ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αρμονική Ανάλυση

Ενότητα: Το θεώρημα παρεμβολής του Riesz και η ανισότητα Hausdorff-Young

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

11 Το θεώρημα παρεμβολής του Riesz και η ανισότητα Hausdorff-Young

11.1 Το θεώρημα παρεμβολής του Riesz

Έστω (p_0, q_0) και (p_1, q_1) δύο ζεύγη δεικτών με $1 \leqslant p_j, q_j \leqslant \infty$. Ας υποθέσουμε ότι

$$\|T(f)\|_{q_0} \leqslant M_0\|f\|_{p_0} \quad \text{και} \quad \|T(f)\|_{q_1} \leqslant M_1\|f\|_{p_1},$$

όπου T είναι ένας γραμμικός τελεστής. Το ερώτημα είναι αν μπορούμε να πούμε ότι

$$\|T(f)\|_q \leqslant M\|f\|_p$$

για άλλα ζεύγη (p, q). Όπως θα δούμε, αυτή η ανισότητα ισχύει αν οι τιμές των p και q ικανοποιούν κατάλληλη γραμμική σχέση στην οποία εμφανίζονται οι αντίστροφοι των δεικτών p_0, p_1, q_0 και q_1.

Για την ακριβή διατύπωση του θεωρήματος εισάγουμε πρώτα κάποιο συμβολισμό. Έστω (X, μ) και (Y, ν) δύο χώροι μέτρου. Θεωρούμε τον χώρο $L^{p_0} + L^{p_1}$ όλων των συναρτήσεων f στον (X, μ) που γράφονται στη μορφή $f = f_0 + f_1$ για κάποιες $f_0 \in L^{p_0}(X, \mu)$ και $f_1 \in L^{p_1}(X, \mu)$. Ομοίως ορίζουμε τον χώρο $L^{q_0} + L^{q_1}$ (που αποτελείται από συναρτήσεις στον (Y, ν)).

Θεώρημα 11.1.1 (Riesz). *Έστω T ένας γραμμικός τελεστής από τον $L^{p_0} + L^{p_1}$ στον $L^{q_0} + L^{q_1}$. Υποθέτουμε ότι ο T είναι φραγμένος από τον L^{p_0} στον L^{q_0} και από τον L^{p_1} στον L^{q_1}. Δηλαδή, υπάρχουν σταθερές $M_0, M_1 > 0$ ώστε*

$$\|T(f)\|_{q_0} \leqslant M_0\|f\|_{p_0} \quad \text{για κάθε } f \in L^{p_0}$$

και

$$\|T(f)\|_{q_1} \leqslant M_1\|f\|_{p_1} \quad \text{για κάθε } f \in L^{p_1}.$$

Αν το ζεύγος (p, q) ικανοποιεί τις

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad \text{και} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$$

για κάποιον $0 \leqslant t \leqslant 1$, τότε ο T είναι φραγμένος από τον L^p στον L^q, και

$$\|T(f)\|_q \leqslant M\|f\|_p$$

για κάθε $f \in L^p$. Επιπλέον, $M \leqslant M_0^{1-t}M_1^t$.

Πρέπει να τονίσουμε ότι το θεώρημα ισχύει για L^p-χώρους συναρτήσεων με μιγαδικές τιμές, διότι η απόδειξή του χρησιμοποιεί τεχνικές μιγαδικής ανάλυσης. Ξεκινώντας από τη λωρίδα $0 \leqslant Re\,(z) \leqslant 1$ στο μιγαδικό επίπεδο, θα ορίσουμε μια αναλυτική συνάρτηση Φ που σχετίζεται με τον T, τέτοια ώστε οι υποθέσεις $\|T(f)\|_{q_0} \leqslant M_0\|f\|_{p_0}$ και $\|T(f)\|_{q_1} \leqslant M_1\|f\|_{p_1}$ να μεταφράζονται σε κάποια φράγματα για την Φ στις ευθείες $Re\,(z) = 0$ και $Re\,(z) = 1$ αντίστοιχα. Κατόπιν, το συμπέρασμα θα προκύψει από το γεγονός ότι η Φ θα είναι φραγμένη στο σημείο t του πραγματικού άξονα.

