένη εντός των ορίων μιας τυπικής αντιστοίχισης μεταξύ της επίδειξης του αντικειμένου και τομέων γνώσης και αφήνει από έξω την διαδικασία μέσω της οποίας μαθητής διαπραγματεύεται το νόημα της επίδειξης του αντικειμένου μέσα στην δραστηριότητα που καλείται να υλοποιήσει. Ο Meira (1998), υποστηρίζει ότι η διαφάνεια των αντικειμένων δεν μπορεί να καθορισθεί από την τυπική ανάλυση των εγγενών ποιοτήτων τους. Για τον Meira (1998), η διαφάνεια των συγκεκριμένων αντικειμένων είναι ένα αναδύομενο φαινόμενο περίπλοκα συνυφασμένο με τις τρέχουσες δραστηριότητες του μαθητή και την συμμετοχή του στις εξελισσόμενες πολιτιστικές πρακτικές. Δηλαδή τα αντικείμενα γίνονται αποτελεσματικά ,σχετικά και διαφανή μέσω της χρήσης τους σε ειδικές δραστηριότητες και σε σχέση με τους μετασχηματισμούς στους οποίους υποβάλλονται από τους χρήστες.

B. ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι η γωνία είναι μία πολύπλευρη έννοια. Ο Ευκλείδης ορίζει την επίπεδη γωνία ως την αμοιβαία κλίση της μιας προς την άλλη δύο ευθειών στο επίπεδο οι οποίες συναντούν ή μία την άλλη και... (ορ. 8) χωρίς να ορίζει πουθενά στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων την έννοια της αμοιβαίας κλίσης η απλώς της κλίσης την οποία χρησιμοποιεί όμως ως ορίζουσα έννοια της έννοιας της γωνίας. Ορίζει όμως την κλίση της ευθείας γραμμής ως προς το επίπεδο στο 11^ο βιβλίο των Στοιχείων που αφορά στην Στερεομετρία. Ο Freudenthal (1983), υποστηρίζει ότι: « υπάρχουν περισσότερες από μία έννοιες της γωνίας» και ότι «τουλάχιστον τρεις έννοιες της γωνίας είναι πρακτικά και γι' αυτό και εκπαιδευτικά σημαντικές». Μάλιστα προτείνει και διαφοροποιημένη ορολογία προτείνοντας τους όρους απόλυτες γωνίες, γωνίες και περιστροφικές (turn around) γωνίες αντιστοίχως για τις γωνίες της στοιχειώδους γεωμετρίας, της Τριγωνομετρίας (Goniometry) και της αναλυτικής γεωμετρίας. Οι Henderson & Taimina (2005) θεωρούν ότι υπάρχουν τουλάχιστον τρεις οπτικές γωνίες υπό τις οποίες μπορούμε να ορίσουμε την γωνία : μία δυναμική έννοια της γωνίας, δηλαδή η γωνία ως κίνηση, η γωνία ως μέτρο και η γωνία ως γεωμετρικό σχήμα. Μιλάει επίσης για την προσανατολισμένη γωνία. Πολλοί ερευνητές επισημαίνουν στις εργασίες τους τις δυσκολίες που συνδέονται με την ενοποίηση των διαφορετικών οπτικών ορισμού για άλλους, των διαφορετικών πλευρών της έννοιας της γωνίας για άλλους ή των διαφορετικών εννοιών των γωνιών για άλλους.

Υπάρχει μία αφθονία ερευνών (Hoyles C. & Noss R., 1987, Rouchier A. 1985 κ.τ.λ.) πάνω στην έννοια της γωνίας ως περιστροφής (rotation) που δεν έχει το ισοδύναμο της σε έρευνες σε σύνηθες περιβάλλον τάξης με χαρτί και μολύβι. Είναι αποδεκτό από τις περισσότερες από αυτές τις έρευνες ότι η Logo συμβάλει στο να αντιμετωπισθούν λάθη του τύπου: « να λαμβάνουν οι μαθητές υπόψη τους τα μήκη των πλευρών των γωνιών για την σύγκριση τους» γιατί επιτρέπει στους μαθητές να δουν την γωνία ως περιστροφή. (Noss, 1987). Από την άλλη μεριά όμως άλλα αποτελέσματα ερευνών (Simmons M., & Cope p. 1990, Hoyles C. & Sutherland R., 1989) δείχνουν ότι η Logo προκαλεί μια σύγχυση στους μαθητές ανάμεσα στην γωνία του σχήματος στην παραπληρωματική της και στο συμπλήρωμα της σε σχέση με την πλήρη γωνία. Για την Douek,

N. (1998), « Η σχέση μεταξύ κλίσης (ειδικότερα η κλίση σε σχέση με το νόημα που έχει σε αναφορά με τον χώρο και το σώμα) και γωνίας αξίζει ειδικής προσοχής από γνωστικής και εκπαιδευτικής άποψης.» Γι' αυτό το λόγο ερευνά και περιγράφει πως οι διάφορες όψεις της έννοιας της γωνίας αναδύονται και εξελίσσονται σε μία τάξη 4^{ης} δημοτικού σχολείου κατά την διάρκεια ενός μακροχρόνιου διδακτικού πειράματος διάρκειας 15 μηνών. Μια άλλη κατηγορία ερευνών (Blanc M., 1986, , Berthelot & Salin 1992 κ.τ.λ.) είναι αυτή που ασχολείται με την έννοια της γωνίας τομέα. Αυτές οι έρευνες παρουσιάζουν σειρές διδασκαλίας προορισμένες για μαθητές ηλικίας 10-12 χρονών περίπου. Ο κύριος σκοπός τους είναι να επιτρέψουν την κατασκευή από τους μαθητές της έννοιας της γωνίας τομέα κυρίως δίνοντας ένα νόημα στην αναπαράσταση « ζεύγος ευθυγράμμων τμημάτων» της γωνίας, ακυρώνοντας την από μέρους των παιδιών σύγκριση των γωνιών μέσω του μήκους των πλευρών τους, δίνοντας σημασία στην σύγκριση μέσω εναπόθεσης (υπέρθεσης) και παρουσιάζοντας την γωνία ως χαρακτηριστικό ενός κλειστού σχήματος. Λίγες τέλος έρευνες ασχολούνται με την έννοια της γωνίας ως κλίση.

Γ. ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΙΣ ΓΩΝΙΕΣ

Οι Davey & Pegg (1991) κατέγραψαν μια ακολουθία από τέσσερις κατηγορίες ορισμών παιδιών για την γωνία: α) μία γωνία (corner) η οποία είναι μυτερή (pointy) και αιχμηρή (sharp) β) ένα σημείο όπου δύο ευθείες συναντώνται γ) ή απόσταση ή η περιοχή (area) μεταξύ δύο γραμμών και δ) η διαφορά μεταξύ της κλίσης δύο γραμμών. Ο Matos (1994) αναφέρει ότι 4^{ης} και 5^{ης} δημοτικού μαθητές αντιλήφθηκαν τις γωνίες α) ως σημεία, β) ως στρεφόμενα σώματα (turning bodies), γ) ως πηγή (source) δύο ακτίνων, δ) ως μία πορεία με απότομη κάμψη (αλλαγή πορείας) (bent path), και ε) ως δύο γραμμές που συνδέονται στα άκρα τους. Οι Mitchelmore & White (2003) κατέγραψαν τις παρακάτω κατηγορίες απαντήσεων όταν ζήτησαν από τους μαθητές να ορίσουν μία γωνία: α) απαντήσεις ακαθόριστες και θολές, μέχρι του σημείου να μην είναι κατανοητές (π.χ. είναι κάτι σαν τρίγωνο που χρησιμοποιείται για να μετράται το διάστημα, κάτι που γέρνει με κάποιο τρόπο) β) απαντήσεις που απλώς επισημαίνουν την παρουσία δύο πλευρών και υπονοούν μία γενικότερη κατάσταση (π.χ. δύο διαγώνιες γραμμές όπως ένα βουνό, δύο κομμάτια πράγματος που συναντώνται (which come together) γ) απαντήσεις που δείχνουν ότι μία γωνία συγκροτείται απλώς από δύο γραμμές που συναντώνται σε ένα σημείο (π.χ. είναι κάτι που έχει μία κορυφή και δύο πλευρές, ένας άξονας περιστροφής (pivot) ο οποίος έχει δύο βραχίονες (πλευρές) που εξέρχονται από αυτόν) δ) απαντήσεις που δείχνουν ότι μία γωνία συγκροτείται από δύο γραμμές που συναντώνται σε ένα σημείο και προσπαθούν να εκφράσουν μια γωνιακή σχέση μεταξύ των γραμμών (π.χ. μετράνε την στροφή από μία γραμμή σε μια άλλη, δύο ευθείες γραμμές οι οποίες συναντώνται σε ένα σημείο-κορυφή- η γωνία είναι το άνοιγμα μεταξύ των δύο γραμμών.)

