ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αρμονική Ανάλυση

Ενότητα: Ο μετασχηματισμός Hilbert στον $L^p(\mathbb{T})$

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

10 Ο μετασχηματισμός Hilbert στον $L^p(\mathbb{T})$

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα δούμε ότι για κάθε $1 < p < \infty$ και για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$,

$$\|f - s_n(f)\|_p \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$. Για το σκοπό αυτό θα δείξουμε ότι ο μετασχηματισμός Hilbert

$$Hf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{1}{\pi} \int\limits_{\varepsilon < |t| < \pi} \frac{f(x-t)}{2\,\varepsilon\varphi(t/2)}\, dt$$

ορίζεται καλά για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$ και ότι για κάθε $1 < p < \infty$ υπάρχει σταθερά $C_p > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$,

$$\|Hf\|_p \leqslant C_p \|f\|_p$$

και $\tilde{f} = Hf$. Αυτό δείχνει ότι έχουμε συζυγία στον $L^p(\mathbb{T})$ και κατόπι μπορούμε να εφαρμόσουμε τις αναγωγές του προηγούμενου Κεφαλαίου.

Βασικό ρόλο στην απόδειξη των παραπάνω θα παίξουν το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz (το οποίο συζητάμε στην Παράγραφο 10.1), η διάσπαση Calderón-Zygmund μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης (την οποία περιγράφουμε στην Παράγραφο 10.2) και ο μεγιστικός τελεστής $f \mapsto Mf = f^*$, όπου f^* είναι η μεγιστική συνάρτηση της f που έχουμε συζητήσει στην Ενότητα 3.

10.1 Το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz

Έχουμε δεί ότι αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε η μεγιστική συνάρτηση $Mf = f^*$ της f δεν είναι γενικά ολοκληρώσιμη, ικανοποιεί όμως την εξής ανισότητα ασθενούς τύπου: για κάθε $\lambda > 0$,

(10.1.0.1)
$$m(\{x : Mf(x) > \lambda\}) \leqslant \frac{c}{\lambda} \|f\|_1,$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά (ανεξάρτητη από την f και την τιμή του λ). Είναι επίσης εύκολο να δούμε ότι ο μεγιστικός τελεστής $f \mapsto Mf$ απεικονίζει τον $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ στον $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Πράγματι, για κάθε ανοικτή μπάλα B με $x \in B$ έχουμε

$$\frac{1}{m(B)} \int\limits_B |f(y)|\, dy \leqslant \frac{1}{m(B)} \int\limits_B \|f\|_\infty dy = \|f\|_\infty,$$

συνεπώς

(10.1.0.2)
$$|Mf(x)| = \sup_{x \in B} \frac{1}{m(B)} \int\limits_B |f(y)|\, dy \leqslant \|f\|_\infty.$$

Έπεται ότι

(10.1.0.3)
$$\|Mf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty.$$

Ένα ερώτημα που προκύπτει είναι τι μπορούμε να πούμε για την συμπεριφορά της Mf αν υποθέσουμε ότι $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ για κάποιο $1 < p < \infty$. Θα μελετήσουμε αυτό το πρόβλημα στο γενικότερο πλαίσιο των υπογραμμικών τελεστών.

Ορισμός 10.1.1. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Ένας τελεστής $f \mapsto Tf$ λέγεται* ***υπογραμμικός*** *αν για κάθε f_1 και f_2 για τις οποίες οι Tf_1 και Tf_2 ορίζονται καλά, οι $T(f_1 + f_2)$ και $T(af_1)$, $a \in \mathbb{K}$, ορίζονται καλά και ικανοποιούν τις*

$$|T(f_1 + f_2)(x)| \leqslant |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)| \quad \text{σχεδόν παντού} \tag{10.1.0.4}$$

και

$$|T(af_1)(x)| \leqslant |a|\,|Tf_1(x)| \quad \text{σχεδόν παντού} \tag{10.1.0.5}$$

Λέμε ότι ένας υπογραμμικός τελεστής είναι (ισχυρού) τύπου (p, p) για κάποιο $1 \leqslant p \leqslant \infty$ αν ορίζεται καλά σαν τελεστής από τον $L^p(\mu)$ στον $L^p(\mu)$ και υπάρχει σταθερά $A_p > 0$ ώστε

$$\|Tf\|_p \leqslant A_p \|f\|_p \tag{10.1.0.6}$$

για κάθε $f \in L^p(\mu)$. Όμοια, λέμε ότι ένας υπογραμμικός τελεστής είναι ασθενούς τύπου (p, p) για κάποιο $1 \leqslant p < \infty$ αν ορίζεται καλά για κάθε $f \in L^p(\mu)$ και υπάρχει σταθερά $A_p > 0$ ώστε

$$\lambda^p m(\{x : |Tf(x)| > \lambda\}) \leqslant A_p^p \|f\|_p^p \tag{10.1.0.7}$$

για κάθε $f \in L^p(\mu)$ και για κάθε $\lambda > 0$.

Συνήθως, θα θεωρούμε τελεστές T οι οποίοι ορίζονται φυσιολογικά σε ένα ζεύγος χώρων $L^{p_0}(\mu)$ και $L^{p_1}(\mu)$. Είναι βολικό να θεωρήσουμε τον χώρο $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ όλων των συναρτήσεων f οι οποίες γράφονται στη μορφή $f = f_0 + f_1$ για κάποιες $f_0 \in L^{p_0}(\mu)$ και $f_1 \in L^{p_1}(\mu)$. Ο $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ γίνεται χώρος Banach με νόρμα την

$$\|f\|_{L^{p_0}+L^{p_1}} = \inf\{\|f_0\|_{p_0} + \|f_1\|_{p_1} : f_i \in L^{p_i}, f = f_0 + f_1\}. \tag{10.1.0.8}$$

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz. Με $L(\mu)$ συμβολίζουμε τις μετρήσιμες συναρτήσεις.

Θεώρημα 10.1.2 (Marcinkiewicz)**.** *Έστω $0 < p_0 < p_1 \leqslant \infty$ και έστω $T : L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu) \to L(\mu)$ υπογραμμικός τελεστής, ο οποίος είναι ασθενούς τύπου (p_0, p_0) με σταθερά A_0 και ισχυρού τύπου (p_1, p_1) με σταθερά A_1. Τότε, για κάθε $p_0 < p < p_1$ ο T είναι ισχυρού τύπου (p, p) με σταθερά*

$$A_p = 2\left(\frac{p}{p - p_0} + \frac{p}{p_1 - p}\right)^{1/p} A_0^{\frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}}} A_1^{\frac{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}}}$$

αν $p_1 < \infty$, και

$$A_p = 2\left(\frac{p}{p - p_0}\right)^{1/p} A_0^{\frac{p_0}{p}} A_1^{1 - \frac{p_0}{p}}$$

αν $p_1 = \infty$.

Απόδειξη. Εξετάζουμε χωριστά τις περιπτώσεις $p_1 < \infty$ και $p_1 = \infty$.