Η ανάλυσή μας για την Φ θα βασιστεί στο εξής λήμμα.

Λήμμα 11.1.2 (το λήμμα των τριών ευθειών). *Έστω $\Phi(z)$ μια ολόμορφη συνάρτηση στη λωρίδα $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < Re\,(z) < 1\}$, η οποία είναι επίσης συνεχής και φραγμένη στην κλειστή θήκη της S. Αν*

$$M_0 = \sup_{y\in\mathbb{R}} |\Phi(iy)| \quad \text{και} \quad M_1 = \sup_{y\in\mathbb{R}} |\Phi(1+iy)|,$$

τότε

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |\Phi(t+iy)| \leqslant M_0^{1-t} M_1^t$$

για κάθε $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Απόδειξη. Κάνουμε αρχικά την επιπλέον υπόθεση ότι $M_0 = M_1 = 1$ και $\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |\Phi(x+iy)| \to 0$ καθώς το $|y| \to \infty$. Σε αυτήν την περίπτωση, ορίζουμε $M = \sup |\Phi(z)|$ όπου το supremum παίρνεται πάνω από όλα τα z στην κλειστή θήκη της S. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $M > 0$. Θεωρούμε μια ακολουθία $\{z_n\}$ σημείων της S με $|\Phi(z_n)| \to M$ καθώς το $n \to \infty$. Λόγω της υπόθεσής μας για την Φ, η ακολουθία $\{z_n\}$ δεν μπορεί να τείνει στο απειρο, άρα υπάρχει υπακολουθία $\{z_{k_n}\}$ της $\{z_n\}$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο σημείο z_0 στην κλειστή θήκη της S. Από την αρχή του μεγίστου, το z_0 δεν μπορεί να είναι εσωτερικό σημείο της λωρίδας (αλλιώς, η Φ είναι σταθερή και το συμπέρασμα έπεται κατά προφανή τρόπο). Άρα, το z_0 ανήκει στο σύνορο της S, όπου έχουμε $|\Phi| \leqslant 1$. Αυτό αποδεικνύει ότι $M \leqslant 1$ και έχουμε το ζητούμενο γι' αυτήν την ειδική περίπτωση.

Αν απλώς υποθέσουμε ότι $M_0 = M_1 = 1$, ορίζουμε

$$\Phi_\epsilon(z) = \Phi(z) e^{\epsilon(z^2-1)}, \qquad \epsilon > 0.$$

Χρησιμοποιώντας την $e^{\epsilon[(x+iy)^2-1]} = e^{\epsilon(x^2-1-y^2+2ixy)}$, βλέπουμε ότι $|\Phi_\epsilon(z)| \leqslant 1$ στις ευθείες $Re\,(z) = 0$ και $Re\,(z) = 1$. Επιπλέον,

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |\Phi_\epsilon(x+iy)| \to 0 \ \text{ καθώς το } \ |y| \to \infty,$$

αφού η Φ είναι φραγμένη. Συνεπώς, από την πρώτη περίπτωση, γνωρίζουμε ότι $|\Phi_\epsilon(z)| \leqslant 1$ για κάθε z στην κλειστή θήκη της S. Αφήνοντας το $\epsilon \to 0$, βλέπουμε ότι $|\Phi| \leqslant 1$ όπως θέλαμε.

Τέλος, αν δεν έχουμε κάποια πρόσθετη πληροφορία για τις τιμές των M_0 και M_1, ορίζουμε $\tilde{\Phi}(z) = M_0^{z-1} M_1^{-z} \Phi(z)$, και παρατηρούμε ότι η $\tilde{\Phi}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις της προηγούμενης περίπτωσης: η $|\tilde{\Phi}|$ είναι φραγμένη από το 1 στις ευθείες $Re\,(z) = 0$ και $Re\,(z) = 1$. Άρα, $|\tilde{\Phi}(z)| \leqslant 1$ για κάθε $z \in S$, και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 11.1.1. Αποδεικνύουμε πρώτα τον ισχυρισμό του θεωρήματος στην περίπτωση που η f είναι απλή συνάρτηση. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $\|f\|_p = 1$.