Έρευνες με μαθητές σε υπολογιστικό περιβάλλον με χρήση Logo έδειξαν ότι οι μαθητές έχουν διάφορα νοητικά σχήματα σχετικά όχι μόνο με την γωνία αλλά και το μέγεθος της.

Μαθητές τρίτης τάξης Δημοτικού συχνά συνδέουν το μέγεθος μιας γωνίας α) με το μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων που σχηματίζουν τις πλευρές της, β) με το γέμισμα της πλευράς που βρίσκεται στο πάνω μέρος της οθόνης γ) με το εμβαδόν της τριγωνικής περιοχής που ορίζεται από τις σχεδιασμένες πλευρές, δ) με το μήκος μεταξύ των πλευρών (από σημεία μερικές φορές, αλλά όχι πάντα, που βρίσκονται σε ίση απόσταση από την κορυφή), ε) την εγγύτητα των δύο πλευρών, ή στ) την στροφή στην κορυφή. (Clements & Battista, 1989)

ΟΙ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΔΙΕΞΑΓΩΓΗΣ ΤΟΥ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ ΣΤΑ ΠΛΑΙΣΙΑ ΠΙΛΟΤΙΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΕΥΡΥΤΕΡΗΣ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η παρούσα εργασία παρουσιάζει τα αποτελέσματα από ένα μέρος μιας πιλοτικής έρευνας με την μορφή διδακτικού πειράματος το οποίο διεξήχθη σε μια τυπική σχολική τάξη, στην Α' τάξη του 5^{ου} Γυμνασίου Ρόδου και με την παρουσία και των 28 μαθητών της από την 1^η έως και την 15^η Μαΐου του 2004. **Σκοπός** της έρευνας ήταν να εισάγουμε έννοιες των γωνιών μέσω χειρισμού συγκεκριμένων χειροπιαστών αντικειμένων (σ.χ.α.) λαμβάνοντας υπόψη τις υφιστάμενες μέχρι εκείνη τη στιγμή αντιλήψεις των μαθητών για αυτές και να μελετήσουμε τις συνθήκες χειρισμού των χειροπιαστών υλικών καθώς και τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα από την χρήση τους στην δημιουργία νοητικών αντικειμένων γωνιών και κατ' επέκταση στην συμβολή τους στην οικοδόμηση εννοιών των γωνιών από μέρους των παιδιών.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η μεθοδολογία της έρευνας ήταν εθνογραφική. Είχε την μορφή διδακτικού πειράματος μικρής διάρκειας περιορισμένου σε ένα κεφάλαιο–τις γωνίες-(μελέτη περίπτωσης) του αναλυτικού προγράμματος μαθηματικών της Α` γυμνασίου, στα πλαίσια μιας ιδιαίτερης οπτικής της έρευνας δράσης όπου διδάσκων και ερευνητής είναι το ίδιο πρόσωπο.

Η διδασκαλία ήταν ένα μίγμα με μέρη παραδοσιακού τρόπου διδασκαλίας με μετωπική παρουσίαση κομματιών του περιεχομένου και με μέρη όπου κυριαρχούσε ο κατασκευαστικός και καθοδηγούμενα εξερευνητικός τρόπος μάθησης με την κατάλληλη χρήση συγκεκριμένων χειροπιαστών αντικειμένων(υλικών). Οι διδασκαλίες βιντεοσκοπούνταν ολόκληρες και αναλύονταν κατ' αρχάς σε ένα πρώτο επίπεδο την ίδια μέρα μαζί με το ημι-δομημένο ημερολόγιο του διδάσκοντα. Η συνολική ανάλυση και μελέτη των υλικών κατασκευής των μαθητών και των φύλλων δραστηριοτήτων τους, η μεταγραφή και παραπέρα ανάλυση ενδιαφερόντων στιγμιότυπων της διαδικασίας διδασκαλίας- μάθησης και των ημι-δομημένων ημερολογίων έγινε στο τέλος της πιλοτικής έρευνας.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ

Η διδακτική παρέμβαση επεκτάθηκε στις 6 πρώτες ενότητες. Η ανάλυση στο παρόν άρθρο καλύπτει την διδακτική παρέμβαση στις 4 πρώτες ενότητες.

ΟΙ ΑΠΟΦΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΓΩΝΙΑ ΠΡΙΝ ΤΗΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ ΜΕ ΧΕΙΡΙΣΜΟ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΩΝ ΧΕΙΡΟΠΙΑΣΤΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ

Η πρώτη διδακτική παρέμβαση ξεκίνησε με μια προσπάθεια να έρθουν στο προσκήνιο της συλλογικής διαπραγμάτευσης μέσα στην τάξη και να κατατεθούν οι μέχρι εκείνη την στιγμή δυνάμενες να εκφραστούν διατυπώσεις περί γωνίας των μαθητών, ώστε να γίνει δυνατή η μέσω της ερμηνείας τους προσέγγιση με τις ενδεχόμενες υπονοούμενες αντιλήψεις τους περί της έννοιας της γωνίας. Ως απάντηση στο ερώτημα μας « Τι είναι γωνία;» καταγράψαμε στον πίνακα για να είναι ορατές από όλους και κατηγοριοποιήσαμε τις παρακάτω προφορικές εκφράσεις- διατυπώσεις των μαθητών : Γωνία είναι,

- Δύο ευθείες με κοινή αρχή
- Δύο ευθείες που τέμνονται
- Δύο ημιευθείες που τέμνονται
- Δύο ημιευθείες με κοινή αρχή
- Η μύτη που σχηματίζουν οι δύο ευθείες
- Το σημείο που τέμνονται δύο ευθείες
- Το σημείο που τέμνονται δύο ημιευθείες
- Το άνοιγμα που σχηματίζουν δύο ευθείες
- Το άνοιγμα που σχηματίζουν δύο ημιευθείες

Αυτές οι διατυπώσεις μας φανέρωσαν τις υπονοούμενες αντιλήψεις των μαθητών της τάξης σε σχέση με την έννοια της γωνίας, καταγραμμένες όπως είδαμε και παραπάνω και στην διεθνή βιβλιογραφία. Εάν συμβατικά παραβλέψουμε – ως άλλης διάστασης θέμα - την διάκριση μεταξύ ευθείας και ημιευθείας τότε ενδεχομένως μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι υπονοούμενες αντιλήψεις των μαθητών της τάξης μας σε σχέση με την γωνία ήταν τριών ειδών :

- Αυτές που βλέπουν ως γωνία τις πλευρές της γωνίας (η πλέον ισχυρή και διαδεδομένη)
- Αυτές που βλέπουν ως γωνία ένα σημείο την κορυφή της γωνίας
- Και τέλος αυτές που βλέπουν την γωνία ως το μέρος του επιπέδου που περιέχεται μεταξύ των ημιευθειών ή ως το μέτρο κάποιου μεγέθους.

Μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι οι μαθητές με την πρώτη αντίληψη κατά την γνώμη μας πιθανόν οντογενετικής και διδακτικής προέλευσης, εστιάζουν την προσοχή τους στο «σύνορο» της περιοχής του επιπέδου που καλούμε γωνία. Με την δεύτερη αντίληψη κατά την γνώμη μας μάλλον κοινωνικής προέλευσης(αλλά ενδεχομένως και διδακτικής) έχουσας σχέση με τις σημασίες της λέξης στην καθημερινή χρήση της, εστιάζουν σε ένα «ιδιαίτερο» σημείο του συνόρου, την κοινή αρχή των δύο ημιευθειών. Η τρίτη αντίληψη πιθανόν φανερώνει σχέση με επιστημολογικής προέλευσης προβλήματα που συνδέονται με τις διαφορετικές ερμηνείες των γωνιών άλλοτε ως μέτρων μεγεθών και άλλοτε ως γεωμετρικών σχημάτων, μια και ενδεχομένως μία εναλλακτική ερμηνεία για κάποιους μαθητές να είναι, η λέξη « άνοιγμα» να υπονοεί και να

εκφράζει στις δικές τους εκφραστικές δυνατότητες αυτό που στα τυπικά μαθηματικά ονομάζουμε «περιοχή» του επιπέδου. Πράγματι κατά την ιστορική τους εξέλιξη (στα πλαίσια της ευρύτερης εργασίας έχει εκπονηθεί ιστορική και επιστημολογική ανάλυση των εννοιών των γωνιών) οι έννοιες των γωνιών χαρακτηρίστηκαν από μια πολυμορφία ερμηνειών- ως σχήμα, ως μέτρο μεγέθους, ως κίνηση, προσανατολισμένη ή όχι- που συνδέονται με τα προβλήματα και τις θεωρίες στις οποίες χρειάστηκε κάθε φορά να χρησιμοποιηθούν.

Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ

Θα παρουσιάσουμε -λόγω έλλειψης χώρου- δύο μόνο από τα στιγμιότυπα που κατά την γνώμη μας έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

ΣΤΟΧΟΣ 1^{ος}

Να αναγνωρίζουμε και να κατασκευάζουμε συγκεκριμένες αναπαραστάσεις μιας γωνίας ερμηνεύοντας την γωνία ως μία περιοχή του επιπέδου που ορίζεται από δύο ημιευθείες του επιπέδου με κοινή αρχή.

Μετά την παρουσίαση της έννοιας της γωνίας -ως της περιοχής του επιπέδου, κυρτής ή/και μη κυρτής, (χωρίς να χρησιμοποιηθεί αυτή η ορολογία) που περιορίζεται από δύο τεμνόμενες ημιευθείες - από τον δάσκαλο των μαθηματικών με την βοήθεια ενός έγχρωμου χαρτονιού σε μέγεθος περίπου μιας κόλλας Α3 κομμένου κατά μήκος δύο τεμνόμενων ημιευθειών, ζητήθηκε από τους μαθητές να προχωρήσουν στην 1^η δραστηριότητα.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1^η

Να σχεδιάσετε στο χαρτόνι ένα κύκλο ακτίνας 3cm. Να σημειώσετε και να ονομάσετε Κ το κέντρο του και να σχεδιάσετε δύο ακτίνες. Να κόψετε με το ψαλιδάκι σας τον κυκλικό δίσκο, και ακολούθως να κόψετε τον κυκλικό δίσκο σε δύο κομμάτια κατά μήκος των δύο ακτίνων. Τι παριστάνουν τα δύο κομμάτια στα οποία κόψατε τον κυκλικό δίσκο;

ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ 1^ο

Μετά την ολοκλήρωση της δραστηριότητας ο δάσκαλος ξεκίνησε μια προφορική διδακτική παρέμβαση με την συμμετοχή ολόκληρης της τάξης.

(Κωδικοποίηση:

δ = μιλάει ο δάσκαλος, μ_x = μιλάει ο μαθητής που στο ημιδομημένο πρωτόκολλο παρατηρήσεων και σχολίων με το πλάνο της τάξης ευρίσκεται στην θέση χ , η αρίθμηση στις θέσεις έχει την κατεύθυνση από εμπρός προς τα πίσω, από την 1^η σειρά προς την 5^η σειρά και από αριστερά προς τα δεξιά από την 1^η στήλη μέχρι την 6^η στήλη. μ : ένας μαθητής, ο δάσκαλος δεν κατάλαβε ποιος ήταν συγκεκριμένα. $\mu\mu$ = μιλούν πολλοί μαθητές συγχρόνως ή ο ένας αμέσως μετά τον άλλο χωρίς την ενδιάμεση παρέμβαση του δάσκαλου, (...) Οι προτάσεις μέσα στις παρενθέσεις αφορούν σε παρατηρήσεις και σχόλια του δάσκαλου-ερευνητή των μαθηματικών της εκπαίδευσης)

δ : - πάρτε τα 2 κομμάτια από χαρτόνι που κόψατε από τον κύκλο στα χέρια σας και πέστε μου τι παριστάνει αυτό που κρατάτε ; (Σηκώνονται μερικά χέρια για να απαντήσουν, ο μ_8 βάζει την μη κυρτή γωνία να κάθετα στην μύτη του, γυρίζει γύρω- γύρω δείχνοντας την γελώντας και ζητάει ψαλιδάκι από τους κοντινούς συμμαθητές του)

δ : - υπάρχουν παιδιά που δεν ξέρουν τι κρατούν στα χέρια τους; (ο δάσκαλος προσπαθεί να τους προκαλέσει(κεντρίσει) για να απαντήσουν)

μ_{13} : - (Δείχνει αφηρημένη) έχω ρωτήσει μ_{13} για το τι παριστάνει αυτό που κρατάτε στα χέρια σας... (Ο δάσκαλος παρεμβαίνει προκαταβολικά γιατί από την πείρα του γνωρίζει ότι η μ_{13} δημιουργεί κενά στις γνώσεις της και λόγω αδυναμίας συγκέντρωσης της προσοχής της, και δεν θέλει από το εισαγωγικό μάθημα να της δημιουργηθούν νέα κενά)

μ_{21} : (βιαστικά) δύο ημιευθείες (η μ_{21} είναι μία μαθήτρια με χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά – στην οποία ο δάσκαλος εκτιμά ότι συμβάλλει η μη επαρκής προετοιμασία από το σπίτι-, με έντονο εγώ και πολύ παρορμητική)

δ : δύο ημιευθείες λέει η μ_{21} . Τι λένε οι άλλοι ;

μ_9 : δύο γωνίες (η μ_9 είναι μετανάστης με προβλήματα κατανόησης γλώσσας)

δ : άλλος;

μ_{25} : (διστακτικά) ένας κυκλικός δίσκος (η μ_{25} έχει υψηλή επίδοση στα μαθηματικά και είναι πολύ εσωστρεφής)

δ : ποιο από τα δύο είναι κυκλικός δίσκος;

μ₂₅: αν τα ενώσουμε... Αν τα ενώσουμε...

δ: Αλλά εγώ ζητώ να μου πείτε: αυτά που κρατάτε τι παριστάνουν;

μ₂₅: μία γωνία...

δ: μία γωνία, λες...

μ₂₃: δύο γωνίες! (η μ₂₃ έχει ψηλή επίδοση στα μαθηματικά)

μ₂₄: δύο γωνίες! (απαντά μάλλον μηχανικά... πιθανόν χωρίς να κατανοεί, λόγω του ότι εμπιστεύεται την μ₂₃ ως καλή στα μαθηματικά, ο μ₂₄ ανήκει στην μουσουλμανική μειονότητα με χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά μμ: δύο γωνίες! – δύο γωνίες!

δ: κάποιος μας είχε πει : δύο ημιευθείες !

μ₂₁: Εγώ!