(α) **Η περίπτωση** $0 < p_0 < p < p_1 < \infty$. Έστω $f \in L^p(\mu)$ και $\delta > 0$ το οποίο θα επιλεγεί αργότερα. Για κάθε $\lambda > 0$ ορίζουμε

$$f_0^\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } |f(x)| > \delta\lambda \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και

$$f_1^\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } |f(x)| \leqslant \delta\lambda \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $f_0^\lambda \in L^{p_0}(\mu)$, $f_1^\lambda \in L^{p_1}(\mu)$ και $f = f_1 + f_2$. Για τον πρώτο ισχυρισμό, παρατηρούμε ότι $p_0 - p < 0$ και γράφουμε

(10.1.0.9)
$$\begin{aligned}\|f_0^\lambda\|_{p_0}^{p_0} &= \int\limits_{\{x:|f(x)|>\delta\lambda\}} |f(x)|^p |f(x)|^{p_0-p} d\mu \leqslant (\delta\lambda)^{p_0-p} \int\limits_{\{x:|f(x)|>\delta\lambda\}} |f(x)|^p d\mu \\ &\leqslant (\delta\lambda)^{p_0-p} \|f\|_p^p < \infty.\end{aligned}$$

Για τον δεύτερο ισχυρισμό, αφού $p_1 - p > 0$, έχουμε

(10.1.0.10)
$$\begin{aligned}\|f_1^\lambda\|_{p_1}^{p_1} &= \int\limits_{\{x:|f(x)|\leqslant\delta\lambda\}} |f(x)|^p |f(x)|^{p_1-p} dx \leqslant (\delta\lambda)^{p_1-p} \{x : |f(x)| \leqslant \delta\lambda\} |f(x)|^p d\mu \\ &\leqslant (\delta\lambda)^{p_1-p} \|f\|_p^p < \infty.\end{aligned}$$

Τέλος, από τον ορισμό των f_0^λ και f_1^λ είναι φανερό ότι $f = f_0^\lambda + f_1^\lambda$.

Στη συνέχεια, για ευκολία στον συμβολισμό θέτουμε $m_g(s) = m(\{x : |g(x)| > s\})$. Από την υπογραμμικότητα του T έχουμε $|Tf| \leqslant |Tf_0^\lambda| + |Tf_1^\lambda|$ σχεδόν παντού, άρα

$$\{x : |Tf(x)| > \lambda\} \subseteq \{x : |Tf_0^\lambda(x)| > \lambda/2\} \cup \{x : |Tf_1^\lambda(x)| > \lambda/2\},$$

και αυτό μας δίνει

(10.1.0.11)
$$m_{Tf}(\lambda) \leqslant m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2) + m_{Tf_1^\lambda}(\lambda/2).$$

Από τις υποθέσεις μας έχουμε

(10.1.0.12)
$$m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2) \leqslant A_0^{p_0} \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{p_0} \int\limits_{\{x:|f(x)|>\delta\lambda} |f(x)|^{p_0} dx$$

και

(10.1.0.13)
$$m_{Tf_1^\lambda}(\lambda/2) \leqslant A_1^{p_1} \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{p_1} \|f_1^\lambda\|_{p_1}^{p_1} = A_1^{p_1} \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{p_1} \int\limits_{\{x:|f(x)|\leqslant\delta\lambda} |f(x)|^{p_1} dx.$$

Τώρα, γράφουμε

(10.1.0.14)
$$\begin{aligned}\|Tf\|_p^p &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_{Tf}(\lambda)\, d\lambda \\ &\leqslant \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2)\, d\lambda + \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_{Tf_1^\lambda}(\lambda/2)\, d\lambda,\end{aligned}$$

και χρησιμοποιούμε τις (10.1.0.11) και (10.1.0.12) για να φράξουμε τα δύο ολοκληρώματα. Έχουμε

(10.1.0.15)
$$\begin{aligned}\int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2)\, d\lambda &\leqslant p(2A_0)^{p_0} \int_0^\infty \lambda^{p-1}\lambda^{-p_0} \int\limits_{\{x:|f(x)|>\delta\lambda\}} |f(x)|^{p_0} dx \\ &= p(2A_0)^{p_0} \int |f(x)|^{p_0} \int_0^{|f(x)|/\delta} \lambda^{p-p_0-1} d\lambda\, dx\end{aligned}$$

$$= \frac{p}{p-p_0}\,\frac{(2A_0)^{p_0}}{\delta^{p-p_0}}\int |f(x)|^p dx$$
$$= \frac{p}{p-p_0}\,\frac{(2A_0)^{p_0}}{\delta^{p-p_0}}\,\|f\|_p^p$$

και

$$\int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_{Tf_1^\lambda}(\lambda/2)\,d\lambda \leqslant p(2A_1)^{p_1}\int_0^\infty \lambda^{p-1}\lambda^{-p_1}\int_{\{x:|f(x)|\leqslant\delta\lambda\}} |f(x)|^{p_1}dx$$
$$= p(2A_1)^{p_1}\int |f(x)|^{p_1}\int_{|f(x)|/\delta}^\infty \lambda^{p-p_1-1}d\lambda\,dx$$
$$= \frac{p}{p_1-p}\,\frac{(2A_1)^{p_1}}{\delta^{p-p_1}}\int |f(x)|^p dx$$
$$= \frac{p}{p_1-p}\,\frac{(2A_1)^{p_1}}{\delta^{p-p_1}}\,\|f\|_p^p.$$

Συνεπώς,

(10.1.0.16)
$$\|Tf\|_p \leqslant \left(\frac{p}{p-p_0}\,\frac{(2A_0)^{p_0}}{\delta^{p-p_0}} + \frac{p}{p_1-p}\,\frac{(2A_1)^{p_1}}{\delta^{p-p_1}}\right)^{1/p}\|f\|_p$$

για κάθε $\delta > 0$. Επιλέγουμε το δ να ικανοποιεί την

$$\delta^{p_1-p_0} = \frac{(2A_0)^{p_0}}{(2A_1)^{p_1}},$$

και αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση έχουμε το συμπέρασμα.

(β) Η περίπτωση $1 \leqslant p_0 < p < p_1 = \infty$.

Έστω $f \in L^p(\mu)$. Επιλέγουμε από την αρχή $\delta = \frac{1}{2A_1}$. Για κάθε $\lambda > 0$ ορίζουμε τις f_0^λ και f_1^λ όπως και στην προηγούμενη περίπτωση. Παρατηρήστε ότι

(10.1.0.17)
$$\|Tf_1^\lambda\|_\infty \leqslant A_1\|f_1^\lambda\|_\infty \leqslant A_1\delta\lambda = \lambda/2.$$

Συνεπώς, από την

$$\{x : |Tf(x)| > \lambda\} \subseteq \{x : |Tf_0^\lambda(x)| > \lambda/2\} \cup \{x : |Tf_1^\lambda(x)| > \lambda/2\},$$

παίρνουμε

(10.1.0.18)
$$m_{Tf}(\lambda) \leqslant m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2) + m_{Tf_1^\lambda}(\lambda/2) = m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2).$$

Από τις υποθέσεις μας έχουμε

(10.1.0.19)
$$m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2) \leqslant A_0^{p_0}\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{p_0}\int_{\{x:|f(x)|>\delta\lambda\}} |f(x)|^{p_0}dx.$$