Θεωρούμε τον συζυγή εκθέτη q^* του q και θα δείξουμε ότι

$$\left|\int (Tf)\cdot g\,d\nu\right| \leqslant M\|f\|_p\|g\|_{q^*} \tag{11.1.0.1}$$

για κάθε $g \in L^{q^*}(Y,\nu)$. Αν αποδείξουμε την (11.1.0.1), από δυϊσμό έπεται ότι

$$\|T(f)\|_q \leqslant M\|f\|_p.$$

(α) Υποθέτουμε πρώτα ότι $p < \infty$ και $q > 1$. Θεωρούμε απλή συνάρτηση $f \in L^p$, και ορίζουμε

$$f_z = |f|^{\gamma(z)} \frac{f}{|f|} \ \text{ όπου } \ \gamma(z) = p\left(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}\right)$$

και

$$g_z = |g|^{\delta(z)} \frac{g}{|g|} \quad \text{όπου} \quad \delta(z) = q^* \left(\frac{1-z}{q_0^*} + \frac{z}{q_1^*} \right),$$

με τους q^*, q_0^* και q_1^* να συμβολίζουν τους συζυγείς εκθέτες των q, q_0 και q_1 αντίστοιχα. Παρατηρήστε ότι $f_t = f$ και

$$\|f_z\|_{p_0} = 1 \ \text{ αν } \ Re\,(z) = 0$$

ενώ

$$\|f_z\|_{p_1} = 1 \ \text{ αν } \ Re\,(z) = 1.$$

Όμοια, $\|g_z\|_{q_0^*} = 1$ αν $Re\,(z) = 0$ και $\|g_z\|_{q_1^*} = 1$ αν $Re\,(z) = 1$. Επίσης, $g_t = g$. Το τέχνασμα είναι να θεωρήσουμε την

$$\Phi(z) = \int (Tf_z) \cdot g_z \, d\nu.$$

Αφού η f είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα της μορφής $f = \sum\limits_k a_k \chi_{E_k}$ με τα σύνολα E_k να είναι ξένα και να έχουν πεπερασμένο μέτρο, βλέπουμε ότι η f_z είναι επίσης απλή, και

$$f_z = \sum_k |a_k|^{\gamma(z)} \frac{a_k}{|a_k|} \chi_{E_k}.$$

Αφού η $g = \sum\limits_j b_j \chi_{F_j}$ είναι επίσης απλή, έχουμε

$$g_z = \sum_j |b_j|^{\delta(z)} \frac{b_j}{|b_j|} \chi_{F_j}.$$

Συνεπώς,

$$\Phi(z) = \sum_{j,k} |a_k|^{\gamma(z)} |b_j|^{\delta(z)} \frac{a_k}{|a_k|} \frac{b_j}{|b_j|} \left(\int T(\chi_{E_k}) \chi_{F_j} \, d\nu \right),$$

άρα η συνάρτηση Φ είναι ολόμορφη στη λωρίδα $0 < Re\,(z) < 1$, και είναι φραγμένη και συνεχής στην κλειστή της θήκη. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο T είναι φραγμένος στον L^{p_0} με νόρμα M_0, βλέπουμε ότι αν $Re\,(z) = 0$ τότε

$$|\Phi(z)| \leqslant \|T(f_z)\|_{q_0} \|g_z\|_{q_0^*} \leqslant M_0 \|f_z\|_{p_0} = M_0.$$

Όμοια βλέπουμε ότι $|\Phi(z)| \leqslant M_1$ στην ευθεία $Re\,(z) = 1$. Από το λήμμα των τριών ευθειών συμπεραίνουμε ότι η $|\Phi|$ φράσσεται από $M_0^{1-t} M_1^t$ στην ευθεία $Re\,(z) = t$. Αφού $\Phi(t) = \int (Tf) g \, d\nu$, έχουμε το ζητούμενο, τουλάχιστον στην περίπτωση που η f είναι απλή.