δ: Τι λες τώρα;

μ₂₁: (μουτρωμένη και πεισματωμένη, επαναλαμβάνει την προηγούμενη απάντηση της αλλά διστακτικά και αβέβαια) δύο ημιευθείες...

δ: (επαναλαμβάνει, έκπληκτος από την απάντηση) Επιμένεις...δύο ημιευθείες...(επαναλαμβάνει αμήχανα γιατί δεν είναι έτοιμος να το χειριστεί και θέλει να κερδίσει χρόνο για να αποφασίσει την ανατροφοδότηση που πρέπει να δώσει)

δ: (ενστικτωδώς, σχεδόν αυτόματα αποφασίζει πιθανόν με υποσυνείδητο στόχο να της δημιουργήσει γνωστική σύγκρουση) για δείξε μας τις ημιευθείες...

μ₂₁: (σηκώνει το ένα κομμάτι χαρτονιού και δείχνει με το δάχτυλο της τις άκρες του χαρτονιού – που πριν το κόψιμο ήταν οι αχτίνες του κυκλικού δίσκου – κατά μήκος των οποίων το έκοψε). Αυτή και αυτή !

δ: Ωραία! Αυτό μόνο υπάρχει όμως; Αυτό και αυτό; (δείχνει εκεί που έδειξε και η μαθήτριά) Ή υπάρχει και αυτό εδώ μέσα; (δείχνει στην περιοχή ολόκληρου του επιπέδου χαρτονιού, κάνοντας ήδη το πρώτο διδακτικό του λάθος)

μ₂₁: και αυτό που υπάρχει εδώ μέσα.

δ: περιλαμβάνεται αυτό σε κάποια ημιευθεία ;

μ₂₁: όχι!

δ: οι συμμαθητές σου λένε ότι όλο αυτό το κομμάτι μαζί παριστάνει μία γωνία ...(ο δάσκαλος βλέπει την μ₂₁ αμήχανη και λίγο ντροπιασμένη επειδή νιώθει μόνη της, και καταλαβαίνει ότι πρέπει να ακολουθήσει άλλη προσέγγιση) για κοίταξε αυτό εδώ! (Δείχνει τα δύο μεγάλα κομμάτια χαρτόνι που έκοψε προηγουμένως ο ίδιος μπροστά στα μάτια όλης της τάξης για να παρουσιάσει την έννοια της γωνίας) Τι παριστάνει αυτό όλο; (δείχνει το ένα κομμάτι δηλ. την κυρτή περιοχή του επιπέδου χαρτονιού)

μ₂₁: (διστακτικά) γωνία...

δ: και αυτό; (δείχνει το άλλο κομμάτι δηλ. την μη κυρτή περιοχή του επιπέδου χαρτονιού).

μ₂₁: (ζωηρά) μία γωνία!

δ : τι παριστάνουν λοιπόν και τα δύο κομμάτια;

μ₂₁: δύο γωνίες!

δ: Συμφωνούμε λοιπόν όλοι ότι τα δύο κομμάτια χαρτόνι παριστάνουν δύο γωνίες;

μμ: ναι! δύο γωνίες!

ΣΤΟΧΟΣ 2^{ος}

. Να κατασκευάσουμε και να χειριστούμε μια συγκεκριμένη αναπαράσταση γωνίας μεταβάλλοντας την σταδιακά ώστε να αντιληφθούμε εποπτικά τι εννοούμε όταν λέμε άνοιγμα γωνίας. Να αναγνωρίζουμε και να ερμηνεύουμε την κατασκευή μιας γωνίας δυναμικά από την περιστροφική κίνηση μιας ημιευθείας γύρω από την αρχή της.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2^η

Να σχεδιάσετε δύο κύκλους - σε χαρτόνι διαφορετικού χρώματος τον καθένα - με ακτίνα 3cm . Ακολούθως να σημειώσετε το κέντρο τους, να το ονομάσετε Κ και να σχεδιάσετε μία αχτίνα τους. Να κόψετε προσεχτικά με το ψαλιδάκι σας τους κυκλικούς δίσκους και ακολούθως να κόψετε τον καθένα από αυτούς κατά μήκος της αχτίνας του και να περάσετε τον ένα μέσα στον άλλο. Τι παρατηρείτε;

ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ 2^ο

Ενώ εργάζονταν πάνω στην 2^η δραστηριότητα και πριν ζητήσω προφορικά να πλέξουν τον ένα κυκλικό δίσκο μέσα στον άλλο ο μ₇ πλέκει τους δύο κυκλικούς δίσκους και αρχίζει να

περιστρέφει τον ένα από τους δύο. Φαίνεται ότι η ίδια η δυναμική φύση του υλικού και η αισθητηριακή αντίληψη του μαθητή διέγειραν την μαθηματική, γεωμετρική για την ακρίβεια, διαίσθηση του.

δ: για τοποθέτησε ξανά τους κυκλικούς δίσκους μ_7 όπως το έκανες προηγουμένως ... (ο μ_7 πλέκει τον ένα κυκλικό δίσκο με τον άλλο)

δ: και τι έκανες; Δείξε μας τι έκανες... (ο μ_7 αρχίζει να περιστρέφει τον ένα κυκλικό δίσκο πάνω στον άλλο όπως είναι πλεγμένοι μεταξύ τους)

δ: ωραία! Προσπαθήστε τώρα όλοι να χειριστείτε με τον ίδιο τρόπο τους δικούς σας κυκλικούς δίσκους (αρχίζουν και κάνουν όλοι ότι έκανε ο μ_7)

δ: (αφού ο δάσκαλος τους άφησε λίγη ώρα να τους χειριστούν μόνοι τους) έχουμε όλοι δύο κυκλικούς δίσκους στα χέρια μας; (όσοι ξέχασαν και έκαναν τους δύο κυκλικούς δίσκους με χαρτόνι του ίδιου χρώματος ανταλλάσσουν μεταξύ τους κυκλικούς δίσκους για να έχει ο καθένας 2 κυκλικούς δίσκους διαφορετικού χρώματος)

δ: ας τοποθετήσουμε τώρα όλοι τους δύο κυκλικούς δίσκους έτσι. (ο δάσκαλος δείχνει πως δημιουργείται η αναπαράσταση μιας οξείας γωνίας μικρής σαν μια σφήνα)

δ: ας μεγαλώσουμε τώρα όλοι μαζί το μέρος του χαρτονιού που φαίνεται από κάτω με διαφορετικό χρώμα περιστρέφοντας σιγά – σιγά τον από πάνω κυκλικό δίσκο. (και επιδεικνύει στους μαθητές τι εννοεί περιστρέφοντας σιγά –σιγά τον πάνω κυκλικό δίσκο και μεγαλώνοντας την αναπαράσταση της γωνίας)

δ:πέστε μου, σας παρακαλώ πολύ, αυτό το μέρος του χαρτονιού (δείχνει στην αναπαράσταση της κυρτής γωνίας) τι σχήμα είναι ; (από αυτό το σημείο και ύστερα η διδασκαλία είχε απροσδόκητη για τον δάσκαλο –ερευνητή εξέλιξη)

μμ: τρίγωνο! τρίγωνο!

δ: (αμήχανα) τρίγωνο;

μ₇: γωνία ! σχηματίζεται μία γωνία... σχηματίζεται μία γωνία! (ο μ_7 είναι παιδί μετανάστη από την Αρμενία και με υψηλές επιδόσεις σε όλα τα μαθήματα)

δ: έχουμε δύο απόψεις λοιπόν τρίγωνο και γωνία!

μ: (ένας μαθητής βιαστικά) είναι ένα τρίγωνο!