Άρα, χρησιμοποιώντας και την $2A_1 = 1/\delta$, έχουμε

(10.1.0.20)
$$\|Tf\|_p^p \leqslant \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2)\,d\lambda$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant p(2A_0)^{p_0}\int_0^\infty \lambda^{p-1}\lambda^{-p_0}\int_{\{x:|f(x)|>\delta\lambda\}}|f(x)|^{p_0}dx\\
&= p(2A_0)^{p_0}\int |f(x)|^{p_0}\int_0^{|f(x)|/\delta}\lambda^{p-p_0-1}d\lambda\, dx\\
&= \frac{p}{p-p_0}\frac{(2A_0)^{p_0}}{\delta^{p-p_0}}\int |f(x)|^p dx\\
&= \frac{p}{p-p_0}\frac{(2A_0)^{p_0}}{\delta^{p-p_0}}\|f\|_p^p\\
&= \frac{p}{p-p_0}(2A_0)^{p_0}(2A_1)^{p-p_0}\|f\|_p^p.
\end{aligned}
$$

Έπεται ότι

$$
\|Tf\|_p \leqslant 2\left(\frac{p}{p-p_0}\right)^{1/p} A_0^{\frac{p_0}{p}} A_1^{1-\frac{p_0}{p}}\|f\|_p.
$$

Δηλαδή, ο T είναι (ισχυρού) τύπου (p,p).

$\boxed{+}$

Ειδικότερα, στην περίπτωση $p_0 = 1$ και $p_1 = \infty$ το Θεώρημα 10.1.2 παίρνει την εξής απλούστερη μορφή.

Θεώρημα 10.1.3. *Έστω $T : L^1(\mu) + L^\infty(\mu) \to L(\mu)$ υπογραμμικός τελεστής, ο οποίος είναι ασθενούς τύπου $(1,1)$ με σταθερά A και ισχυρού τύπου (∞,∞) με σταθερά B. Τότε, για κάθε $1 < p < \infty$ ο T είναι ισχυρού τύπου (p,p) με σταθερά*

$$
A_p = 2\left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p} A^{\frac{1}{p}}B^{1-\frac{1}{p}}.
$$

Το Θεώρημα 10.1.3 εφαρμόζεται για τον μεγιστικό τελεστή $f \mapsto Mf$. Όπως είδαμε στην εισαγωγή αυτής της παραγράφου, ο M είναι ασθενούς τύπου $(1,1)$ με σταθερά c και ισχυρού τύπου (∞,∞) με σταθερά 1. Από τον ορισμό του M βλέπουμε εύκολα ότι είναι υπογραμμικός τελεστής. Συνεπώς, από το Θεώρημα 10.1.3 παίρνουμε αμέσως το εξής.

Θεώρημα 10.1.4. *Έστω $1 < p < \infty$. Για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ έχουμε $Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ και*

$$
\|Mf\|_p \leqslant 2\left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p} C_n^{\frac{1}{p}}\|f\|_p,
$$

όπου $C_n = 3^n$.

Παρατηρήστε ότι

$$
2\left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p} C_n^{\frac{1}{p}} = O\left(\frac{1}{p-1}\right)
$$

καθώς το $p \to 1+$.

10.2 Διάσπαση Calderón-Zygmund

Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Συμβολίζουμε με $f_{\mathbb{T}}$ τη μέση τιμή της $|f|$:

$$
f_{\mathbb{T}} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(y)|\, dy.
$$

Θεωρούμε έναν $\lambda > 0$ τέτοιον ώστε

$$f_{\mathbb{T}} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} |f(y)|\, dy < \lambda.$$

Θα δουλέψουμε με τα λεγόμενα ανοικτά δυαδικά διαστήματα του $\mathbb{T}$. Αυτά είναι τα ανοικτά διαστήματα που προκύπτουν όταν διαιρούμε διαδοχικά το $\mathbb{T}$ σε ανοικτά διαστήματα με το ίδιο μήκος. Στο πρώτο βήμα λοιπόν χωρίζουμε το $\mathbb{T}$ στα ανοικτά διαστήματα $\mathbb{T}_1 = (-\pi, 0)$ και $\mathbb{T}_2 = (0, \pi)$. Παρατηρήστε ότι

$$\frac{f_{\mathbb{T}_1} + f_{\mathbb{T}_2}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}_1} |f(y)|\, dy + \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}_2} |f(y)|\, dy \right) = f_{\mathbb{T}} < \lambda,$$

άρα τουλάχιστον μία από τις μέσες τιμές $f_{\mathbb{T}_1}$ και $f_{\mathbb{T}_2}$ είναι μικρότερη από λ. Επίσης, για $i = 1, 2$ έχουμε

$$f_{\mathbb{T}_i} \leqslant 2 f_{\mathbb{T}} < 2\lambda.$$

Συνεχίζουμε την διαδικασία ως εξής: αν η μέση τιμή της f σε κάποιο υποδιάστημα είναι μικρότερη ή ίση από λ τότε διαιρούμε αυτό το διάστημα σε δύο ανοικτά διαστήματα ίσου μήκους. Αν η μέση τιμή της f σε κάποιο υποδιάστημα είναι μεγαλύτερη από λ τότε κρατάμε αυτό το διάστημα και το ονομάζουμε I_j (αν είναι το j-οστό διάστημα που προέκυψε κατ' αυτόν τον τρόπο). Τότε,

$$\lambda < \frac{1}{m(I_j)} \int\limits_{I_j} |f(y)|\, dy = f_{I_j} < 2\lambda.$$

Ας υποθέσουμε ότι, μετά από k βήματα, έχουμε κρατήσει τα $I_1, \ldots, I_n$. Όλα τα διαστήματα I που δεν έχουν κρατηθεί έχουν την ιδιότητα ότι $f_I < \lambda$. Χωρίζουμε καθένα από αυτά τα διαστήματα σε δύο ανοικτά διαστήματα ίσου μήκους. Η μέση τιμή της f σε καθένα από αυτά είναι μικρότερη ή ίση από 2λ και υπάρχει τουλάχιστον ένα από αυτά στο οποίο η μέση τιμή της f είναι μικρότερη από λ. Εκείνα τα διαστήματα στα οποία η μέση τιμή της f είναι μεταξύ λ και 2λ τα μετονομάζουμε σε $I_{n+1}, \ldots, I_m$ και τα κρατάμε. Αυτά είναι τα διαστήματα που προκύπτουν στο $(k+1)$-οστό βήμα. Συνεχίζοντας αυτήν την διαδικασία παίρνουμε μια οικογένεια $\{I_j\}$ από ξένα ανοικτά δυαδικά υποδιαστήματα του $\mathbb{T}$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) Για κάθε j ισχύει

(10.2.0.21)
$$\lambda < \frac{1}{m(I_j)} \int\limits_{I_j} |f(y)|\, dy < 2\lambda,$$

συνεπώς,

(10.2.0.22)
$$\sum_j m(I_j) \leqslant \frac{1}{\lambda} \sum_j \int\limits_{I_j} |f(y)|\, dy \leqslant \frac{1}{\lambda} \int\limits_{\mathbb{T}} |f(y)|\, dy.$$

(ii) Αν $\Omega = \bigcup\limits_j I_j$ τότε σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{T} \setminus \Omega$ υπάρχει μια φθίνουσα ακολουθία $\{J_s(x)\}$ δυαδικών διαστημάτων, η οποία συγκλίνει στο x, με την ιδιότητα: για κάθε s,

(10.2.0.23)
$$\frac{1}{m(J_s)} \int\limits_{J_s} |f(y)|\, dy < \lambda.$$

Η (10.2.0.23) ισχύει σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}\setminus\Omega$, διότι δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ισχύει απαραίτητα στα άκρα των δυαδικών υποδιαστημάτων του $\mathbb{T}$. Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι $x\in Leb(f)$, τότε

$$|f(x)| = \lim_{s\to\infty}\frac{1}{m(J_s)}\int_{J_s}|f(y)|\,dy \leqslant \lambda. \tag{10.2.0.24}$$

Συνεπώς, $|f(x)|\leqslant\lambda$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}\setminus\Omega$.