Γενικά, αν $f \in L^p$ και $1 \leqslant p < \infty$, επιλέγουμε μια ακολουθία $\{f_m\}$ απλών συναρτήσεων στον L^p έτσι ώστε $\|f_n - f\|_p \to 0$. Αφού $\|T(f_n)\|_q \leqslant M \|f_n\|_p$, βλέπουμε ότι η $\{T(f_n)\}$ είναι ακολουθία Cauchy στον L^q. Αν δείξουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} T(f_n) = T(f)$ σχεδόν παντού, τότε θα έχουμε και $\|T(f)\|_q \leqslant M \|f\|_p$.

Για να το δούμε αυτό, γράφουμε $f = f^U + f^L$, όπου $f^U(x) = f(x)$ αν $|f(x)| \geqslant 1$ και $f^U(x) = 0$ αλλιώς, ενώ $f^L(x) = f(x)$ αν $|f(x)| < 1$ και $f^L(x) = 0$ αλλιώς. Με τον ίδιο τρόπο γράφουμε κάθε f_n σαν άθροισμα $f_n = f_n^U + f_n^L$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p_0 \leqslant p_1$ (η περίπτωση $p_0 \geqslant p_1$ εξετάζεται με ανάλογο τρόπο). Τότε, $p_0 \leqslant p \leqslant p_1$, και αφού $f \in L^p$ έχουμε $f^U \in L^{p_0}$ και $f^L \in L^{p_1}$. Επιπλέον, αφού $\|f_n - f\|_p \to 0$, μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι $\|f_n^U - f^U\|_{p_0} \to 0$ και $\|f_n^L - f^L\|_{p_1} \to 0$. Από την υπόθεση, $T(f_n^U) \to T(f^U)$ στον L^{q_0} και $T(f_n^L) \to T(f^L)$ στον L^{q_1}. Περνώντας σε κατάλληλες υπακολουθίες βλέπουμε ότι η $T(f_n) = T(f_n^U) + T(f_n^L)$ συγκλίνει στην $T(f)$ σχεδόν παντού. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

(β) Μένει να εξετάσουμε τις περιπτώσεις $q = 1$ και $p = \infty$. Στην περίπτωση $p = \infty$ έχουμε αναγκαστικά $p_0 = p_1 = \infty$, οπότε οι υποθέσεις $\|T(f)\|_{q_0} \leqslant M_0\|f\|_\infty$ και $\|T(f)\|_{q_1} \leqslant M_1\|f\|_\infty$ σε συνδυασμό με την ανισότητα Hölder μας δίνουν

$$\|T(f)\|_q \leqslant (\|T(f)\|_{q_0})^{1-t}(\|T(f)\|_{q_1})^t \leqslant M_0^{1-t}M_1^t\|f\|_\infty.$$

Τέλος, αν $p < \infty$ και $q = 1$, τότε $q_0 = q_1 = 1$ και μπορούμε επιλέγοντας $g_z = g$ για κάθε z να ακολουθήσουμε την ίδια πορεία με αυτήν της απόδειξης για την περίπτωση $q > 1$. Έτσι, ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος. □

Παρατήρηση 11.1.3. *Ένας λίγο διαφορετικός, αλλά χρήσιμος, τρόπος να δούμε το Θεώρημα 11.1.1 είναι ο εξής: υποθέτουμε ότι ο γραμμικός τελεστής T είναι αρχικά ορισμένος στις απλές συναρτήσεις του X, τις οποίες απεικονίζει σε συναρτήσεις του Y οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε σύνολο πεπερασμένου μέτρου. Ρωτάμε για ποιά ζεύγη (p, q) ο T είναι ισχυρού τύπου (p, q), δηλαδή υπάρχει $M = M_{p,q} > 0$ ώστε*

