ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΣΤΗΝ ΑΠΟΡΡΙΨΗ ΙΣΧΥΡΙΣΜΩΝ: Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

Θεοδόσιος Ζαχαριάδης*, Δέσποινα Πόταρη*, Χαράλαμπος Σακονίδης**
* Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
**Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

Περίληψη

Στην εργασία αυτή συζητούνται τα ευρήματα τεσσάρων ερευνών που αφορούν στον τρόπο με τον οποίο μαθητές και εκπαιδευτικοί απορρίπτουν εσφαλμένους ισχυρισμούς. Αναδεικνύονται κοινά στοιχεία των ερευνών αυτών σχετικά με το ρόλο και στη σημασία των αντιπαραδειγμάτων στην απόρριψη ισχυρισμών καθώς και την κατασκευή κατάλληλων αντιπαραδειγμάτων. Μέσα από τις έρευνες προκύπτει ότι τα αντιπαραδείγματα συχνά δεν θεωρούνται ικανά για να απορριφθεί ένας ισχυρισμός. Επίσης αρκετές φορές δίνονται αντιπαραδείγματα που δεν υπάρχουν ή δεν έχουν τις απαιτούμενες ιδιότητες.

Λέξεις κλειδιά: αντιπαραδείγματα, απόρριψη ισχυρισμών, γνώση εκπαιδευτικών, γνώση μαθητών.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Ο όρος «παράδειγμα» αναφέρεται σε μια συγκεκριμένη περίπτωση μιας κλάσης που βοηθά το συλλογισμό και τη γενίκευση. Σχετικά με τα παραδείγματα είναι τα μη παραδείγματα, τα οποία εξυπηρετούν στην αποσαφήνιση των ορίων μιας έννοιας ή διαδικασίας και στην ανάδειξη κρίσιμων χαρακτηριστικών τους, καθώς και τα αντιπαραδείγματα που προϋποθέτουν μια εικασία και αφορούν στην απόρριψή της. Τα δυο τελευταία είναι χρήσιμα για την ανάδειξη αιχμηρών διακρίσεων και την εμβάθυνση στην κατανόηση των μαθηματικών οντοτήτων.

Κάθε παράδειγμα στοχεύει στην ανάδειξη συγκεκριμένων πτυχών μιας έννοιας ή διαδικασίας αλλά, ταυτόχρονα εμπεριέχει στοιχεία που δεν συνδέονται με αυτές. Ένα παράδειγμα μπορεί να γίνει κατανοητό ως ένα σύνολο γεγονότων ή χαρακτηριστικών που θεώνται μέσα από ένα συγκεκριμένο φακό (Zodik & Zaslavsky, 2008). Τα άσχετα στοιχεία που φέρει ένα παράδειγμα θεωρούνται ως «θόρυβος» που όσο μεγαλώνει, τόσο πιο δύσκολο γίνεται να σχηματοποιηθεί η αντίστοιχη έννοια. Επιπλέον, βασικό χαρακτηριστικό των παραδειγμάτων είναι ότι επιλέγονται από ένα εύρος πιθανών περιπτώσεων (Watson & Mason 2005).

Τα παραδείγματα αποτελούν αναπόσπαστο μέρος της μαθηματικής εκπαίδευσης, ιδιαίτερα αναφορικά με την εννοιολόγηση, τη γενίκευση, την αφαίρεση, την επιχειρηματολογία και την αναλογική σκέψη.

ΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΚΕΣ, ΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ

Η χρήση παραδειγμάτων αποτελεί βασική συνιστώσα της μαθηματικής διερεύνησης. Η μαθηματική αναζήτηση, οδηγούμενη συχνά σε μη καταρχήν προφανείς προτάσεις, προστρέχει σε ένα παράδειγμα για να διερευνήσει το γενικό μέσα από την άμεση εμπειρία του συγκεκριμένου. Άλλοτε πάλι, καταλήγει σε μια εικασία, οπότε η συνήθης πρακτική είναι η αναζήτηση αντιπαραδείγματος για την απόρριψή της (Davis & Hersh 1981). Ακόμη, συχνά η μαθηματική έρευνα εντοπίζει μια δομή που διατρέχει καταρχήν διαφορετικές καταστάσεις, υποδεικνύοντας μια ενοποιητική ιδέα και, ενδεχομένως, ένα σύνολο ορισμών και θεωρημάτων που τη συνοδεύουν. Μερικές φορές, ένα συγκεκριμένο παράδειγμα μπορεί να προτείνει κάποιο χαρακτηριστικό που μπορεί να τροποποιηθεί, οδηγώντας σε μια πιο πλούσια ή πιο ενοποιητική ιδέα ή στον εμπλουτισμό της συνειδητοποίησης της κλάσης αντικειμένων που περιγράφονται από μια θεωρία. Γενικά, ο τρόπος με τον οποίο μελετώνται, γενικεύονται και γίνονται αντιληπτά τα παραδείγματα κατέχει κεντρικό ρόλο στην παραγωγή της μαθηματικής γνώσης.