μ₁₆: σχηματίζονται δύο γωνίες. (ήταν ο μόνος που παρατήρησε και διέκρινε και την κυρτή περιοχή και την μη κυρτή περιοχή)

δ: για πες μας ποιες γωνίες... σήκωσε το ψηλά και δείξε μας ποιες είναι οι γωνίες

μ₁₆: αυτή και αυτή ... (δείχνει με τον δείκτη του χεριού του τις δύο γωνίες και συνεχίζει) η κίτρινη γωνία και η μπλε γωνία (δείχνοντας πρώτα την οξεία και κυρτή και μετά την αμβλεία που ήταν και μη κυρτή)

μ₁₆: σχηματίζονται δύο γωνίες... μία μεγαλύτερη (δείχνει με τον δείκτη του την μη κυρτή γωνία) η μπλε γωνία και η κίτρινη γωνία. (καθ' όλη την διάρκεια του στιγμιότυπου κανένας μαθητής δεν χρησιμοποίησε την τυπική ορολογία για τα είδη της γωνίας, έτσι και ο δάσκαλος προτίμησε να μην την εισάγει ακόμα)

δ: (δεν βιάζεται να εισάγει τις τυπικές διακρίσεις στην ορολογία των γωνιών πριν ξεκαθαρίσουν το είδος του γεωμετρικού αντικειμένου που εξερευνούν) κάποιιοι μας είπαν (ήταν η πλειοψηφία) ότι βλέπουνε τρίγωνο. Ποιο είναι το τρίγωνο; Που είναι το τρίγωνο; Δείξτε μας το.

μ₂: άλλαξα τώρα γνώμη. σχηματίζεται και τρίγωνο, αλλά μέσα από το τρίγωνο... (ο μ_2 είναι μαθητής με ψηλές αποδόσεις στα περισσότερα μαθήματα)

δ: (ο δάσκαλος βιάζεται και παρεμβαίνει πριν εκφράσει ο μ_2 ολοκληρωμένα την σκέψη του προσπαθώντας να του δημιουργήσει γνωστική σύγκρουση με παλαιότερες αφομοιωμένες γνώσεις του και έτσι χάνει μια ευκαιρία να εκφράσει ο μαθητής αυθόρμητα τις ιδέες του) για δείξε μας το τρίγωνο; Δείξε στους συμμαθητές σου το τρίγωνο που βλέπεις ... (ο μ_2 προσπαθεί να το δημιουργήσει περιστρέφοντας τους κυκλικούς δίσκους, αλλά είναι διστακτικός για να το δείξει)

μ₈ (σηκώνει ψηλά την κατασκευή του και δείχνει με τον δείκτη του την αναπαράσταση της οξείας γωνίας χωρίς να μιλά)...

δ: τι παριστάνει αυτό που μας δείχνεις μ₈;

μ₈: τρίγωνο!

δ: σήκωσε το ψηλά να το δουν όλοι ... αυτό το σχήμα εσύ το λες τρίγωνο ... για δείξε μας και εσύ μ₂ το δικό σου τρίγωνο... ψηλά!...ψηλά! (ο μ_2 δείχνει και αυτός την περιοχή που παριστάνει την οξεία γωνία) είναι τρίγωνο λέει ο μ_2 αυτό που μας δείχνει ! (η σύνταξη που χρησιμοποιεί στην

τελευταία πρόταση του ο δάσκαλος έγινε αυθόρμητα, υπονομεύει όμως την άποψη των δύο μαθητών και λειτουργεί ως νύξη προς την κατεύθυνση της απόρριψης της από τους υπόλοιπους μαθητές, πράγμα που φανερώνει την τάση του εκπαιδευτικού να βιάζεται να δίνει μόνος του τις απαντήσεις ή να κατευθύνει τις απαντήσεις μη παραχωρώντας στους μαθητές του τον αναγκαίο και ζωτικό γι αυτούς χρόνο για να επεξεργαστούν τις απαντήσεις τους)

μ₁: (κάθεται δίπλα στον μ₂ και είναι μαθητής με ψηλές επιδόσεις στα περισσότερα μαθήματα, ... του παίρνει την κατασκευή από το χέρι και λέει...) δεν είναι τρίγωνο ... για να είναι τρίγωνο πρέπει... (και δείχνει το τόξο του κυκλικού τομέα που παριστάνει την γωνία κρατώντας την κατασκευή με τρόπο που το τόξο να είναι από κάτω) ...από κάτω να είναι ίσιο για να σχηματιστούν τρεις πλευρές.

μ₂: άλλαξα γνώμη ... σχηματίζεται γωνία

δ: παραμένει όμως στην άποψη του ο μ₈...δείξε μας μ₈ αυτό που λες ότι παριστάνει τρίγωνο.

μ₈: (δείχνει με τον δείκτη του χεριού του)

δ: αυτό κατά τον μ₈, το μπλε, παριστάνει τρίγωνο...και του απαντά ο μ₁ ότι...

μ₁: αυτό δεν είναι τρίγωνο γιατί αυτό εδώ (δείχνει με τον δείκτη του το τόξο του κυκλικού τομέα) είναι καμπύλη.

δ: ενώ ένα τρίγωνο αποτελείται από 3 τι;

μ₁: ευθείες

δ: ευθύγραμμα.....; (δίνοντας άστοχα μια νύξη που στην ουσία ισοδυναμεί με την ίδια την απάντηση)

μμ: τμήματα ! ευθύγραμμα τμήματα!

δ: ενώ αυτό που μερικοί λέτε τρίγωνο έχει 2 ευθύγραμμα τμήματα και ένα καμπύλο τμήμα ένα τόξο...μπορεί να μοιάζει ότι παριστάνει ένα τρίγωνο αλλά δεν παριστάνει ...τι παριστάνει λοιπόν; (εδώ ο εκπαιδευτικός αναμένει ότι ο μαθητής αφού απορρίφθηκε ή μία άποψη άρα θα υιοθετήσει την άλλη... όπως και συνέβηκε...μια τέτοια εξέλιξη όμως δεν άφησε κανένα γνωστικό ίζημα στον μαθητή σε σχέση με την έννοια της γωνίας)

μ₈: είναι μία γωνία (ο μαθητής όμως έτσι, στην πραγματικότητα γι αυτό που πείστηκε είναι ότι η συγκεκριμένη αναπαράσταση δεν είναι αναπαράσταση τριγώνου και όχι ότι είναι αναπαράσταση γωνίας δηλαδή έδωσε αυτή την απάντηση στην λογική του επιχειρήματος «αφού δεν είναι Γιάννης θα είναι Γιαννάκης» στο δίλημμα που του τέθηκε ποια από τις δύο απόψεις είναι σωστή

δ: παριστάνει μία γωνία λοιπόν...συμφωνούμε όλοι σε αυτό; (ρωτά ικανοποιημένος που κατάφερε οι μαθητές του να δουν την αναπαράσταση της γωνίας, ενώ στην πραγματικότητα έπεσε και αυτός θύμα του γεγονότος ότι έβλεπε στο συγκεκριμένο αντικείμενο αυτό που ήδη γνώριζε και επειδή ακριβώς το γνώριζε! (Cobb P., Yakel E., Wood T., 1992) ενώ δεν συνέβαινε το ίδιο με τους μαθητές του...δεν αντιλήφθηκε ότι οι μαθητές του σε εκείνη τη φάση δεν μπορούσαν να προσεγγίσουν την έννοια της γωνίας παρά μόνο μέσω της στοχαστικής αφαίρεσης και όχι μέσω λογικού συμπερασμού)

μμ: ναι! ναι!

ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΤΟΥ 1^{ου} ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΠΙΛΟΤΙΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

.α) ΤΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ Η ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ ΚΑΙ ΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΤΩΝ Σ.Χ.Α. ΣΤΗΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΜΑΘΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ.