(11.1.0.2) $$\|T(f)\|_q \leqslant M\|f\|_p$$

για κάθε απλή συνάρτηση f. Η χρήσιμη ιδιότητα της κλάσης των απλών συναρτήσεων είναι ότι είναι η ίδια για όλους τους χώρους L^p. Επιπλέον, αν η (11.1.0.2) ισχύει, τότε ο T επεκτείνεται μονοσήμαντα στον L^p και αν $p < \infty$ τότε η (11.1.0.2) εξακολουθεί να ισχύει για κάθε $f \in L^p(\mu)$, με την ίδια σταθερά $M_{p,q}$ (το ίδιο ισχύει και για $p = \infty$ αν $\mu(X) < \infty$).

Ξεκινώντας από αυτήν την παρατήρηση, ορίζουμε το διάγραμμα Riesz του T να αποτελείται από όλα τα σημεία $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ για τα οποία ο T είναι ισχυρού τύπου $(1/x, 1/y)$ και θέτουμε $M_{x,y}$ την μικρότερη θετική σταθερά για την οποία ισχύει

(11.1.0.3) $$\|T(f)\|_{1/y} \leqslant M_{x,y}\|f\|_{1/x}$$

για κάθε απλή συνάρτηση f. Με αυτήν την ορολογία έχουμε το εξής:

Θεώρημα 11.1.4. *Έστω T ένας γραμμικός τελεστής ορισμένος στις απλές συναρτήσεις του X, τις οποίες απεικονίζει σε συναρτήσεις του Y οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε σύνολο πεπερασμένου μέτρου.*

(α) Το διάγραμμα Riesz του T είναι κυρτό υποσύνολο του $[0, 1] \times [0, 1]$.

(β) Η $(x, y) \mapsto log M_{x,y}$ είναι κυρτή συνάρτηση σε αυτό το σύνολο.

Απόδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός του Θεωρήματος 11.1.4 μας λέει ότι αν $(x_0, y_0) = (1/p_0, 1/q_0)$ και $(x_1, y_1) = (1/p_1, 1/q_1)$ είναι δύο σημεία στο διάγραμμα Riesz του T, τότε το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν περιέχεται στο διάγραμμα Riesz του T. Αυτό προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 11.1.1. Για τον δεύτερο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι αρκεί να ελέγξουμε την κυρτότητα της $log M_{x,y}$ σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα που περιέχεται στο διάγραμμα Riesz του T, κάτι που προκύπτει από την ανισότητα $M \leqslant M_0^{1-t}M_1^t$ του Θεωρήματος 11.1.1.

$\boxed{+}$

Λόγω της διατυπωσης του Θεωρήματος 11.1.4, το Θεώρημα 11.1.1 συχνά αποκαλείται «θεώρημα κυρτότητας του Riesz».

11.2 Ανισότητα Hausdorff-Young

Θα δώσουμε τέσσερις εφαρμογές του θεωρήματος του Riesz. Η πρώτη είναι η ανισότητα Hausdorff-Young για τους συντελεστές Fourier μιας συνάρτησης $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p \leqslant 2$.

Θεώρημα 11.2.1 (ανισότητα Hausdorff-Young). *Έστω $1 \leqslant p \leqslant 2$. Αν $f \in L^p(\mathbb{T})$ και $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ είναι η σειρά Fourier της f, τότε*

(11.2.0.4)
$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^q\right)^{1/q} \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p dx\right)^{1/p},$$

όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι στην περίπτωση $p = q = 2$ η (11.2.0.4) ισχύει ως ισότητα, από την ταυτότητα του Parseval. Επίσης, έχουμε δεί ότι ισχύει στην περίπτωση $p = 1$ και $q = \infty$: αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ τότε

$$|c_k(f)| \leqslant \|f\|_1$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, άρα $\sup\{|c_k| : k \in \mathbb{Z}\} \leqslant \|f\|_1$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 11.1.1 για τους χώρους $X = \mathbb{T}$ με το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue και $Y = \mathbb{Z}$ με το μέτρο αρίθμησης, το οποίο δίνει μάζα 1 σε κάθε μονοσύνολο. Θεωρούμε τον τελεστή $T : L^2(\mathbb{T}) + L^1(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{Z}) + L^\infty(\mathbb{Z})$ ο οποίος απεικονίζει την f στην ακολουθία $\{c_k(f)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ των συντελεστών Fourier της. Παρατηρήστε ότι $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$, άρα $L^2(\mathbb{T}) + L^1(\mathbb{T}) = L^1(\mathbb{T})$. Επίσης, $L^2(\mathbb{Z}) \subset L^\infty(\mathbb{Z})$, άρα $L^2(\mathbb{Z}) + L^\infty(\mathbb{Z}) = L^\infty(\mathbb{Z})$.

Έχουμε $\|T(f)\|_{L^2(\mathbb{Z})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}$ για κάθε $f \in L^2(\mathbb{T})$ και $\|T(f)\|_{L^\infty(\mathbb{Z})} \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$ για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$. Δηλαδή, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 11.1.1 για τα ζεύγη $(2, 2)$ και $(1, \infty)$ με $M_{2,2} = 1$ και $M_{1,\infty} = 1$. Αν $p \in (1, 2)$ και q είναι ο συζυγής εκθέτης του p, βλέπουμε ότι οι p, q ικανοποιούν τις

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{2} + \frac{t}{1} \quad \text{και} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{2} + \frac{t}{\infty} = \frac{1-t}{2}$$

με $t = 1 - \frac{2}{q} \in (0, 1)$. Από το Θεώρημα 11.1.1 παίρνουμε αμέσως την

$$\|T(f)\|_q \leqslant M_{2,2}^{1-t} M_{1,\infty}^t \|f\|_p = \|f\|_p$$

για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$. Η τελευταία ανισότητα είναι ακριβώς ισοδύναμη με την (11.2.0.4). $\square$

Η δεύτερη εφαρμογή μας είναι η δυϊκή ανισότητα Hausdorff-Young:

Θεώρημα 11.2.2 (δυϊκή ανισότητα Hausdorff-Young). *Έστω $2 \leqslant q \leqslant \infty$ και έστω p ο συζυγής εκθέτης του q. Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^p < \infty$, τότε $f \in L^q(\mathbb{T})$ και*

(11.2.0.5)
$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^q dx\right)^{1/q} \leqslant \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^p\right)^{1/p}.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι στην περίπτωση $p = q = 2$ η (11.2.0.5) ισχύει ως ισότητα: η υπόθεση ότι $\{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in L^2(\mathbb{Z})$ και το θεώρημα Riesz-Fisher εξασφαλίζουν ότι $f \in L^2(\mathbb{T})$ και ότι $\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|\{c_k\}\|_{L^2(\mathbb{Z})}$. Η περίπτωση $p = 1$ και $q = \infty$ είναι απλή: αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty$ τότε η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση f για την οποία έχουμε $c_k(f) = c_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}\right| \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|$$

για κάθε $x \in \mathbb{T}$, άρα $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leqslant \|\{c_k\}\|_{L^1(\mathbb{Z})}$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 11.1.1 για τους χώρους $Q = \mathbb{Z}$ με το μέτρο αρίθμησης και $U = \mathbb{T}$ με το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue. Θεωρούμε τον τελεστή $T' : L^2(\mathbb{Z}) + L^1(\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{T}) + L^\infty(\mathbb{T})$ ο οποίος απεικονίζει την $\{c_k\}$ στη συνάρτηση $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$. Έστω $1 < p < 2$. Παρατηρήστε ότι $L^p(\mathbb{Z}) \subset L^2(\mathbb{Z})$, άρα, αν $\{c_k\} \in L^p(\mathbb{T})$ έχουμε ότι η

$$T'(\{c_k\})(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \in L^2(\mathbb{T}).$$