Ειδικότερα, η απόρριψη εικασιών και εσφαλμένων ισχυρισμών απαιτεί τη γένεση αντιπαραδειγμάτων και την ανάπτυξη λογικών επιχειρημάτων, που θεμελιώνονται στη διερεύνηση και στον πειραματισμό, οι οποίες αποτελούν βασικές συνιστώσες της κατασκευής του μαθηματικού νοήματος και της μαθηματικής κατανόησης. Η διεργασία της απόρριψης έχει μελετηθεί κυρίως αναφορικά με το επιστημολογικό πλαίσιο του Lakatos (Balacheff 1991, Larsen & Zandieh 2007).

Τα παραδείγματα στα οποία έχουν πρόσβαση οι μαθητές και ο πλούτος των μεταξύ τους σχέσεων διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στο νόημα που αποδίδουν στα έργα που τους ανατίθενται και γενικότερα στη δράση στην οποία εμπλέκονται στην τάξη των μαθηματικών και στον τρόπο με τον οποίο την ερμηνεύουν. Πρόσφατες έρευνες υποδεικνύουν ότι οι ψυχολογικές και οι κοινωνικές παράμετροι διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στο είδος των παραδειγμάτων στα οποία έχουν πρόσβαση οι μαθητές, δηλαδή, στη διαμόρφωση του προσωπικού χώρου παραδειγμάτων (Watson & Mason, 2005), καθώς και στο μαθηματικό νόημα που συγκροτούν με βάση αυτά και τις μεταξύ τους σχέσεις (Zaslavsky & Peled, 1996).

Η μάθηση αποτελεί μια διαδικασία που απαιτεί πρωτοβουλία και στόχευση. Η εμπλοκή του μαθητή στην οικοδόμηση των δικών του παραδειγμάτων εμφανίζεται να συνιστά μια ιδιαίτερα αποτελεσματική στρατηγική μεταφοράς πρωτοβουλίας από τον εκπαιδευτικό στο μαθητή (π.χ., Zazkis 2001). Επιπλέον, η επινόηση ή η δημιουργία παραδειγμάτων από τους μαθητές, σύμφωνα με τα σχετικά ερευνητικά δεδομένα, μπορεί να θεωρηθεί ως ισχυρό παιδαγωγικό εργαλείο εμπλουτισμού της μάθησης των μαθηματικών σε πολλά επίπεδα (Zazkis & Leikin 2007).

Η διαχείριση παραδειγμάτων αποτελεί μοναδική και σύνθετη πρόκληση για τον εκπαιδευτικό, καθώς προϋποθέτει την ταυτόχρονη δράση πλήθους ανταγωνιστικών χαρακτηριστικών που χρειάζεται να συνυπολογιστούν και να εξισορροπηθούν, καθώς η επιλογή και ο τρόπος εργασίας με παραδείγματα μπορεί να διευκολύνει ή να εμποδίζει τη μάθηση. Οι Rowland, Thwaites και Huckstep (2003) αναγνωρίζουν τρεις τύπους επιλογής παραδειγμάτων από νέους εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με περιορισμένη εμβέλεια: περιπτώσεων που συγχέουν το ρόλο των μεταβλητών, αριθμών που καταδεικνύουν μια ακατάλληλη αριθμητική διαδικασία και τυχαίων παραδειγμάτων.

Γενικότερα, υπάρχουν τρεις πτυχές της γνώσης των εκπαιδευτικών που συνδέονται με την αποτελεσματική διδακτική αξιοποίηση παραδειγμάτων (Shulman, 1987):

- μαθηματική γνώση (μαθηματικές προϋποθέσεις σχετικές με την ιδέα που επεξηγείται)
- γνώση περί μάθησης των μαθητών (πώς προσεγγίζουν τη γνώση, πώς αυτή επηρεάζεται από την υπάρχουσα γνώση, αν υπάρχει ευαισθητοποίηση στις αδυναμίες και στις δυνατότητες των μαθητών—ειδικότερα, σε σχέση με τα παραδείγματα, αν συνειδητοποιείται η τάση υπερ- ή υπο-γενίκευσης και εστίασης στα άσχετα χαρακτηριστικά τους) και
- παιδαγωγική γνώση περιεχομένου (μετασχηματισμός της γνώσης με μέσα που διευκολύνουν τη μάθησή της και ειδικότερα τρόποι αναπαράστασης της γνώσης που την καθιστούν κατανοητή).

Οι Peled και Zaslavsky (1997) διακρίνουν τρεις τύπους αντιπαραδειγμάτων που προτείνονται από εκπαιδευτικούς μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης: συγκεκριμένα, ημι-γενικά και γενικά παραδείγματα. Τα παραδείγματα των δύο τελευταίων κατηγοριών προσφέρουν εξηγήσεις και ιδέες παραγωγής αντιπαραδειγμάτων.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται αποτελέσματα από τέσσερις έρευνες που εστιάζουν στη διαδικασία που αναπτύσσουν μαθητές και καθηγητές μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για την απόρριψη ενός εσφαλμένου ισχυρισμού. Η πρώτη και η δεύτερη αναφέρεται σε μαθητές της τελευταίας τάξης του Γυμνασίου και της πρώτης τάξης του Λυκείου ενώ οι άλλες δύο σε καθηγητές.

