



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικό και Καποδιστριακό  
Πανεπιστήμιο Αθηνών

---

## Πρακτική Άσκηση σε σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης

**Ενότητα 3:** Η έννοια της γωνίας και απόδειξη

Δέσποινα Πόταρη, Γιώργος Ψυχάρης

Σχολή Θετικών επιστημών

Τμήμα Μαθηματικό

---

## Αντιλήψεις για τη γωνία.

### Συνέπειες για καθηγητές του Γυμνασίου και άνω.

Όταν ζητείται από τους μαθητευόμενους καθηγητές να ορίσουν τη γωνία, συχνά απαντούν με φράσεις της μορφής «η γωνία σε ένα κτίριο» ή «κάτι που το μετράς σε βαθμούς». Λίγοι αναφέρουν κάτι σχετικά με μια κορυφή και ακτίνες ή γραμμές. Αυτές οι περιγραφές υποδηλώνουν κάποιους περιορισμούς στη κατανόηση των μαθητών μας. Από παράδοση, όταν εισάγεται η έννοια της γωνίας, αυτό γίνεται με ένα πολύ στατικό τρόπο, όπως π.χ. «εκεί που συναντώνται οι δυο πλευρές ενός πολυγώνου σχηματίζεται μια γωνία.» Η Keiser (2000) προτείνει ότι θα ήταν προτιμότερο οι μαθητές να δουν ποικίλες αναπαραστάσεις της γωνίας, όπως για παράδειγμα μια στροφή ή μια σφήνα<sup>1</sup> και να τους δοθούν ευκαιρίες και χρόνος να μοιραστούν ο ένας τις ιδέες του άλλου. Πολλοί έχουν εξετάσει την ανάπτυξη της έννοιας της γωνίας στο μαθητή σε ένα περιβάλλον μάθησης που περιλαμβάνει τη χελώνα (πρόγραμμα Logo). Τα ευρήματα τους δείχνουν ότι κατάλληλες σχεδιασμένες δραστηριότητες με τη χελώνα, μπορούν να διευκολύνουν την εξερεύνηση των μαθητών και την ανάπτυξη των εννοιών της γωνίας και της μέτρησής της.

Έτσι η έρευνα ενισχύει την υπόθεση ότι η γωνία είναι μια σύνθετη έννοια, καλύτερα κατανοητή μέσα από πολλές διαφορετικές οπτικές. Αυτές οι οπτικές εμπίπτουν γενικά σε τρεις κατηγορίες, δηλαδή ένα ζεύγος ακτίνων που συναντώνται σε μια κοινή κορυφή, η περιοχή που σχηματίζεται από την τομή δυο ημιεπιπέδων (πιο άτυπα ο χώρος ή το ανάπτυσμα μεταξύ δυο ακτίνων ή μια άπειρη σφήνα) και τελικά, μια πιο δυναμική ιδέα για τη γωνία ως η αναπαράσταση της στρέψης. Αυτές οι ποικίλες αντιλήψεις για τη γωνία εμφανίζονται σε πολλά και διαφορετικά πλαίσια. Για παράδειγμα, όταν εστιάζουμε στην γωνία που σχηματίζεται από ένα κομμάτι μιας πίτσας, (ένα πλαίσιο που εύκολα το προτείνουν τόσο οι καθηγητές του Γυμνασίου, όσο και οι μαθητευόμενοι καθηγητές) το να θεωρεί κάποιος τη γωνία ως μια σφήνα είναι πιο χρήσιμο από να τη βλέπει ως στρέψη. Αντίθετα, όταν θέλουμε να δούμε την γωνία που πρέπει να στραφεί αυτός που κάνει σκι στο χιόνι πάνω σε μια χιονοσανίδα όταν εκτελεί ένα πολύπλοκο κόλπο, στατικές προσεγγίσεις, όπως ο χώρος ή οι ακτίνες και μια κορυφή μπορεί να δράσουν περιοριστικά στο να δούμε ότι η γωνία μπορεί να υπερβεί τις 360°.