Η οικογένεια $\{I_j\}$ που προκύπτει με την παραπάνω διαδικασία ονομάζεται **διάσπαση Calderón-Zygmund** της f στο επίπεδο λ. Με βάση αυτήν την διάσπαση ορίζουμε

$$g_\lambda(x) := g(x) = f(x)\chi_{\mathbb{T}\setminus K}(x) + \sum_j\left(\frac{1}{m(I_j)}\int_{I_j} f(y)\,dy\right)\chi_{I_j}(x) \tag{10.2.0.25}$$

και

$$b_\lambda(x) := b(x) = f(x) - g(x) = \sum_j\left(f(x) - \frac{1}{m(I_j)}\int_{I_j} f(y)\,dy\right)\chi_{I_j}(x). \tag{10.2.0.26}$$

Παρατηρήστε ότι, για κάθε $x\in\Omega$ έχουμε $x\in I_j$ για κάποιο j, και

$$|g(x)| \leqslant \frac{1}{m(I_j)}\int_{I_j}|f(y)|\,dy \leqslant 2\lambda. \tag{10.2.0.27}$$

Αφού $|g(x)| = |f(x)|\leqslant\lambda$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}\setminus\Omega$, έπεται ότι

$$\|g\|_\infty \leqslant 2\lambda. \tag{10.2.0.28}$$

Για την b έχουμε $b(x) = 0$ για κάθε $x\in\mathbb{T}\setminus\Omega$. Επίσης, εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\int_{I_j} b(x)\,dx = \int_{I_j} f(x)\,dx - m(I_j)\cdot\frac{1}{m(I_j)}\int_{I_j} f(y)\,dy = 0 \tag{10.2.0.29}$$

για κάθε j, και

$$\begin{aligned}\frac{1}{m(I_j)}\int_{I_j}|b(x)|\,dx &= \frac{1}{m(I_j)}\int_{I_j}\left|f(x) - \frac{1}{m(I_j)}\int_{I_j} f(y)\,dy\right|\,dx \\ &\leqslant \frac{2}{m(I_j)}\int_{I_j}|f(y)|\,dy \leqslant 4\lambda\end{aligned} \tag{10.2.0.30}$$

για κάθε j.

Το επόμενο θεώρημα συνοψίζει την κατασκευή που περιγράψαμε.

Θεώρημα 10.2.1 (διάσπαση Calderón-Zygmund στο επίπεδο λ)**.** *Έστω $f\in L^1(\mathbb{T})$ και έστω $\lambda>0$ με*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(y)|\,dy < \lambda.$$

Υπάρχει ακολουθία $\{I_j\}$ ξένων ανοικτών δυαδικών υποδιαστημάτων του $\mathbb{T}$ τέτοια ώστε:

(10.2.0.31) $$|f(x)| \leqslant \lambda \quad \textit{σχεδόν για κάθε } x \in \mathbb{T} \setminus \bigcup_j I_j$$

και

(10.2.0.32) $$\lambda \leqslant \frac{1}{m(I_j)} \int_{I_j} |f(y)|\, dy \leqslant 2\lambda \quad \textit{για κάθε } j.$$

Αν $\Omega = \bigcup_j I_j$ τότε

(10.2.0.33) $$m(\Omega) \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} |f(y)|\, dy \leqslant \frac{2\pi}{\lambda} \|f\|_1.$$

Επιπλέον, αν ορίσουμε

(10.2.0.34) $$g(x) = f(x)\chi_{\mathbb{T}\setminus\Omega}(x) + \sum_j \left(\frac{1}{m(I_j)} \int_{I_j} f(y)\, dy \right) \chi_{I_j}(x)$$

και

(10.2.0.35) $$b(x) = \sum_j \left(f(x) - \frac{1}{m(I_j)} \int_{I_j} f(y)\, dy \right) \chi_{I_j}(x),$$

τότε $f(x) = g(x) + b(x)$, και οι συναρτήσεις g και b έχουν τις εξής ιδιότητες:

(10.2.0.36) $$|g(x)| \leqslant 2\lambda$$

σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{T}$,

(10.2.0.37) $$\|g\|_p^p \leqslant (2\lambda)^{p-1} \|f\|_1$$

για κάθε $1 \leqslant p < \infty$, και

(10.2.0.38) $$\int_{I_j} b(y)\, dy = 0, \qquad \frac{1}{m(I_j)} \int_{I_j} |b(y)|\, dy \leqslant \frac{2}{m(I_j)} \int_{I_j} |f(y)|\, dy$$

και

(10.2.0.39) $$\|b\|_1 \leqslant 2\|f\|_1.$$

Απόδειξη. Το μόνο που μένει να ελέγξουμε είναι η (10.2.0.37), η οποία είναι απλή συνέπεια της $\|g\|_\infty \leqslant 2\lambda$. Έχουμε

$$\int_{\mathbb{T}} |g(x)|^p dx \leqslant \int_{\mathbb{T}} \|g\|_\infty^{p-1} |g(x)|\, dx \leqslant (2\lambda)^{p-1} \int_{\mathbb{T}} |g(x)|\, dx \leqslant (2\lambda)^{p-1} \int_{\mathbb{T}} |f(x)|\, dx.$$

για κάθε $p \geqslant 1$.

$\boxed{+}$

10.3 Ύπαρξη του μετασχηματισμού Hilbert για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε την ύπαρξη του μετασχηματισμού Hilbert για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Θεώρημα 10.3.1 (ύπαρξη και ορισμός του μετασχηματισμού Hilbert)**.** *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Το όριο*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|t|<\pi} \frac{f(x-t)}{2\,\varepsilon\varphi(t/2)}\,dt \tag{10.3.0.40}$$

υπάρχει σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{T}$. Ορίζουμε

$$Hf(x) = \text{p.v.}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(x-t)}{2\,\varepsilon\varphi(t/2)}\,dt := \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|t|<\pi} \frac{f(x-t)}{2\,\varepsilon\varphi(t/2)}\,dt. \tag{10.3.0.41}$$

Η καλά ορισμένη συνάρτηση Hf είναι ο **μετασχηματισμός Hilbert** *της f.*

Απόδειξη. Για κάθε $\lambda > \|f\|_1$ θεωρούμε την διάσπαση Calserón-Zygmund της f στο επίπεδο λ_k. Στη συνέχεια θα γράφουμε $g = g_{\lambda_k}$, $f = f_{\lambda_k}$ και $I_j = (x_j - L_j/2, x_j + L_j/2)$. Ορίζουμε επίσης $2I_j := (x_j - L_j, x_j + L_j)$ και $\Omega^* = \bigcup_j 2I_j$. Παρατηρήστε ότι

$$m(\Omega^*) \leqslant \sum_j m(2I_j) = 2\sum_j m(I_j) = 2m(\Omega) \leqslant \frac{2}{\lambda}\int_{\mathbb{T}} |f(y)|\,dy. \tag{10.3.0.42}$$