ΤΟ ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΩΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΜΕΛΕΤΗΣ: ΕΥΡΗΜΑΤΑ ΕΡΕΥΝΩΝ

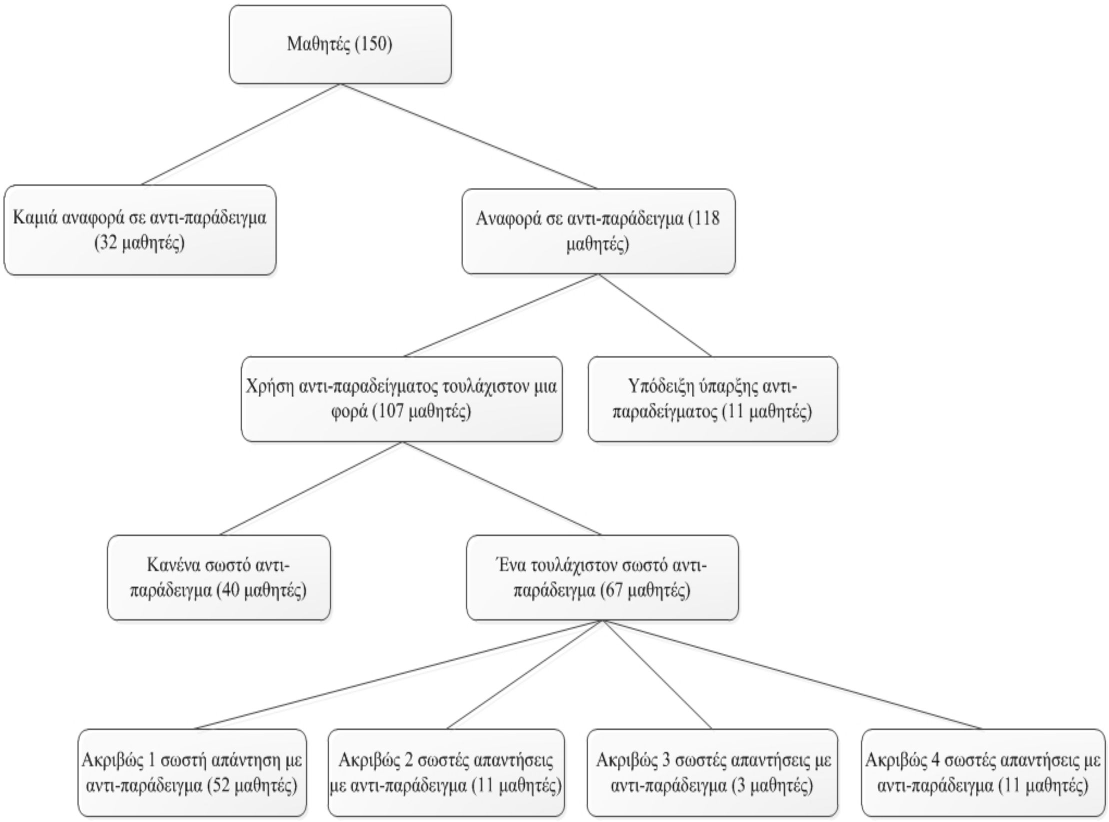
Στην πρώτη από τις τέσσερις εργασίες, ο Lin (2005) μελέτησε τις στρατηγικές που αναπτύσσουν μαθητές της 7ης και της 8ης τάξης για την απόρριψη ενός ψευδούς ισχυρισμού στο πλαίσιο της Γεωμετρίας και της Άλγεβρας. Πιο συγκεκριμένα, στο πλαίσιο μιας ευρύτερης έρευνας που αφορούσε στην κατανόηση, στη μάθηση και στη διδασκαλία της απόδειξης, δόθηκαν σε 1146 μαθητές της 7ης τάξης και 1050 μαθητές της 8ης τάξης τρεις γεωμετρικές και τρεις αλγεβρικές εικασίες οι οποίες ήταν ψευδείς και ζητήθηκε από τους μαθητές να τις επιβεβαιώσουν ή να τις απορρίψουν, αιτιολογώντας την απάντησή τους. Με βάση την επιχειρηματολογία των μαθητών οι οποίοι απέρριψαν την κάθε εικασία δημιουργήθηκαν τρεις ομάδες.

Η πρώτη ομάδα αποτελείτο από αυτούς που απέρριψαν έναν ισχυρισμό, χρησιμοποιώντας ρητορικά επιχειρήματα. Ως ρητορικά θεωρούνται τα επιχειρήματα που βασίζονται σε υποκειμενικούς λόγους ή σε προσωπικά πιστεύω. Παραδείγματος χάριν, ένας μαθητής απέρριψε τον ισχυρισμό «το άθροισμα ενός πολλαπλασίου του 3 και ενός πολλαπλασίου του 6 είναι πολλαπλάσιο του 6» με το ακόλουθο επιχείρημα: «Ο ισχυρισμός είναι πολύ κομψός, έπρεπε να τον γνώριζα. Αλλά δεν τον γνωρίζω. Άρα δεν μπορεί να είναι πάντοτε αληθής».