Η έννοια –μαθηματικό αντικείμενο-της γωνίας παραμένει για το σύνολο σχεδόν των μαθητών της Α΄ Γυμνασίου μία θολή και ασαφής στην περιγραφή της έννοια, δύσκολη στην κατανόηση και αυτό γιατί συνδέεται με αντιλήψεις σαν αυτές που αναφέραμε προηγουμένως και άλλες που έχουν σχέση με το ότι το σημείο που χρησιμοποιούμε για να δηλώσουμε την έννοια δηλαδή, ή λέξη «γωνία» ως σημαίνουν έχει πολλαπλά σημαινόμενα με ποικίλες σημασίες στην καθημερινή της χρήση που διαφέρουν από την σημασία του στην επιπεδομετρία του γυμνασίου π.χ. «πήγαινε στην γωνία του δωματίου», « μετά την γωνία το δεύτερο μαγαζί», «πρόσεχε μην χτυπήσεις στην γωνία του θρανίου», κ.λ.π. οι οποίες έχουν σχέση κυρίως με την σημασία της έννοιας της διέδρης γωνίας και της στερεάς γωνίας η οποίες εισάγονται πολύ αργότερα και σε μεγαλύτερες τάξεις. Επιπλέον, η γενική και ευρέως διαδεδομένη παρανόηση που ταυτίζει την αναπαράσταση του μαθηματικού αντικειμένου με το ίδιο το μαθηματικό αντικείμενο έχει ιδιαίτερη σημασία και παίρνει ειδικότερες μορφές όπως θα δούμε στην συνέχεια όταν οι μαθητές εργάζονται με σ.χ.α. γιατί οι συγκεκριμένες χειροπιαστές ή εικονικές αναπαραστάσεις του μαθηματικού αντικειμένου

ως υλικές οντότητες υπόκεινται σε χωροχρονικούς περιορισμούς και είναι δυνατόν να συλλάβουν οι μαθητές λανθασμένα νοητικά αντικείμενα για την οικοδόμηση της έννοιας της γωνίας. Η εισαγωγή στο μάθημα σ.χ.α. είχε θετικές επιπτώσεις στην αντιμετώπιση των παλαιότερων παρανοήσεων των μαθητών, παράλληλα όμως προκάλεσε νέες οντογενετικής, ψυχολογικής φύσης παρανοήσεις οφειλόμενες τόσο στην φύση όσο και στο σχεδιασμό την μορφή και την λειτουργία των σ.χ.α. που χρησιμοποιήθηκαν μέσω της διαδικασίας της μεταφοράς ως αναπαραστάσεις κατά την διάρκεια της μαθησιακής διαδικασίας. Τα χαρακτηριστικά των σ.χ.α. αφορούν τόσο στην φύση τους όσο και στην μορφή-σχήμα και χρώμα-και λειτουργία τους. Το υλικό τους, π.χ. χαρτί, χαρτόνι, κτλ. είναι αναγκαίο να μπορεί να παραστήσει-λαμβάνομένης φυσικά υπόψη της αδυναμίας του να παραστήσει την απειρία των σημείων του επιπέδου - το επίπεδο. Συγχρόνως να μπορεί να κοπεί σε κομμάτια για να μπορεί να παραστήσει -λαμβάνομένης πάλι υπόψη της αδυναμίας του να παραστήσει την απειρία των σημείων τους- τις περιοχές του επιπέδου τις περιορισμένες μεταξύ δύο ημιευθειών, δηλαδή τα διάφορα είδη επίπεδων γωνιών. Κεντρικό ρόλο στην μαθησιακή διαδικασία του 1^{ου} μαθήματος έπαιξε ένα σ.χ.α. με τη μορφή ενός δυναμικού μηχανισμού δύο χαρτονένιων κυκλικών δίσκων διαφορετικού χρώματος που επιτρέπουν την αναπαράσταση κυκλικών τομέων και επίκεντρων γωνιών πάνω σε αυτόν -κυρτών και μη κυρτών- που διακρίνονται από το διαφορετικό τους χρώμα. Πάνω σε αυτή την κατασκευή μπορούν να αναπαρασταθούν -λαμβάνομένης όμως υπόψη της αδυναμίας της να εκφράσει την απειρία των σημείων τους- όλα τα είδη επίπεδων ευθύγραμμων γωνιών.

Αναλύοντας τα στιγμιότυπα παρατηρούμε ότι ,στο πρώτο στιγμιότυπο εκφράζεται ξανά η πρώτη και πιο ισχυρή αντίληψη που ταυτίζει την έννοια της γωνίας με στοιχεία αυτής, δηλαδή τις πλευρές της. Η χρήση όμως του συγκεκριμένου χειροπιαστού υλικού- κομμάτια επίπεδου χαρτονιού - και η βιωματική κατασκευαστική (δημιουργική) σχέση που δημιουργούν με την αναπαράσταση της γωνίας-την κατασκευάζουν (σχεδιάζουν, κόβουν) οι ίδιοι , κρατούν την κάθε αναπαράσταση γωνίας σε διαφορετικό χέρι, ακουμπούν τις αναπαραστάσεις των ημιευθειών (πλευρών της γωνίας) (δηλ τις άκρες του χαρτονιού), της μύτης και της εσοχής (κορυφή της γωνίας) και τέλος της γωνίας (δηλ της γωνίας ως επίπεδης επιφάνειας του χαρτονιού)- φαίνεται να βοηθούν τους μαθητές. Έτσι οι μαθητές αντιλαμβάνονται πρώτον την γωνία ως μια περιοχή του επιπέδου και δεύτερον ότι ημιευθείες με κοινή αρχή ορίζουν δύο περιοχές του επιπέδου (γωνίες) και όχι μόνο μία. Γι αυτό το λόγο σχετικά σύντομα οι μαθητές φτάσανε στην από κοινού αποδοχή αυτών των γνώσεων. Όμως αυτή η αποδοχή-θεσμοποίηση (Brousseau G., 1998) όπως θα φανεί παρακάτω δεν ήταν ούτε σταθερή ούτε απαλλαγμένη νέων παρανοήσεων δημιουργημένων αυτή την φορά από τα ίδια τα σ.χ.α.

Στο δεύτερο στιγμιότυπο ο m_7 πλέκει τους δύο κυκλικούς δίσκους και αρχίζει να περιστρέφει τον ένα από τους δύο. Φαίνεται ότι η ίδια η δυναμική φύση του υλικού (επιτρέπει χωροχρονική μεταβολή) και η αισθητηριακή αντίληψη του μαθητή (όραση, αφή) διέγειραν την μαθηματική του (γεωμετρική για την ακρίβεια) διαίσθηση του και προκάλεσαν αρχικά κατάλληλο χειρισμό του σ.χ.α., και στην πορεία σύλληψη της γωνίας ως νοητικό αντικείμενο και τη σωστή απάντηση στο ερώτημα του δάσκαλου-ερευνητή. Το ίδιο συνέβηκε και με τον m_{16} . Η δυναμική φύση του υλικού και τα δύο διαφορετικά χρώματα των γωνιών η αισθητηριακή του αντίληψη και η γεωμετρική του διαίσθηση του επέτρεψαν να αντιληφθεί πρώτος από όλους τα ζευγάρια αναπαραστάσεων κυρτών και μη κυρτών γωνιών που δημιουργούνται σε κάθε νέα θέση από την περιστροφική κίνηση της μιας ημιευθείας.