Η έρευνα μας οδηγεί σε δυο συμπεράσματα: οι μαθητές ωφελούνται από μια ευρεία αντίληψη της γωνίας, και προκειμένου οι μαθητές να αναπτύξουν αυτήν την ευρεία έννοια της γωνίας, χρειάζονται ευκαιρίες να παλέψουν με τις έννοιες της.

---

<sup>1</sup> Μεταλλικό ή ξύλινο εργαλείο σε σχήμα πρίσματος με αιχμηρή και πλατιά τη μια πλευρά του, το οποίο τοποθετείται με την αιχμηρή πλευρά του μέσα ή ανάμεσα σε σώματα που πρέπει να διαχωριστούν και ωθείται μέσα με την πίεση άλλου εργαλείου, όπως η βαριά ή το τσεκούρι, ΛΕΞΙΚΟ ΤΗΣ ΝΕΑΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΓΛΩΣΣΑΣ, Γ. ΜΠΑΜΠΙΝΙΩΤΗ (2006)

Έτσι ανέπτυξαν μαθήματα που εστιάζουν στη γωνία και στη μέτρησή της, και περιλαμβάνουν την χρήση χειραπτικών (hands-on) δραστηριοτήτων, υπολογιστές γραφημάτων, και προγράμματα υπολογιστών. Μια δραστηριότητα είναι η δραστηριότητα της σφήνας, όπου αρχικά κάνει χρήση της έννοιας της περιοχής ή του χώρου της γωνίας.

## **Δραστηριότητες πάνω στη Γωνία**

Στην ερώτηση των μαθητευόμενων καθηγητών τι είναι γωνία, κάποιοι απαντούν ότι είναι η περιοχή ή ο χώρος μεταξύ δυο ακτίνων, ενώ άλλοι διστάζουν να τη δουν έτσι καθώς ο «χώρος» υπονοεί μια περιφραγμένη περιοχή που μετριέται σε τετραγωνικές ή ακόμα και κυβικές μονάδες. Κάποιοι μαθητευόμενοι καθηγητές δεν μπορούν να διακρίνουν τον άτυπο όρο *χώρο* από τον όρο *περιοχή*. Προκειμένου να τονίσουμε την ιδέα «του χώρου ή ανάπτυγμα ανάμεσα σε δυο ακτίνες» ότι αποτελεί κάτι διαφορετικό από «το χώρο σε μια φραγμένη περιοχή» ακολουθεί η δραστηριότητα της σφήνας.

### **Δραστηριότητα της σφήνας**

Δίνεται στους μαθητές ένα λεπτό χαρτί (σαν αυτά που τυλίγουν τα χάμπουργκερ) και τους ζητείται να επινοήσουν μια διάταξη που θα τους επιτρέψει να μετρούν διάφορες γωνίες. Μπορεί να διαλέξουμε ένα κοινό αντικείμενο, όπως ένα μολύβι και να τους ρωτήσουμε αν θα μετρούσαν το εμβαδό του δωματίου με μονάδα μέτρησης το μολύβι αυτό. Οι μαθητές με σταθερότητα απαντούν πως «όχι» διότι η ιδέα να καλύψουμε την επιφάνεια με ένα μολύβι δεν είναι τόσο προεξέχουσα όπως για παράδειγμα αποτελεί ένα φύλλο χαρτί. Ωστόσο, το μολύβι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μετρήσουμε το μήκος του θρανίου, επειδή έχει το χαρακτηριστικό του μήκους, την ιδιότητα που επιχειρούμε να μετρήσουμε. Έτσι πρέπει οι μαθητές να κατασκευάσουν μια μονάδα που να ενσωματώνει την ιδιότητα που θέλουν να μετρήσουν όταν σκέφτονται για την μέτρηση της γωνίας.