Για κάθε $0 < \varepsilon < \pi$ έχουμε $H_\varepsilon f = H_\varepsilon g + H_\varepsilon b$ και αφού $g \in L^2(\mathbb{T})$ γνωρίζουμε ότι ορίζεται η

$$\tilde{g}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon g(x) \tag{10.3.0.43}$$

και $\|\tilde{g}\|_2 \leqslant C_1\|g\|_2$. Ο βασικός ισχυρισμός είναι ο εξής:

Ισχυρισμός 1. *Το $\lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon b(x)$ υπάρχει σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}\setminus\Omega^*$.*

Έχοντας αποδείξει τον Ισχυρισμό 1 για κάθε $\lambda > \|f\|_1$ μπορούμε να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος ως εξής. Θεωρούμε μια γνησίως αύξουσα ακολουθία (λ_k) με $\lambda_k > \|f\|_1$ και $\lambda_k \to \infty$. Για κάθε k υπάρχει το

$$\lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon f(x) = \tilde{g}_{\lambda_k}(x) + \lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon b_{\lambda_k}(x)$$

για όλα τα $x \in \mathbb{T}\setminus\Omega^*_{\lambda_k}$. Άρα, το $\lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon f(x)$ υπάρχει για όλα τα $x \in \mathbb{T}\setminus\bigcap_k \Omega^*_{\lambda_k}$. Όμως, από την (10.3.0.42), για κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε

$$m\left(\bigcap_k \Omega^*_{\lambda_k}\right) \leqslant m(\Omega^*_{\lambda_n}) \leqslant \frac{2}{\lambda_n}\int_{\mathbb{T}} |f(y)|\,dy \to 0 \tag{10.3.0.44}$$

καθώς το $n \to \infty$. Άρα, $m\left(\bigcap_k \Omega^*_{\lambda_k}\right) = 0$ και αυτό αποδεικνύει ότι το $\lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon f(x)$ υπάρχει σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.

Για την απόδειξη του Ισχυρισμού 1 αρκεί να δείξουμε ότι σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}\setminus\Omega^*$ τότε η $\{H_\varepsilon b(x)\}_{\varepsilon>0}$ είναι Cauchy, δηλαδή ότι

$$\lim_{\varepsilon,\eta\to 0} |H_\varepsilon b(x) - H_\eta b(x)| = 0. \tag{10.3.0.45}$$

Αρχικά θα δείξουμε κάτι ασθενέστερο:

Ισχυρισμός 2. *Σχεδόν παντού στο $\mathbb{T} \setminus \Omega^*$ ισχύει*

$$\limsup_{\varepsilon,\eta\to 0} |H_\varepsilon b(x) - H_\eta b(x)| < \infty. \tag{10.3.0.46}$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού 2. Θεωρούμε $0 < \eta < \varepsilon < \pi$ και γράφουμε

$$H_\varepsilon b(x) - H_\eta b(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{x-\varepsilon}^{x-\eta} \frac{b(t)}{2\,\text{εφ}\,\frac{x-t}{2}}\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{x+\eta}^{x+\varepsilon} \frac{b(t)}{2\,\text{εφ}\,\frac{x-t}{2}}\,dt. \tag{10.3.0.47}$$

Θα φράξουμε απολύτως το

$$\int_{x+\eta}^{x+\varepsilon} \frac{b(t)}{2\,\text{εφ}\,\frac{x-t}{2}}\,dt.$$

Όμοια δουλεύουμε με το άλλο ολοκλήρωμα. Παρατηρήστε ότι $x \notin 2I_j$ για κάθε j και ότι $b(t) = \sum_j b(t)\chi_{I_j}(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{T}$. Συνεπώς,

$$\int_{x+\eta}^{x+\varepsilon} \frac{b(t)}{2\,\text{εφ}\,\frac{x-t}{2}}\,dt = \sum_{\{j:(x+\eta,x+\varepsilon)\cap I_j\neq\emptyset\}} \int_{(x+\eta,x+\varepsilon)\cap I_j} \frac{b(t)}{2\,\text{εφ}\,\frac{x-t}{2}}\,dt. \tag{10.3.0.48}$$

Παρατηρήστε επίσης ότι αν $(x+\eta, x+\varepsilon) \cap I_j \neq \emptyset$ τότε συμβαίνει ένα από τα εξής: (α) $x+\eta \in I_j$, (β) $x+\varepsilon \in I_j$ ή (γ) $I_j \subseteq [x+\eta, x+\varepsilon]$. Επίσης, καθένα από τα (α) ή (β) μπορεί να συμβαίνει για μία (το πολύ) τιμή του j διότι τα I_j είναι ξένα. Εξετάζουμε τις τρείς αυτές περιπτώσεις χωριστά:

(α) $x+\eta \in I_j$: Θυμηθείτε ότι $2I_j = (x_j - L_j, x_j + L_j)$. Αφού $x \notin 2I_j$, έχουμε $|x - x_j| \geqslant L_j$. Επίσης, αφού $x+\eta \in I_j$ έχουμε $|x+\eta - x_j| < L_j/2$. Συνεπώς,

$$\eta = |\eta| \geqslant |x - x_j| - |x+\eta-x_j| > L_j - \frac{L_j}{2} = \frac{L_j}{2}.$$

Έπεται ότι

$$(x+\eta, x+\varepsilon) \cap I_j \subseteq (x+\eta, x+\eta+L_j) \subseteq (x+\eta, x+\eta+3\eta) = (x+\eta, x+3\eta).$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι $x \in Leb(f)$. Παίρνοντας υπ¨ όψιν και την $b(x) = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\left| \int_{(x+\eta,x+\varepsilon)\cap I_j} \frac{b(t)}{2\,\text{εφ}\,\frac{x-t}{2}}\,dt \right| &\leqslant \int_{x+\eta}^{x+3\eta} \frac{|b(t)|}{2|\,\text{εφ}\,\frac{x-t}{2}|}\,dt \\
&= \int_{\eta}^{3\eta} \frac{|b(x+t)-b(x)|}{2|\,\text{εφ}\,\frac{t}{2}|}\,dt \leqslant \frac{c}{\eta}\int_{\eta}^{3\eta} |b(x+t)-b(x)|\,dt \\
&\leqslant \frac{3c}{3\eta}\int_{0}^{3\eta} |b(x+t)-b(x)|\,dt = o(1)
\end{aligned}$$

καθώς το $\eta \to 0$. Δηλαδή, σχεδόν παντού στο $\mathbb{T} \setminus \Omega^*$ έχουμε

(10.3.0.49)
$$\left| \int_{(x+\eta,x+\varepsilon)\cap I_j} \frac{b(t)}{2\,\text{εφ}\,\frac{x-t}{2}}\,dt \right| = o(1)$$

καθώς το $\eta \to 0$.