Στο ίδιο μάθημα ο χειρισμός των αντικειμένων από μέρος των μαθητών προκάλεσε και έφερε αυθόρμητα στο προσκήνιο παλαιότερες γνώσεις τους (από το δημοτικό) σε σχέση με τα είδη των γωνιών, την αναγνώριση τους, τον έλεγχο τους με την βοήθεια του γνώμονα και την ορολογία τους.. Το γεγονός αυτό φανερώνει ότι ο χειρισμός των σ.χ.α. είναι δυνατόν να προκαλέσει πέραν των άμεσων αισθητηριακών ερεθισμάτων και εντυπώσεων και συνειρμούς και να συμβάλει στην ανάκληση παλαιότερων γνώσεων ή στην δημιουργία συνδέσεων με άλλες γνώσεις. Όμως η συγκεκριμένη υλική αναπαράσταση υπόκειται όπως είπαμε σε χωροχρονικούς περιορισμούς. Ενδέχεται να μην μπορεί να αναπαραστήσει αυστηρά δια μεταφοράς και μέσω ενός ισομορφισμού των στοιχείων τους το μαθηματικό αντικείμενο. Γεγονός που συμβαίνει στην συγκεκριμένη περίπτωση και αυτό γιατί, ενώ οι ημιευθείες που περιορίζουν την γωνία προεκτείνονται απεριόριστα προς την μία κατεύθυνση το σ.χ.α. - το χαρτόνι στην περίπτωση μας- έχει πεπερασμένες πλευρές (ευθύγραμμα τμήματα) και επιφάνεια. Ακόμα χειρότερα στην

περίπτωση μας το υλικό παρέπεμψε στην αναπαράσταση της έννοιας του κυκλικού τομέα – όπου ο ισομορφισμός είναι αυστηρός- και δια αυτής, μια και τους ήταν άγνωστη ως έννοια, στην πιο συγγενή με αυτήν και γνωστή στους μαθητές , δηλαδή στην έννοια του τριγώνου. Αυτοί οι εγγενείς περιορισμοί – σε σχέση με την αδυναμία αναπαράστασης της έννοιας του απείρου – που απορρέουν από την φύση και την λειτουργία των σ.χ.α. αλλά και από την μορφή που έχουν, εκφράστηκαν με τον πιο εναργή τρόπο στις απαντήσεις των μαθητών και στις νέες λανθασμένες αντιλήψεις στις οποίες τους οδήγησε καθώς και στην αδυναμία του δασκάλου να τις χειριστεί κατάλληλα. Οι πιο πολλοί μαθητές αντί για αναπαραστάσεις γωνιών είδαν αναπαραστάσεις τριγώνων στα σ.χ.α. τους. Επειδή δεν γνώριζαν ακόμα την έννοια του κυκλικού τομέα ταύτισαν – και όχι άδικα - τις αναπαραστάσεις των κυκλικών τομέων που έβλεπαν με τις αναπαραστάσεις των τριγώνων που είναι σχήματα πολύ συγγενικά. (Δεν έχει παρά να θυμηθεί κανείς τους τύπους του εμβαδού των δύο σχημάτων). Έβλεπαν κυρτά σχήματα και κλειστά περιγράμματα και φαντάζονταν κλειστές γραμμές. Επίσης και στα δύο στιγμιότυπα αλλά και καθ' όλη την διάρκεια του μαθήματος ήταν εμφανής στο δάσκαλο-ερευνητή η επικέντρωση της συντριπτικής πλειοψηφίας των μαθητών μόνο στην μία – την κυρτή - από τις δύο γωνίες που δημιουργούν οι τεμνόμενες στην αρχή τους ημιευθείες. Έδειχναν σαν να μην αντιλαμβάνονται από μόνιους τους την ύπαρξη της μη κυρτής γωνίας παρόλο που το υλικό και η δραστηριότητα ήταν σχεδιασμένα για να διευκολύνουν – κόψιμο των δύο αναπαραστάσεων των γωνιών στο πρώτο στιγμιότυπο, διαφορετικό χρώμα χαρτόνι των δύο αναπαραστάσεων των γωνιών στο δεύτερο στιγμιότυπο - τους μαθητές να αντιληφθούν την ύπαρξη και των δύο γωνιών. Κατά την γνώμη μου πιθανόν αυτή η συμπεριφορά να οφείλεται σε ψυχολογικούς (Gestalt theory) λόγους και σίγουρα σε στερεότυπα που αναπτύχθηκαν στους μαθητές από την επιλογή -προσανατολισμό των βιβλίων του δημοτικού να αναφέρονται μόνο σε γωνίες μέχρι 180° .

β) ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΚΑΙ ΧΕΙΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ Σ.Χ.Α. ΑΠΟ ΜΕΡΟΥΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ

Η εισαγωγή των δραστηριοτήτων με σ.χ.α. στην μαθησιακή διαδικασία, α) προκάλεσε μεγαλύτερη σωματική εμπλοκή των μαθητών σε αυτήν. Συνολικά το σώμα τους από την παθητική στάση ενός ακροατή διάλεξης ή ενός αναγνώστη, γραφιά ή στοχαστή γραπτού ή προφορικού λόγου ενεργοποιήθηκε και μια ποικιλία κινήσεων που προηγουμένως ήταν απύσυχες έκανε την εμφάνιση της. Ειδικότερα η ποικιλία και η ποσότητα των κινήσεων του χεριού και του ματιού καθώς και η ανάγκη για τον μεταξύ τους συντονισμό αυξήθηκε κατακόρυφα με αποτέλεσμα την αύξηση της ενεργητικότητας, της προσοχής και της συγκέντρωσης των μαθητών. β) αύξησε τα περιθώρια πρωτοβουλίας και τον χρόνο αυτόνομης δράσης των μαθητών και τους έδωσε την δυνατότητα να εκφράσουν αυθόρμητες ιδέες και σε κάποιους από αυτούς να οικοδομήσουν με αυθεντικό και προσωπικό τρόπο γνώσεις σχετικές με την εισαγόμενη έννοια. γ) προκάλεσε δραματική αύξηση των οπτικών, , ακουστικών, κιναισθητικών, γλωσσικών, κοινωνικών, συναισθηματικών και γνωστικών αλληλεπιδράσεων των μαθητών που κάθονται στο ίδιο ή σε γειτονικά θρανία αλλάζοντας το κλίμα στην τάξη με αποτελέσματα ευεργετικά για την μεταξύ τους συνεργασία και την ανταλλαγή γνώσεων και τεχνικών, την συναισθηματική τους χαλάρωση, την μείωση της έντασης, του στρες και της ανίας, την χαρούμενη διάθεση. Αυτές οι τρεις πολύπλευρες και σύνθετες νέες διεργασίες στο συνολικό σώμα της τάξης σε συνδυασμό με τα ερωτήματα των δραστηριοτήτων και τις αλληλεπιδράσεις -τις σχετικές με το μαθηματικό περιεχόμενο- με τον δάσκαλο και τους συμμαθητές τους οδήγησε αρκετά παιδιά σε ενεργοποίηση της σκέψης τους και κάποια από αυτά και σε στοχαστικές αφαιρέσεις.

γ) ΤΟ ΠΕΡΑΣΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΤΟ ΑΦΗΡΗΜΕΝΟ ΝΟΗΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ

Για να μεταβούν οι μαθητές από την συγκεκριμένη αναπαράσταση στο αφηρημένο γεωμετρικό νοητικό αντικείμενο, φαίνεται ότι πρέπει δια της μεταφοράς να κάνουν συγχρόνως δύο νοητικές διαδικασίες (νοητικές αφαιρέσεις). Η μία έχει σχέση με την κλειστή μορφή του σ.χ.α., δηλαδή, φαίνεται ότι πρέπει νοητικά να αφαιρέσουν (στοχαστική αφαίρεση) και να το φανταστούν χωρίς το τόξο. Η δεύτερη έχει σχέση με την φύση του σ.χ.α. Δηλαδή, φαίνεται ότι πρέπει νοητικά να αφαιρέσουν και να φανταστούν τις πλευρές του σ.χ.α. (ευθύγραμμα τμήματα με κοινό το ένα άκρο-κορυφή της γωνίας- στην πραγματικότητα) να προεκτείνονται απεριόριστα και να γίνονται οι ημιευθείες (πλευρές της γωνίας). Το δε κλειστό χωρίο (κυκλικός τομέας στην πραγματικότητα