Η δεύτερη ομάδα αποτελείτο από αυτούς που απέρριψαν έναν ισχυρισμό μετατρέποντας τον στον κατά τη γνώμη τους σωστό. Παραδείγματος χάριν ένας μαθητής απέρριψε τον ισχυρισμό «Ένα τετράπλευρο στο οποίο το ένα ζευγάρι απέναντι γωνιών είναι ορθές είναι ορθογώνιο» με το επιχείρημα ότι ένα τέτοιο τετράπλευρο δεν είναι αποκλειστικά ορθογώνιο αλλά μπορεί να είναι και τετράγωνο.

Η τρίτη ομάδα αποτελείτο από αυτούς που αναφέρθηκαν σε αντιπαράδειγμα. Αυτή η ομάδα συνίστατο από τέσσερεις υποομάδες. Οι μαθητές της πρώτης υποομάδας αναφέρθηκαν απλώς στην ύπαρξη αντιπαραδείγματος. Οι μαθητές της δεύτερης υποομάδας περιέγραψαν μια γενική διαδικασία για την κατασκευή αντιπαραδείγματος, χωρίς όμως να κατασκευάσουν συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα. Οι μαθητές της τρίτης υποομάδας έδωσαν συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα, χωρίς όμως να αποδείξουν ότι έχει τις ιδιότητες που απαιτούνται για να είναι αντιπαράδειγμα. Τέλος, οι μαθητές της τέταρτης υποομάδας έδωσαν συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα και απέδειξαν τις ιδιότητες που έχει.

Στη δεύτερη εργασία, οι Zaslavsky και Ron (1998) μελέτησαν τον τρόπο με τον οποίο μαθητές της Γ΄ τάξης Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου αντιλαμβάνονται το ρόλο των αντιπαραδειγμάτων και τους τρόπους που κατασκευάζουν οι ίδιοι αντιπαραδείγματα. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε δείγμα 150 πολύ καλών μαθητών των δύο τάξεων σε τέσσερα διαφορετικά σχολεία. Οι μαθητές αυτοί πριν την έρευνα είχαν ασχοληθεί με την απόρριψη μαθηματικών ισχυρισμών και είχαν συζητήσει τον ρόλο των αντιπαραδειγμάτων στην απόριψη τέτοιων ισχυρισμών. Τα εργαλεία για αυτήν την έρευνα ήταν δύο ερωτηματολόγια, ένα από τα οποία αφορούσε στην Άλγεβρα και το άλλο στην Γεωμετρία. Στον κάθε μαθητή δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο. Τα ερωτηματολόγια είχαν την ίδια δομή, αποτελούνταν από πέντε ενότητες και δόθηκαν σε πέντε στάδια στους μαθητές. Από την έρευνα προέκυψε ότι ένα όχι μικρό ποσοστό των μαθητών του δείγματος, παρά το ότι είχαν ασχοληθεί, όπως αναφέραμε παραπάνω, με το ρόλο των αντιπαραδειγμάτων, δεν δέχονταν εύκολα ότι ένα αντιπαράδειγμα είναι αρκετό για να απορριφθεί ένας μαθηματικός ισχυρισμός. Ήταν επηρεασμένοι από το ρόλο των παραδειγμάτων. Δηλαδή, το ότι ένα παράδειγμα δεν αποτελεί απόδειξη για την ισχύ ενός θεωρήματος τους δημιουργούσε την αντίληψη ότι ομοίως και ένα αντιπαράδειγμα, αφού είναι παράδειγμα, δεν μπορεί να αποτελέσει απόδειξη ότι ένας ισχυρισμός δεν ισχύει. Αρκετοί, όμως, από τους μαθητές του δείγματος που κατανοούσαν τον ρόλο του αντιπαραδείγματος δεν ήταν σε θέση να δώσουν ένα σωστό αντιπαράδειγμα. Ορισμένοι έδιναν ως αντιπαράδειγμα ένα παράδειγμα το οποίο δεν πληρούσε τις προϋποθέσεις για να είναι αντιπαράδειγμα ενός εσφαλμένου ισχυρισμού. Για παράδειγμα, στην προσπάθειά τους να απορρίψουν τον ισχυρισμό «αν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου είναι ίσες τότε το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο» ορισμένοι μαθητές έδιναν ως αντιπαράδειγμα ένα τετράγωνο. Επίσης, άλλοι μαθητές έδιναν αντιπαραδείγματα τα οποία δεν υπήρχαν, όπως τρίγωνο με συγκεκριμένα μήκη πλευρών, το άθροισμα δύο από τις οποίες ήταν μικρότερο της τρίτης πλευράς. Στο Διάγραμμα 1 φαίνεται η κατανομή των απαντήσεων των μαθητών αναφορικά με τη χρήση αντιπαραδείγματος στην προσπάθειά τους να απορρίψουν τέσσερις λανθασμένους ισχυρισμούς, δύο γεωμετρικούς και δύο αλγεβρικούς. Γενικά, η χρήση σωστών αντιπαραδειγμάτων ήταν συχνότερη στη Γεωμετρία παρά στην Άλγεβρα.