(β) $x+\varepsilon \in I_j$: Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι

(10.3.0.50)
$$\left| \int_{(x+\eta,x+\varepsilon)\cap I_j} \frac{b(t)}{2\,\text{εφ}\,\frac{x-t}{2}}\,dt \right| = o(1)$$

καθώς το $\varepsilon \to 0$.

(γ) $I_j \subseteq [x+\eta, x+\varepsilon]$: Χρησιμοποιώντας την $\int_{I_j} b(t)\,dt = 0$ γράφουμε

(10.3.0.51)
$$\begin{aligned}\int_{(x+\eta,x+\varepsilon)\cap I_j} \frac{b(t)}{2\,\text{εφ}\,\frac{x-t}{2}}\,dt &= \int_{I_j} \frac{b(t)}{2\,\text{εφ}\,\frac{x-t}{2}}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{I_j} b(t)\left(\frac{1}{\text{εφ}\,\frac{x-t}{2}} - \frac{1}{\text{εφ}\,\frac{x-x_j}{2}}\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{I_j} b(t)k(t,x,x_j)\,dt,\end{aligned}$$

όπου x_j είναι το μέσο του I_j και

(10.3.0.52)
$$k(t,x,x_j) = \frac{1}{\text{εφ}\,\frac{x-t}{2}} - \frac{1}{\text{εφ}\,\frac{x-x_j}{2}} = \frac{\text{ημ}\,\frac{t-x_j}{2}}{\text{ημ}\,\frac{x-t}{2}\;\text{ημ}\,\frac{x-x_j}{2}}.$$

Παρατηρούμε ότι, αφού $x \notin 2I_j$, για κάθε $t \in I_j$ έχουμε $\min\{|x-x_j|, |x-t|\} \geqslant L_j/2$, άρα

$$|x-t| \leqslant |x-x_j| + |x_j-t| \leqslant |x-x_j| + L_j/2 \leqslant 2|x-x_j|$$

και

$$|x-x_j| \leqslant |x-t| + |t-x_j| \leqslant |x-t| + L_j/2 \leqslant 2|x-t|.$$

Επειδή οι ποσότητες $|x-t|, |x-x_j|, |x_j-t|$ είναι μικρές όταν τα η, ε είναι μικρά (λόγω της $I_j \subseteq [x+\eta, x+\varepsilon]$) μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα ημίτονα με τα ορίσματά τους, και έτσι καταλήγουμε στο φράγμα

$$|k(t,x,x_j)| \leqslant c_1 \frac{|x_j-t|}{|x-t|\,|x-x_j|} \leqslant c_2 \frac{L_j}{(x-x_j)^2},$$

αφού $|t-x_j| \leqslant L_j/2$ για κάθε $t \in I_j$ και $|x-t| \simeq |x-x_j|$.

Τελικά,

(10.3.0.53)
$$\left| \int_{(x+\eta,x+\varepsilon)\cap I_j} \frac{b(t)}{2\,\text{εφ}\,\frac{x-t}{2}}\,dt \right| \leqslant \frac{1}{2}\int_{I_j} |b(t)|\,|k(t,x,x_j)|\,dt$$

$$\leqslant c_3 \frac{L_j}{(x-x_j)^2} \int_{I_j} |b(t)|\, dt$$
$$\leqslant c_3 \frac{L_j}{(x-x_j)^2} \int_{I_j} |f(t)|\, dt.$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε: σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{T} \setminus \Omega^*$ και καθώς τα $\eta, \varepsilon \to 0$,

(10.3.0.54)
$$\begin{aligned} |H_\varepsilon b(x) - H_\eta b(x)| &\leqslant \sum_{\{j: I_j \subseteq [x-\varepsilon, x-\eta]\}} \frac{c_3 L_j}{(x-x_j)^2} \int_{I_j} |f(t)|\, dt \\ &+ \sum_{\{j: I_j \subseteq [x+\eta, x+\varepsilon]\}} \frac{c_3 L_j}{(x-x_j)^2} \int_{I_j} |f(t)|\, dt o(1) \\ &\leqslant c_3 \Delta(f,x) + o(1), \end{aligned}$$

όπου

(10.3.0.55)
$$\Delta(f,x) = \sum_j \frac{L_j}{(x-x_j)^2} \int_{I_j} |f(t)|\, dt, \qquad x \in \mathbb{T} \setminus \Omega^*.$$

Αν δείξουμε ότι

(10.3.0.56)
$$\int_{\mathbb{T}\setminus\Omega^*} \Delta(f,x)\, dx < +\infty,$$

τότε θα συμπεράνουμε ότι

(10.3.0.57)
$$\limsup_{\varepsilon,\eta\to 0} |H_\varepsilon b(x) - H_\eta b(x)| < +\infty,$$

σχεδόν παντού στο $\mathbb{T} \setminus \Omega^*$, δηλαδή τον Ισχυρισμό 2.

Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν $x \in \mathbb{T} \setminus \Omega^*$ τότε $x \notin 2I_j$ για κάθε j, άρα $|x - x_j| \geqslant L_j$. Έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{T}\setminus\Omega^*} \frac{L_j}{(x-x_j)^2}\, dx \leqslant \int_{\mathbb{T}\setminus 2I_j} \frac{L_j}{(x-x_j)^2}\, dx \leqslant 2L_j \int_{L_j}^{\infty} \frac{ds}{s^2} = \frac{2}{L_j},$$

άρα

(10.3.0.58)
$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}\setminus\Omega^*} \Delta(f,x)\, dx &= \sum_j \left(\int_{I_j} |f(t)|\, dt \right) L_j \int_{\mathbb{T}\setminus\Omega^*} \frac{L_j}{(x-x_j)^2}\, dx \\ &\leqslant \sum_j \left(\int_{I_j} |f(t)|\, dt \right) L_j \cdot \frac{2}{L_j} \\ &\leqslant 2 \sum_j \int_{I_j} |f(t)|\, dt \leqslant 2 \int_{\Omega} |f(t)|\, dt \\ &\leqslant 4\pi \, \|f\|_1. \end{aligned}$$

Έτσι, η απόδειξη του Ισχυρισμού 2 είναι πλήρης. □

Απόδειξη του Ισχυρισμού 1. Έστω $x \in \mathbb{T} \setminus \Omega$ για το οποίο $\Delta(f, x) < +\infty$. Θεωρούμε τυχόν $N \in \mathbb{N}$. Για $\varepsilon, \eta > 0$ αρκετά μικρά, έχουμε $(x - \varepsilon, x - \eta) \cap I_j = \emptyset$ και $(x + \eta, x + \varepsilon) \cap I_j = \emptyset$ για κάθε $j = 1, \dots, N$. Άρα,

$$|H_\varepsilon b(x) - H_\eta b(x)| \leqslant \sum_{\{j : I_j \subseteq [x-\varepsilon, x-\eta]\}} \frac{c_3 L_j}{(x - x_j)^2} \int_{I_j} |f(t)|\, dt + \sum_{\{j : I_j \subseteq [x+\eta, x+\varepsilon]\}} \frac{c_3 L_j}{(x - x_j)^2} \int_{I_j} |f(t)|\, dt o(1) \leqslant \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{L_j}{(x - x_j)^2} \int_{I_j} |f(t)|\, dt. \tag{10.3.0.59}$$

Αφού $\Delta(f, x) < +\infty$, έχουμε

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{L_j}{(x - x_j)^2} \int_{I_j} |f(t)|\, dt = 0.$$

Άρα,

$$\limsup_{\varepsilon,\eta\to 0} |H_\varepsilon b(x) - H_\eta b(x)| = 0,$$

και η απόδειξη του Ισχυρισμού 1 είναι πλήρης. Με δεδομένο τον Ισχυρισμό 1, έχουμε αποδείξει το θεώρημα.