) να ανοίγει προς την κατεύθυνση του τόξου και να γίνεται περιοχή του επιπέδου (γωνία) ορισμένη από τις δύο ημιευθείες με κοινή αρχή (κορυφή γωνίας). Όμως, και ο δάσκαλος αιφνιδιάστηκε από την απάντηση: «είναι ένα τρίγωνο», που έδωσαν οι μαθητές. Μη έχοντας έτοιμη στρατηγική, αυτοσχέδιασε προσπαθώντας να κάνει τους μαθητές να δουν αυτό που αυτός έβλεπε στο σ.χ.α., χωρίς να καταλαβαίνει ότι: «αυτός έβλεπε στο σ.χ.α. αυτό που ήδη ήξερε και ακριβώς γιατί το ήξερε. Έτσι έκανε λάθος να θεωρήσει -έχοντας στον νου του ο ίδιος την επίκεντρη γωνία- ότι οι μαθητές του, θα έβγαζαν το συμπέρασμα ότι πρέπει να είναι γωνία αυτό που - λογικά επιχειρηματολογώντας - απέρριψαν ότι είναι τρίγωνο. Ενώ βέβαια, συμβατικά, η επιστημονική κοινότητα το ορίζει ως κυκλικό τομέα. Η ουσία όμως ήταν άλλη! Δεν ήταν η στιγμή του λογικού συμπεράσματος Δυστυχώς γι αυτόν και τους μαθητές του έχασε την ευκαιρία να τους το επισημάνει καθώς ήταν ή κρίσιμη ώρα του περάσματος των μαθητών από την συγκεκριμένη αναπαράσταση του σ.χ.α. στην αφηρημένη μαθηματική έννοια. Ήταν η κρίσιμη για τους μαθητές του ώρα της νοητικής αφαίρεσης για την σύλληψη του νοητικού αντικειμένου. Ήταν η ώρα που το σ.χ.α. ολοκλήρωσε την θετική του λειτουργία ως συγκεκριμένη αισθητηριακή αναπαράσταση και η συγκεκριμένη υλική φύση του γίνεται πλέον εμπόδιο - λόγω των χωροχρονικών περιορισμών που την χαρακτηρίζουν - στην ολοκληρωμένη οικοδόμηση της έννοιας και ήταν η ώρα που έπρεπε οι μαθητές να την υπερβούν και να δημιουργήσουν μέσω μιας διαφορετικής παρέμβασης του δάσκαλου και της στοχαστικής τους αφαίρεσης το νοητικό αντικείμενο της γωνίας-απαλλαγμένο από τους προηγούμενους περιορισμούς του υλικού - που οδηγεί παραπέρα στην οικοδόμηση της μαθηματικής έννοιας της γωνίας.

Η ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΤΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

-Η εισαγωγή των σ.χ.α. φαίνεται να έχει θετικές και αρνητικές επιπτώσεις στην μαθησιακή διαδικασία μιας μαθηματικής έννοιας. Μπορεί να συμβάλουν στο ξεπέρασμα λανθασμένων αντιλήψεων των μαθητών μπορεί όμως να προκαλέσουν και νέες.

-Η επιλογή των χαρακτηριστικών των σ.χ.α. σε σχέση με την φύση, την μορφή και την λειτουργία τους καθορίζεται από την έννοια και το ευρύτερο εμπειρικό και εννοιολογικό πλαίσιο εντός του οποίου την εντάσσουμε.

-Η ποιότητα των χαρακτηριστικών των σ.χ.α. δεν αρκεί από μόνη της, φαίνεται όμως να μπορεί να συμβάλει στην διέγερση της μαθηματικής- ή ειδικότερα της γεωμετρικής διαίσθησης- των μαθητών και να ανοίξει υπό προϋποθέσεις τον δρόμο για την αναγκαία στοχαστική αφαίρεση.

-Η αναπαραστατική δυνατότητα των σ.χ.α. πέρα από το ότι δεν αρκεί από μόνη της ενδεχομένως να υπόκειται και σε περιορισμούς τους οποίους ο δάσκαλος οφείλει να έχει εξερευνήσει και να γνωρίζει πριν εισάγει τα σ.χ.α. στην μαθησιακή διδασκαλία.

-Οι περιορισμοί στις αναπαραστατικές δυνατότητες των σ.χ.α. φαίνεται ότι είναι δυνατόν να μετατρέψουν το σ.χ.α. σε εμπόδιο για την ολοκληρωμένη συγκρότηση του νοητικού αντικειμένου και ενδέχεται να οδηγήσουν σε λανθασμένες αντιλήψεις.

-Το ξεπέρασμα των λανθασμένων αντιλήψεων που έχουν την ρίζα τους στους περιορισμούς των παραστατικών δυνατοτήτων των σ.χ.α. φαίνεται να επιβάλλει την υπέρβαση των σ.χ.α. με στόχο την άρση των περιορισμών που δημιουργεί η φύση η μορφή και η λειτουργία τους

-Η εισαγωγή των σ.χ.α. στην μαθησιακή διαδικασία ενεργοποιεί σωματικά και πνευματικά τους μαθητές και συμβάλει στην ενεργητική τους μάθηση, αυξάνει την πρωτοβουλία και την αυτόνομη δράση τους, πολλαπλασιάζει τις αλληλεπιδράσεις μέσα στην τάξη..

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Brousseau G(1998), *Theorie de des situations didactiques*. Grenoble : La pense'e sauvage

Cobb P., Yackel E., Wood T., (1992) A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education *Journal for Research in Mathematics Education*,23,No1,2

Freudenthal H.,(1973) *Mathematics as an educational task* D. Reidel Publishing Company/ Dordrecht-Holland.

Freudenthal H.,(1983) *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* D. Reidel Publishing Company/ Dordrecht/Boston/Lancaster.

Glaserfeld, E. Von (1995) *Radical Constructivism. A way of Knowing and Learning*, The Falmer Press.

Gravenmeijer K.P.E., (1994) *Developing Realistic Mathematics education*,

Technipress, Culemborg, Utrecht.

Gravenmeijer K.P.E., (1997), Instructional design for reform in mathematics education. In M. Beishuizen, K.P.E. , Gravenmeijer & E.C.D.M. van Lieshout (eds) *The role of contexts and Models in the development of Mathematical Strategies and Procedures*. Freudenthal institute, Utrecht, 1997.

Vygotsky, L. S. (1978) *Mind and Society*. Cambridge MA, Harvard University Press.

Vygotsky, L. S.(2000) Επιμέλεια Βοσνιάδου Σ. Μετ.Μπίμπου Α.& Βοσνιάδου Σ. *Νούς στην Κοινωνία. η ανάπτυξη των ανώτερων ψυχολογικών διαδικασιών*. Gutenberg.

Sowell, E.J. (1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(5).

Resnick, L. B., & Omanson, S. (1987) Learning to understand arithmetic. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology*,(VOL. 3, PP. 41-95).Hillsdale, NJ:Erlbaum.

Roschelle, J. (1990, April) Designing for conversations. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Boston.

Henderson & Taimina (2005) *Experiencing geometry. Euclidean and non Euclidean with History*, Cornell University, Ithaca, New York

Hoyle C. & Noss R.(1987), Children working in a structured Logo environment: From doing to understanding. *Recherches en didactique des mathematiques*. 8(1/2) 131-174).

Rouchier A. (1985), *Theoreme du trajet total de la tortue et trace des polygones reguliers : Logo a l'ecole elementaire*. Orleans : IREM.

Noss, R. (1987) Children's learning of geometrical concepts through Logo, *Journal for Research in Mathematics Education*. 18 pp. 343-362.

Simmons M.,& Cope p. (1990), Fragile knowledge of angle in turtle geometry, *Educational studies in Mathematics*. 21(4) 375-382.

Hoyle C. & Sutherland R. (1989), *Logo, mathematics in the classroom*. Londres : Routledge.

Blanc M., 1986, *Angles au CM*. Nice : IREM

Berthelot R., & Salin M. H. (1992), *L'enseignement de l' espace et de la geometrie dans la scolarite' obligatoire*. Bordeaux : Univerite' de Bordeaux I.

Davey and Pegg (1991) *Angles on angles: Students' perceptions*, paper presented at the 14th Annual Conference of Mathematics Education Research Group of Australasia, Perth.