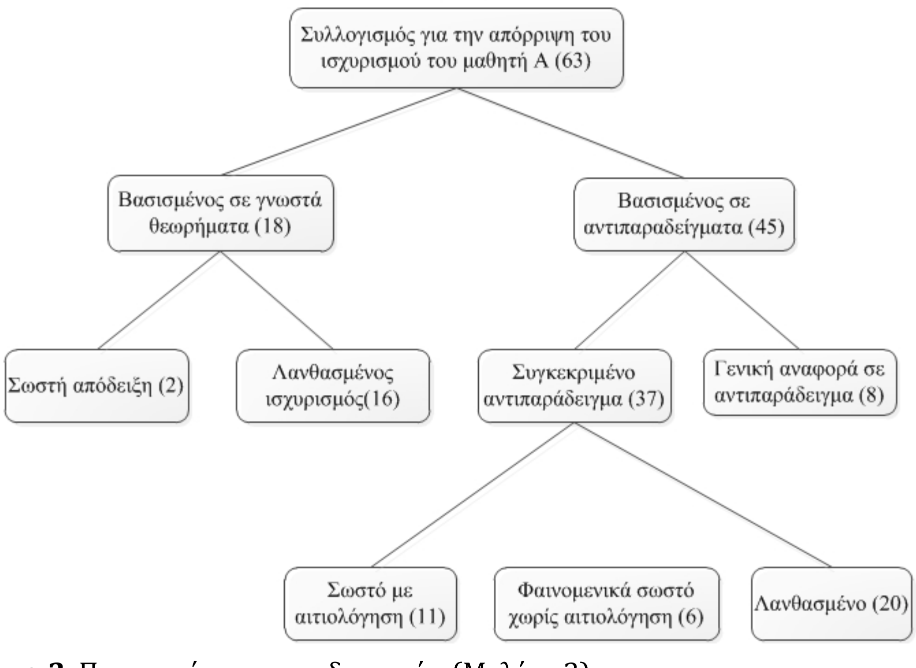


Διάγραμμα 1. Προσεγγίσεις μαθητών.

Στην τρίτη εργασία, οι Potari, Zachariades και Zaslavski (2009) μελέτησαν τον τρόπο με τον οποίο καθηγητές Μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης απορρίπτουν εσφαλμένους ισχυρισμούς μαθητών. Το δείγμα της έρευνας ήταν 63 εκπαιδευτικοί, οι οποίοι απάντησαν γραπτά σε ένα υποθετικό σενάριο που αφορούσε στο διάλογο δύο μαθητών σχετικά με την ισότητα δύο τριγώνων. Συγκεκριμένα, δόθηκε στους εκπαιδευτικούς το παρακάτω σενάριο:

> «*Στο μάθημα της Γεωμετρίας στην 10η τάξη ο καθηγητής έδωσε στους μαθητές την παρακάτω ερώτηση: Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΗΖ έχουν ΒΓ=ΗΖ=12 και ΑΒ=ΕΗ=7 και τις γωνίες ΑΓΒ και ΕΖΗ ίσες με 30 μοίρες. Εξετάστε αν τα δύο τρίγωνα είναι ίσα. Δύο μαθητές εξέφρασαν τις παρακάτω απόψεις:*
>
> *Μαθητής Α: Τα δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές και μια γωνίας ίσες. Άρα είναι ίσα.*
>
> *Μαθητής Β: Γνωρίζουμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν δύο πλευρές και την περιεχομένη γωνία ίσα. Άρα το δοθέντα τρίγωνα δεν είναι ίσα.*
>
> *Αν ο παραπάνω διάλογος γινόταν στην τάξη σας πώς θα αντιδρούσατε;*»

Μετά την πρώτη επεξεργασία των απαντήσεων πραγματοποιήθηκαν συνεντεύξεις με 45 από τους εκπαιδευτικούς με στόχο να διερευνηθούν περαιτέρω οι στρατηγικές τους. Οι γραπτές απαντήσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με την απάντηση του Μαθητή Α μπορούν να διακριθούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες απαντήσεων. Στην πρώτη ανήκουν οι εκπαιδευτικοί που επιχείρησαν να απορρίψουν την απάντηση του μαθητή, χρησιμοποιώντας γνωστά θεωρήματα και στη δεύτερη εκείνοι που αναφέρθηκαν σε αντιπαράδειγμα. Καθεμιά από τις δύο αυτές κατηγορίες επιμερίζονται σε υποκατηγορίες. Το Διάγραμμα 2 περιγράφει την κατηγοριοποίηση των καθηγητών με βάση τις γραπτές απαντήσεις τους.



Διάγραμμα 2. Προσεγγίσεις εκπαιδευτικών (Μελέτη 3).