Τους λέμε ότι δεν έχουν εφευρεθεί ούτε το μοιρογνωμόνιο ούτε οι μοίρες. Αυτό είναι δύσκολο και για τους μαθητές του Γυμνασίου και για τους μαθητευόμενους καθηγητές που είναι συνηθισμένοι να χρησιμοποιούν τις μοίρες ως μονάδα μέτρησης. Ενθαρρύνουμε τους μαθητές να αναπτύξουν την δική τους μονάδα μέτρησης και ένα εργαλείο μέτρησης με το χαρτί που τους δόθηκε. Παρουσιάζονται ποικίλες ιδέες, από την δίπλωση του χαρτιού τους σε βεντάλια, μέχρι μια σειρά από πτυχές που όλες συναντώνται στο κέντρο όταν τις ανοίγουμε (μοιάζει με ένα μοιρογνωμόνιο 360°). Πολλοί μαθητές διπλώνουν τα χαρτιά τους σε πρόχειρες τριγωνικές σφήνες ποικίλων μεγεθών, διαπιστώνοντας έτσι κατά πόσο η σφήνα μετρά το χώρο που μοιράζεται ανάμεσα στις δυο ακτίνες με κοινή κορυφή. Τα ποικίλα μεγέθη των σφηνών δεν αποτελούν πρότυπα μέτρα και αυτό θέτει προς συζήτηση πώς η ίδια γωνία μπορεί να συσχετιστεί με διαφορετικές μετρήσεις,

βοηθώντας έτσι τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν ότι το μέγεθος της μονάδας μέτρησης καθορίζει και το μέτρο της γωνίας. Εδώ μπορούν οι μαθητές να αρχίσουν να συνειδητοποιούν ότι το μήκος των πλευρών της γωνίας είναι μια άσχετη ιδιότητα όταν χρησιμοποιούμε σφήνες. Για παράδειγμα, αν έχουμε δυο ίδιου μεγέθους γωνίες που οι πλευρές της μια παριστάνονται με μικρότερου μήκους τμήματα, οι μαθητές θα δουν ότι ο ίδιος αριθμός σφηνών «γεμίζουν» και τις δυο γωνίες, καθώς συγκεντρώνονται να γεμίσουν το χώρο που είναι κοντά στην κορυφή εν αντιθέσει με όλη την περιοχή που σκιαγραφείται από τις πλευρές της γωνίας.

Έτσι μπορούν να δουν ότι το μήκος των πλευρών της γωνίας δεν έχει καμία σχέση με την ποσότητα του αναπτύγματος που μετριέται από την σφήνα. Αυτό επίσης μπορεί να προωθήσει συζήτηση σχετική με την διαφορά των λέξεων *πλευρά* και *ακτίνα* με την έννοια ότι οι δυο ακτίνες με κοινή κορυφή έχουν άπειρο μήκος, κι όταν σχεδιάζεται η γωνία μόνο ένα πεπερασμένο τμήμα της κάθε ακτίνας φαίνεται.

Επίσης η δημιουργία των ποικίλων μονάδων εγείρει συζήτηση αναφορικά με την επιχειρηματολογία του να έχουμε κοινή ή πρότυπη μονάδα μέτρησης. Έτσι η έννοια της μοίρας έρχεται ως μια παραδοσιακά αποδεκτή μονάδα μέτρησης, που τώρα οι μαθητές μπορούν να την δουν ως μια πολύ πολύ μικρή πρότυπη σφήνα.

Γενικά, αυτή η δραστηριότητα εξυπηρετεί πολλούς σκοπούς:

- παρέχει μια εμπειρία με μια μη πρότυπη μονάδα μέτρησης (τη σφήνα)
- τονίζει τις σχετικές ιδιότητες που μετρώνται σε μια γωνία
- αναπτύσσει την ιδέα του βαθμού.

**ΠΗΓΗ:** Understanding geometry for a changing world, NCTM (2009)

# Σημειώματα

## Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Δέσποινα Πόταρη, Γιώργος Ψυχάρης, 2014. Δέσποινα Πόταρη, Γιώργος Ψυχάρης. «Πρακτική Άσκηση σε σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η έννοια της γωνίας και αποδειξη». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/MATH239>.

## Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

## Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