Έχουμε $\|T'(\{c_k\})\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|\{c_k\}\|_{L^2(\mathbb{Z})}$ αν $\{c_k\} \in L^2(\mathbb{Z})$ και $\|T'(\{c_k\})\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leqslant \|\{c_k\}\|_{L^1(\mathbb{Z})}$ αν $\{c_k\} \in L^1(\mathbb{Z})$. Δηλαδή, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 11.1.1 για τα ζεύγη $(2, 2)$ και $(1, \infty)$ με $M_{2,2} = 1$ και $M_{1,\infty} = 1$. Αφού οι p, q ικανοποιούν τις

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{2} + \frac{t}{1} \quad \text{και} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{2} + \frac{t}{\infty} = \frac{1-t}{2}$$

με $t = 1 - \frac{2}{q} \in (0, 1)$, από το Θεώρημα 11.1.1 συμπεραίνουμε ότι αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\{c_k(f)\}_{k=-\infty}^{\infty} \in L^p(\mathbb{Z})$ τότε $f \in L^q(\mathbb{T})$ και

$$\|f\|_q = \|T'(\{c_k\})\|_q \leqslant M_{2,2}^{1-t} M_{1,\infty}^t \|\{c_k\}\|_p.$$

Η τελευταία ανισότητα είναι ακριβώς ισοδύναμη με την (11.2.0.5).

$\boxed{+}$

Η επόμενη εφαρμογή είναι η ανισότητα Hausdorff-Young για το μετασχηματισμό Fourier στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 11.2.3 (ανισότητα Hausdorff-Young). *Έστω $1 \leqslant p \leqslant 2$ και έστω q ο συζυγής εκθέτης του p. Ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F}$ επεκτείνεται μονοσήμαντα από την κλάση των απλών $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ στον $L^p(\mathbb{R}^n)$ και για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ έχουμε $\mathcal{F}(f) \in L^q(\mathbb{R}^n)$ και*

$$\|\mathcal{F}(f)\|_q \leqslant \|f\|_p. \tag{11.2.0.6}$$

Απόδειξη. Στο Κεφάλαιο 3 είδαμε ότι ο $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ικανοποιεί την $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_1$ για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, και ότι ο $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ ικανοποιεί την $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$ για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Επίσης, οι $\mathcal{F}_1$ και $\mathcal{F}_2$ συμφωνούν στις απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

Από την $1 \leqslant p \leqslant 2$ έχουμε ότι $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$. Άρα, για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ μπορούμε να ορίσουμε την $\mathcal{F}(f)$ (εξηγήστε γιατί) και το Θεώρημα 11.1.1 μας δίνει την (11.2.0.6). Η μοναδικότητα της επέκτασης προκύπτει από την πυκνότητα των απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στον $L^p(\mathbb{R}^n)$.

$\boxed{+}$

Παρατήρηση 11.2.4. *Αξίζει τον κόπο να δούμε το διάγραμμα Riesz που αντιστοιχεί σε καθένα από τα παραπάνω τρία θεωρήματα:*

(α) *Θεώρημα 11.2.1: Το διάγραμμα Riesz είναι το κλειστό τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ και $(1,0)$.*

(β) *Θεώρημα 11.2.2: Το διάγραμμα Riesz είναι το κλειστό τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1,1)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ και $(1,0)$.*

(γ) *Θεώρημα 11.2.3: Το διάγραμμα Riesz είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ και $(1,0)$, δηλαδή το κοινό σύνορο των παραπάνω δύο τριγώνων.*

Αυτό που μας δίνουν τα παραπάνω τρία θεωρήματα είναι ότι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ και $(1,0)$ περιέχεται στο διάγραμμα Riesz και στις τρείς περιπτώσεις. Στο Θεώρημα 11.2.1 έχουμε και το σημείο $(0,0)$ λόγω της τετριμμένης ανισότητας $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$. Από την κυρτότητα του διαγράμματος Riesz έπεται το (α). Στο Θεώρημα 11.2.2 έχουμε και το σημείο $(1,1)$ λόγω της ανισότητας $\|T'(\{c_k\}\|_1 \leqslant \|T'(\{c_k\}\|_\infty \leqslant \|\{c_k\}\|_1$. Από την κυρτότητα του διαγράμματος Riesz έπεται το (β). Το γεγονός ότι το τρίτο διάγραμμα δεν μπορεί να επεκταθεί αφήνεται ως άσκηση.