Όπως προκύπτει από τα στοιχεία του Διαγράμματος 2, περισσότεροι από έναν στους τέσσερις εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν στην έρευνα θεωρούσε ότι η μη εφαρμογή των γνωστών θεωρημάτων στη συγκεκριμένη περίπτωση αποτελεί απόδειξη ότι ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος. Από τις συνεντεύξεις προέκυψε ότι αρκετοί από αυτούς δεν θεωρούν ένα αντιπαράδειγμα αρκετό, για να απορριφθεί ένας ισχυρισμός. Επίσης, περίπου οι μισοί εκπαιδευτικοί που στηρίξαν την επιχειρηματολογία τους σε αντιπαράδειγμα έδωσαν λανθασμένο αντιπαράδειγμα που δεν είτε δεν υπήρχε είτε δεν ικανοποιούσε τις απαιτήσεις για να είναι αντιπαράδειγμα.

Στην τέταρτη έρευνα, οι Giannakoulias, Mastorides, Potari και Zachariades (2010), για να μελετήσουν περαιτέρω την επιχειρηματολογία των καθηγητών, όταν απορρίπτουν λανθασμένους ισχυρισμούς μαθητών, χρησιμοποίησαν ως εργαλείο το μοντέλο του Toulmin (2003). Αυτό το μοντέλο ισχυρίζεται ότι μια επιχειρηματολογία αποτελείται συνήθως από έξι βασικά μέρη, κάθε ένα από τα οποία έχει διαφορετικό ρόλο. Τα μέρη αυτά είναι:

α) Το *συμπέρασμα* (Claim), στο οποίο καταλήγει η επιχειρηματολογία.

β) Τα *δεδομένα* (Data), στα οποία βασίζεται η επιχειρηματολογία.

γ) Ένα *γενικό επιχείρημα* (Warrant), το οποίο δικαιολογεί γιατί προκύπτει το συμπέρασμα από τα δεδομένα.

δ) Ένα *υποστήριγμα* του γενικού επιχειρήματος (Backing), το οποίο αιτιολογεί γιατί είναι σωστό το γενικό επιχείρημα.

ε) Ένα *δείκτη βεβαιότητας* για την ισχύ του συμπεράσματος (Qualifier).

στ) Πιθανές *συνθήκες* κάτω από τις οποίες δεν ισχύει το συμπέρασμα (Rebuttal).

Στην εργασία αναλύεται η επιχειρηματολογία 18 εκπαιδευτικών με βάση την οποία επιχειρούν να απορρίψουν τρεις λανθασμένους ισχυρισμούς, τους οποίους χρησιμοποίησαν μαθητές σε ένα υποθετικό σενάριο που αφορά στην επίλυση ασκήσεων στο πλαίσιο της Άλγεβρας. Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται οι λανθασμένοι ισχυρισμοί των μαθητών και η βάση των επιχειρημάτων που χρησιμοποίησαν οι καθηγητές για να απορρίψουν αυτούς τους ισχυρισμούς.

Πίνακας 1

Προσεγγίσεις Εκπαιδευτικών (Μελέτη 4)

Επιχειρήματα καθηγητών / **Λάθη μαθητών**	**Επιχειρήματα βασισμένα στη θεωρία**	**Επιχειρήματα βασισμένα σε αντιπαρα-δείγματα**	**Επιχειρήματα βασισμένα σε αντίφαση που προκύπτει**	**Κανένα επιχείρημα**
Διαίρεση ανισοτήτων	9	4	1	1
Αν $\|a+b+c\| \le 1$ τότε $\|a\|+\|b\|+\|c\| \le 1$	9	3	-	2
Αν $a_n-b \le b_n-b$ τότε $\|a_n-b\| \le \|b_n-b\|$	5	5	-	3

Τα επιχειρήματα που βασίστηκαν στη θεωρία αναδεικνύουν δύο τύπους συλλογισμών. Ο ένας αφορούσε σε επιχειρήματα της μορφής: «Ανισότητες μπορούμε να προσθέσουμε κατά μέλη ή αν είναι θετικοί οι όροι να πολλαπλασιάσουμε. Δεν υπάρχει θεώρημα που να μας λέει ότι μπορούμε να διαιρέσουμε ανισότητες κατά μέλη. Αν υπήρχε θα το γνωρίζαμε» ή «Ο μαθητής εφάρμοσε λανθασμένα την τριγωνική ανισότητα».

Η περιγραφή του πρώτου τύπου συλλογισμού παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 3, σύμφωνα με το μοντέλο Toulmin.

D → C

(Ισχυρισμός μαθητή) (Ο ισχυρισμός του μαθητή είναι λανθασμένος)

W

(«Δεν υπάρχει σχετικό θεώρημα» ή «Λανθασμένη εφαρμογή θεωρήματος»)

Διάγραμμα 3. Πρώτος τύπος θεωρητικού συλλογισμού.