$\boxed{+}$

Παρατηρήσεις 10.3.2. *(α) Από την (10.3.0.58) και την ανισότητα του Markov βλέπουμε ότι, για κάθε $\lambda > 0$,*

$$m(\{x \in \mathbb{T} \setminus \Omega^* : \Delta(f, x) > \lambda\}) \leqslant \frac{c}{\lambda} \int_{\Omega} |f(t)|\, dt. \tag{10.3.0.60}$$

(β) Έστω $\lambda > \|f\|_1$ και $b = b_\lambda$. Παίρνοντας $\varepsilon \to \pi^-$ και εξετάζοντας προσεκτικά την παραπάνω απόδειξη βλέπουμε ότι, σχεδόν παντού στο $\mathbb{T} \setminus \Omega^*$ έχουμε

$$|H_\eta b(x)| \leqslant c_1 \Delta(f, x) + \frac{c_2}{\eta} \int_{x+\eta}^{x+3\eta} |b(t)|\, dt + \frac{c_2}{\eta} \int_{x-3\eta}^{x-\eta} |b(t)|\, dt \leqslant C\, (\Delta(f, x) + Mb(x)) \tag{10.3.0.61}$$

για κάθε $0 < \eta < \pi$. Αφήνοντας το $\eta \to 0^+$ βλέπουμε επίσης ότι, σχεδόν παντού στο $\mathbb{T} \setminus \Omega^*$ έχουμε

$$|Hb(x)| \leqslant C\, \Delta(f, x). \tag{10.3.0.62}$$

10.4 Ο μετασχηματισμός Hilbert στον $L^p(\mathbb{T})$

Στην προηγούμενη παράγραφο δείξαμε ότι ο μετασχηματισμός Hilbert Hf ορίζεται καλά για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$. Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι δεν είναι, γενικά, ολοκληρώσιμη συνάρτηση: θεωρούμε μια μη αρνητική συνάρτηση $f \in L^1(\mathbb{T})$ η οποία μηδενίζεται έξω από το $[0, \pi/2)$. Τότε, για κάθε $x \in [-\pi/2, 0)$ έχουμε

$$Hf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} H_\varepsilon f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{2\,\text{εφ}((x-t)/2)}\,dt.$$

Στο παραπάνω ολοκλήρωμα έχουμε $x < 0$ και $t > 0$, άρα $\text{εφ}((x-t)/2) = -\,\text{εφ}((|x|+t)/2)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} Hf(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{2\,\text{εφ}((|x|+t)/2)}\,dt \geqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{|x|} \frac{f(t)}{2\,\text{εφ}(|x|/2)}\,dt \\ &\geqslant \frac{c}{|x|} \int_0^{|x|} f(t)\,dt. \end{aligned} \tag{10.4.0.63}$$

Αν τώρα επιλέξουμε $d(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{ln(1/t)}\right)$ μπορούμε να ελέγξουμε ότι $f \geqslant 0$, $f \in L^1(\mathbb{T})$ και η Hf δεν είναι ολοκληρώσιμη (άσκηση).

Όπως όμως συμβαίνει και με την μεγιστική συνάρτηση, έχουμε την εξής ανισότητα ασθενούς τύπου:

Θεώρημα 10.4.1. *Υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε, για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$ και για κάθε $0 < \varepsilon < \pi$ και $\lambda > 0$,*

$$m(\{x : |H_\varepsilon f(x)| > \lambda\}) \leqslant \frac{C}{\lambda}\|f\|_1. \tag{10.4.0.64}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda > \|f\|_1$. Πράγματι, αν $\lambda \leqslant \|f\|_1$ μπορούμε να γράψουμε

$$m(\{x : |H_\varepsilon f(x)| > \lambda\}) \leqslant 2\pi \leqslant \frac{2\pi}{\lambda}\,\|f\|_1. \tag{10.4.0.65}$$

Θεωρούμε λοιπόν $\lambda > \|f\|_1$ και την διάσπαση Calderón-Zygmund $f = g + b$ της f στο επίπεδο λ. Αφού

$$\{x : |H_\varepsilon f(x)| > \lambda\} \subseteq \Omega_\lambda^* \cup \{x \in \mathbb{T} \setminus \Omega_\lambda^* : |H_\varepsilon f(x)| > \lambda\}, \tag{10.4.0.66}$$

αρκεί να εκτιμήσουμε τα $m(\Omega_\lambda^*)$ και $m(\{x \in \mathbb{T} \setminus \Omega_\lambda^* : |H_\varepsilon f(x)| > \lambda\})$. Θυμηθείτε ότι

$$\begin{aligned} m(\Omega_\lambda^*) &\leqslant \sum_j m(2I_j) = 2\sum_j m(I_j) \leqslant \frac{2}{\lambda}\sum_j \int_{I_j} |f(y)|\,dy \\ &\leqslant \frac{4\pi}{\lambda}\,\|f\|_1. \end{aligned} \tag{10.4.0.67}$$

Για το δεύτερο σύνολο, για κάθε $x \in \mathbb{T} \setminus \Omega_\lambda^*$ γράφουμε

$$H_\varepsilon f(x) = H_\varepsilon g(x) + H_\varepsilon b(x). \tag{10.4.0.68}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{T} \setminus \Omega_\lambda^* : |H_\varepsilon f(x)| > \lambda\} \\ &\quad \subseteq \{x \in \mathbb{T} \setminus \Omega_\lambda^* : |H_\varepsilon g(x)| > \lambda/2\} \cup \{x \in \mathbb{T} \setminus \Omega_\lambda^* : |H_\varepsilon b(x)| > \lambda/2\}. \end{aligned} \tag{10.4.0.69}$$

Γνωρίζουμε ότι $g \in L^2(\mathbb{T})$, άρα $H_\varepsilon g \in L^2(\mathbb{T})$ και $\|H_\varepsilon g\|_2 \leqslant c_1\|g\|_2$. Από την ανισότητα του Markov,

(10.4.0.70)
$$\frac{\lambda^2}{4} m(\{x \in \mathbb{T} \setminus \Omega_\lambda^* : |H_\varepsilon g(x)| > \lambda/2\}) \leqslant \int_{\mathbb{T}} |H_\varepsilon g(x)|^2 dx \leqslant c_1^2 \int_{\mathbb{T}} |g(x)|^2 dx \leqslant c_2\lambda \int_{\mathbb{T}} |g(x)|\, dx \leqslant c_3\lambda\|f\|_1.$$

Άρα,

(10.4.0.71)
$$m(\{x \in \mathbb{T} \setminus \Omega_\lambda^* : |H_\varepsilon g(x)| > \lambda/2\}) \leqslant \frac{4c_3}{\lambda}\|f\|_1.$$