Η τελευταία μας εφαρμογή είναι η ανισότητα του Young για την συνέλιξη στον $\mathbb{R}^n$ (την οποία έχουμε ήδη συζητήσει στις ασκήσεις της Ενότητας 4).

Θεώρημα 11.2.5 (ανισότητα Young). *Έστω $1 \leqslant p,q,r \leqslant \infty$ που ικανοποιούν την $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$. Αν $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ και $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ τότε $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ και*

(11.2.0.7)
$$\|f * g\|_q \leqslant \|f\|_p \|g\|_r.$$

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε την (11.2.0.7) για απλές ολοκληρώσιμες f και g. Σταθεροποιούμε την g και θεωρούμε τον τελεστή $f \mapsto T(f) = f * g$. Μια βασική ανισότητα για συνελίξεις (απλή συνέπεια της ανισότητας Minkowski) που έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει, μας εξασφαλίζει ότι

$$\|T(f)\|_r = \|f * g\|_r \leqslant M_g \|f\|_1$$

για κάθε απλή ολοκληρώσιμη f, όπου $M_g = \|g\|_r$. Επίσης, από την ανισότητα Hölder έχουμε

$$\|T(f)\|_\infty = \|f * g\|_\infty \leqslant \|g\|_r \|f\|_{r^*} = M_g \|f\|_{r^*}$$

για κάθε απλή ολοκληρώσιμη f, όπου r^* είναι ο συζυγής εκθέτης του r. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 11.1.1 ως εξής: από την υπόθεση για τα p,q και r έχουμε $t = r\left(1 - \frac{1}{p}\right) \in [0,1]$, και γι' αυτήν την τιμή του t ικανοποιούνται οι $\frac{1-t}{r} + \frac{t}{\infty} = \frac{1}{q}$ και $\frac{1-t}{1} + \frac{t}{r^*} = \frac{1}{p}$. Άρα, το Θεώρημα 11.1.1 μας δίνει

$$\|T(f)\|_q = \|f * g\|_q \leqslant M_g^{1-t} M_g^t \|f\|_p = \|g\|_r \|f\|_p$$

για κάθε απλή ολοκληρώσιμη f.

$\boxed{+}$

Αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει για τους $L^p(\mathbb{T})$: αν οι $1 \leqslant p,q,r \leqslant \infty$ ικανοποιούν την $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$, τότε για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ και $g \in L^q(\mathbb{T})$ έχουμε $f * g \in L^r(\mathbb{T})$ και

(11.2.0.8)
$$\|f * g\|_q \leqslant \|f\|_p \|g\|_r.$$

Εδώ, το εύρος των (p, q, r) για τα οποία ισχύει η ανισότητα είναι αυτομάτως μεγαλύτερο, αφού $\|g\|_{r_1} \leqslant \|g\|_r$ όταν $r_1 \leqslant r$.

Το διάγραμμα Riesz της ανισότητας του Young στον $\mathbb{R}^n$ (για σταθερή τιμή του r) είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεια $\left(1 - \frac{1}{r}, 0\right)$ και $\left(1, \frac{1}{r}\right)$. Το αντίστοιχο διάγραμμα Riesz της ανισότητας του Young στο $\mathbb{T}$ (για σταθερή τιμή του r) είναι το τραπέζιο με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 1)$, $\left(1 - \frac{1}{r}, 0\right)$ και $\left(1, \frac{1}{r}\right)$.