Τέτοιου τύπου συλλογισμός για την απόρριψη λανθασμένων ισχυρισμών εμφανίστηκαν και σε γεωμετρικό πλαίσιο στην εργασία των Potari, Zachariades και Zaslavsky (2009). Αυτός ο συλλογισμός δεν αποτελεί απόδειξη, όπως θεωρούσαν οι εκπαιδευτικοί που τον χρησιμοποίησαν, διότι δεν οδηγεί σε ασφαλές συμπέρασμα, αλλά στην εικασία ότι «ίσως» δεν είναι σωστός ο ισχυρισμός του μαθητή. Δηλαδή, με βάση το μοντέλο Toulmin, απαιτείται ο δείκτης βεβαιότητας «ίσως».

Ο δεύτερος τύπος συλλογισμού που στηρίχθηκε στη θεωρία είχε ως βασικό επιχείρημα ένα κανόνα, όπως «δεν διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη», τον οποίο όμως ο καθηγητής δεν θεωρούσε αναγκαίο να τον αποδείξει.

Η περιγραφή του δεύτερου τύπου συλλογισμού δίνεται στο Διάγραμμα 4 μέσω του μοντέλου Toulmin.

D → C

(Ισχυρισμός μαθητή) (Ο ισχυρισμός του μαθητή είναι λανθασμένος)

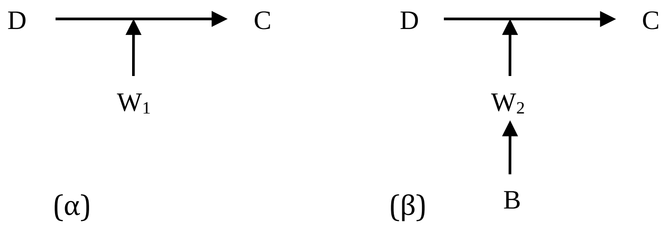
W

(Γενικός κανόνας)

Διάγραμμα 4. Δεύτερος τύπος θεωρητικού συλλογισμού.

Ο τύπος αυτός, μπορεί να είναι σωστός από μαθηματική άποψη, αλλά δεν είναι παιδαγωγικά κατάλληλος, καθώς καλλιεργεί στους μαθητές την στάση ότι ένας ισχυρισμός είναι σωστός επειδή το υποστηρίζει κάποιος «ειδικός». Αυτό ανήκει στην κατηγορία που περιγράφεται από τους Harel και Sowder (1998) ως επίσημα σχήματα απόδειξης (authoritative proof schemes). Στην περίπτωση αυτή, για να είναι μαθηματικά και παιδαγωγικά πλήρης ο συλλογισμός, απαιτείται ένα αντιπαράδειγμα που στο μοντέλο Toulmin θα λειτουργήσει ως υποστήριγμα (backing) του γενικού επιχειρήματος (βλ. Διάγραμμα 5β πιο κάτω).

Οι συλλογισμοί που βασίστηκαν σε αντιπαράδειγμα ήταν επίσης δύο τύπων. Στον ένα, το αντιπαράδειγμα αποτελούσε το βασικό επιχείρημα και το μοντέλο Toulmin που αποδίδει αυτόν τον τύπο δίνεται στο Διάγραμμα 5α. Στο δεύτερο τύπο υπήρχε πρώτα ένα γενικό επιχείρημα (π.χ. δεν διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη) και το αντιπαράδειγμα απεδείκνυε την ορθότητα του επιχειρήματος, δηλαδή λειτουργούσε ως υποστήριγμα του (Διάγραμμα 5β).



Σημείωση. D: ισχυρισμός μαθητή, C: συμπέρασμα καθηγητή ότι ο ισχυρισμός του μαθητή είναι λανθασμένος, W_1: αντιπαράδειγμα, W_2: θεωρητικός ισχυρισμός, B: αντιπαράδειγμα.

Διάγραμμα 5. Συλλογισμοί που στηρίζονται στο αντιπαράδειγμα.

Από συνεντεύξεις με εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν στην έρευνα επιβεβαιώθηκε η αντίληψη ότι «είναι προτιμότερο, να αποδεικνύουμε ότι ένας ισχυρισμός δεν ισχύει με χρήση θεωρήματος, γιατί ένα θεώρημα ισχύει πάντα».

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

Από τα αποτελέσματα των ερευνών που περιγράφηκαν παραπάνω φαίνεται ότι τόσο μαθητές του Γυμνασίου και του Λυκείου όσο και καθηγητές των Μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αντιμετωπίζουν ανάλογες δυσκολίες στη χρήση αντιπαραδειγμάτων. Μια δυσκολία συνδέεται με την κατανόηση του ρόλου των αντιπαραδειγμάτων στα Μαθηματικά. Ένας, όχι μικρός, αριθμός μαθητών και εκπαιδευτικών δεν θεωρεί ότι η ύπαρξη αντιπαραδείγματος αποδεικνύει ότι ένας ισχυρισμός δεν είναι αληθής. Μια ερμηνεία του παραπάνω αποτελέσματος μπορεί να είναι η πεποίθηση ότι ένα παράδειγμα αποτελεί μια ειδική περίπτωση και δεν αποδεικνύει γενικά συμπεράσματα. Αυτό τους οδηγεί, όπως προκύπτει και από τις τέσσερεις έρευνες, στο να επιχειρούν να απορρίψουν ισχυρισμούς αναπτύσσοντας θεωρητικούς συλλογισμούς. Οι συλλογισμοί αυτοί συνήθως περιέχουν λογικό σφάλμα. Δεν συνεπάγονται το εσφαλμένο του ισχυρισμού, όπως θεωρούν αυτοί που τους αναπτύσσουν, αλλά απλώς μπορούν να δημιουργήσουν την εικασία ότι είναι λανθασμένος. Αυτή η αμφισβήτηση του ρόλου των αντιπαραδειγμάτων στα Μαθηματικά αποτέλεσε ιστορικά ένα επιστημολογικό εμπόδιο στην ανάπτυξη τους (Lakatos, 1976). Αυτό το εμπόδιο φαίνεται να εμφανίζεται και σήμερα τόσο σε εκπαιδευόμενους στα Μαθηματικά (μαθητές) όσο και σε πτυχιούχους μαθηματικούς (καθηγητές Μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης) και αποτελεί μια σημαντική αιτία των δυσκολιών αναίρεσης λανθασμένων μαθηματικών ισχυρισμών. Μια άλλη σημαντική δυσκολία αφορά στις περιπτώσεις όπου, ενώ θεωρείται αρκετό ένα αντιπαράδειγμα για την απόρριψη ισχυρισμού, υπάρχει πρόβλημα στην κατασκευή σωστού αντιπαραδείγματος. Αυτό φαίνεται ότι έχει δύο πιθανές αιτίες. Η μια συνδέεται με την αναφορά ως αντιπαραδείγματων, παραδειγμάτων τα οποία δεν έχουν τις απαιτούμενες ιδιότητες ώστε να αποτελούν αντιπαραδείγματα του συγκεκριμένου ισχυρισμού. Η δεύτερη συνδέεται με την αναφορά ως αντιπαραδειγμάτων μαθηματικών αντικειμένων τα οποία δεν υπάρχουν, όπως π.χ. τριγώνου του οποίου οι πλευρές δεν ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα. Τέτοια προβλήματα παρατηρήθηκαν κυρίως στη δημιουργία αντιπαραδειγμάτων σε γεωμετρικό πλαίσιο.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι πρέπει να δοθεί ιδιαίτερο βάρος στην εκπαίδευση των μαθητών και των μελλοντικών καθηγητών στη σημασία και στο ρόλο των αντιπαραδειγμάτων στα Μαθηματικά. Οι διδάσκοντες Μαθηματικά σε κάθε βαθμίδα εκπαίδευσης πρέπει να έχουν επίγνωση του προβλήματος και να αναδεικνύουν με συστηματικό τρόπο και μέσα από συγκεκριμένες περιπτώσεις το ρόλο και τη σημασία των αντιπαραδειγμάτων, διαφοροποιώντας τον από αυτόν των παραδειγμάτων.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Balacheff, N. (1991). Treatment of refutations: Aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning. In E. von Glaserfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 89–110). Hingham: Kluwer.

Davis, P., & Hersh, R. (1981). *The mathematical experience*. Brighton, UK: Harvester.

Giannakoulias E., Mastorides, E., Potari, D., & Zachariades, T. (2010). Studying teachers' mathematical argumentation in the context of refuting students' invalid claims. *Journal of Mathematical Behavior*, 29, 160-168.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput and E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education 3* (pp.234-283). Providence: AMS.

Lakatos, I. (1976). *Proof and refutation.* New York: Cambridge University Press.

Larsen, S., & Zandieh, M. (2008). Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 205-216.

Lin, F.L. (2005). Modelling students' learning on mathematical proof and refutation. In H. L. Chick and J.L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 2, pp. 3-18). Melbourne, Australia.

Peled, I., & Zaslavsky, O. (1997). Counter-example that (only) prove and counter-example that (also) explain. *FOCUS on Learning Problems in mathematics,* 19, 49-61.

Potari, D., Zachariades, T., & Zaslavsky, O. (2009). Mathematics teachers' reasoning for refuting students' invalid claims. *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Lyon, France

Rowland, T., Thwaites, A., & Huckstep, P. (2003). Novices' choice of examples in the teaching of elementary mathematics. In A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the International Conference on the Decidable and the Undecidable in Mathematics Education* (pp. 242-245). Brno, Czech Republic.

Shulman, S. L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57* (1), 1-22.

Toulmin, S. (2003). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples*. Mahwah, NJ, USA: Erlbaum.

Zaslavsky, O., & Peled, I. (1996). Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student teachers: The case of binary operation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 67-78.

Zaslavsky, O., & Ron, G. (1998) Students' understanding of the role of counter-examples. In Alwyn Olivier & Karen Newstead (eds.), *Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 4, 225-232). Stellenbosch, South Africa.

Zazkis, R. (2001). From arithmetic to algebra via big numbers. In H. Chick, K. Stacey, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference: the future of the teaching and learning of algebra* (pp. 676-681). Melbourne, Australia: University of Melbrounre.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2007). Generating examples: from pedagogical tool to a research tool. *For the Learning of Mathematics*, 27(2), 15-21.

Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 69,* 165-182.