Για το δεύτερο σύνολο στην (10.4.0.69) χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι

(10.4.0.72)
$$|H_\varepsilon b(x)| \leqslant c_4(\Delta(f,x) + Mb(x))$$

για κάθε $x \in \mathbb{T} \setminus \Omega_\lambda^*$. Άρα,

(10.4.0.73)
$$\{x \in \mathbb{T} \setminus \Omega_\lambda^* : |H_\varepsilon b(x)| > \lambda/2\} \subseteq \{x \in \mathbb{T} \setminus \Omega_\lambda^* : \Delta(f,x) > \lambda/(4c_4)\} \cup \{x \in \mathbb{T} \setminus \Omega_\lambda^* : Mb(x) > \lambda/(4c_4)\}.$$

Όμως,

(10.4.0.74)
$$\int_{\mathbb{T}\setminus\Omega_\lambda^*} \Delta(f,x)\, dx \leqslant c_5\|f\|_1,$$

άρα

(10.4.0.75)
$$m(\{x \in \mathbb{T} \setminus \Omega_\lambda^* : \Delta(f,x) > \lambda/(4c_4)\}) \leqslant \frac{c_6}{\lambda}\|f\|_1.$$

Επίσης, για την μεγιστική συνάρτηση Mb της b γνωρίζουμε ότι

(10.4.0.76)
$$m(\{x \in \mathbb{T} \setminus \Omega_\lambda^* : Mb(x) > \lambda/(4c_4)\}) \leqslant \frac{c_7}{\lambda}\|b\|_1 \leqslant \frac{c_8}{\lambda}\|f\|_1.$$

Συνδυάζοντας όλες αυτές τις εκτιμήσεις έχουμε το συμπέρασμα.

$\boxed{+}$

Θεώρημα 10.4.2. *Για κάθε $1 < p < 2$ υπάρχει σταθερά $C_p = O\left(\frac{1}{p-1}\right)$ ώστε για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ η $Hf \in L^p(\mathbb{T})$ και*

(10.4.0.77)
$$\|Hf\|_p \leqslant C_p\|f\|_p.$$

Επιπλέον, $Hf(x) = \tilde{f}(x)$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$. Συνεπώς, έχουμε συζυγία στον $L^p(\mathbb{T})$.

Απόδειξη. Έχουμε δει ότι για κάθε $f \in L^2(\mathbb{T})$ ισχύει $\|Hf\|_2 \leqslant c_1\|f\|_2$. Δηλαδή, ο H είναι ισχυρού τύπου $(2,2)$. Από το Θεώρημα 10.4.1, για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$ και για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε

$$m(\{x : |Hf(x)| > \lambda\}) \leqslant \frac{c_2}{\lambda}\|f\|_1.$$

Συνεπώς, ο H είναι ασθενούς τύπου $(1,1)$. Από το θεώρημα του Marcinkiewicz, για κάθε $1 < p < 2$ ο H είναι ισχυρού τύπου (p,p) με σταθερά $C_p = O\left(\frac{1}{p-1}\right)$. Δηλαδή, για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < 2$,

(10.4.0.78)
$$\|Hf\|_p \leqslant C_p\|f\|_p.$$

Μένει να δείξουμε ότι $Hf(x) = \tilde{f}(x)$ σχεδόν παντού. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την $f(x) - \sigma_n(f, x)$. Αφού $\sigma_n(f) \in L^2(\mathbb{T})$ και $H\sigma_n(f) = \tilde{\sigma}_n(f)$, έχουμε

(10.4.0.79) $$H(f - \sigma_(f))(x) = Hf(x) - \tilde{\sigma}_n(f, x)$$

σχεδόν παντού. Από την (10.4.0.78) παίρνουμε

(10.4.0.80) $$\|Hf - \tilde{\sigma}_n(f)\|_p \leqslant C_p\|f - \sigma_n(f)\|_p.$$

Από το θεώρημα του Fejér έχουμε $\|f - \sigma_n(f)\|_p \to 0$, άρα $\|Hf - \tilde{\sigma}_n(f)\|_p \to 0$. Ειδικότερα, $\|Hf - \tilde{\sigma}_n(f)\|_1 \to 0$, άρα

(10.4.0.81) $$\lim_{n\to\infty} c_k(\tilde{\sigma}_n(f)) = c_k(Hf)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Όμως,

$$\tilde{\sigma}_n(f, x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)(-i)(sign\, k)c_k(f)e^{ikx},$$

άρα, για $n > |k|$ έχουμε

(10.4.0.82) $$c_k(\tilde{\sigma}_n(f)) = \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)(-i)(sign\, k)c_k(f) \to (-i)(sign\, k)c_k(f)$$

καθώς το $n \to \infty$. Έπεται ότι $c_k(Hf) = (-i)(sign\, k)c_k(f)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, άρα $\tilde{f} = Hf \in L^p(\mathbb{T})$ και $\|\tilde{f}\|_p = \|Hf\|_p \leqslant C_p\|f\|_p$.

$\boxed{+}$

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 10.4.2 με τα αποτελέσματα της Παραγράφου 6.2 έχουμε άμεσα το εξής.

Θεώρημα 10.4.3. *Για κάθε $1 < p < 2$ και για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$,*

(10.4.0.83) $$\|f - s_n(f)\|_p \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$. □

Περνάμε τώρα στην περίπτωση $2 < p < \infty$.

Θεώρημα 10.4.4. *Για κάθε $2 < p < \infty$ υπάρχει σταθερά $C_p = O(p)$ ώστε για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ η $Hf \in L^p(\mathbb{T})$ και*

(10.4.0.84) $$\|Hf\|_p \leqslant C_p\|f\|_p.$$

Επιπλέον, $Hf(x) = \tilde{f}(x)$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$. Συνεπώς, έχουμε συζυγία στον $L^p(\mathbb{T})$.

Απόδειξη. Αφού $p > 2$ έχουμε $L^p(\mathbb{T}) \subseteq L^2(\mathbb{T})$. Συνεπώς, για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ έχουμε $\tilde{f} = Hf \in L^2(\mathbb{T})$. Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι $Hf \in L^p(\mathbb{T})$ και ότι $\|Hf\|_p \leqslant Cp\|f\|_p$.

Θυμηθείτε ότι, για τον σκοπό αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι

(10.4.0.85) $$\|\sigma_n(\tilde{f})\|_p \leqslant Cp\|f\|_p$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τον συζυγή εκθέτη q του p και δείχνουμε ότι, για κάθε $g \in L^q(\mathbb{T})$ με $\|g\|_q \leqslant 1$ ισχύει

(10.4.0.86) $$|\langle \sigma_n(\tilde{f}), g\rangle| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sigma_n(\tilde{f}, t)\overline{g(t)}\, dt \right| \leqslant Cp\|f\|_p.$$

Λόγω της πυκνότητας των τριγωνομετρικών πολυωνύμων στον $L^q(\mathbb{T})$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι η g είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Τότε, $\sigma_n(\tilde{f}), g \in L^2(\mathbb{T})$, οπότε η ταυτότητα του Parseval μας δίνει

(10.4.0.87) $$\begin{aligned} |\langle \sigma_n(\tilde{f}), g\rangle| &= \left| \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)(-i)(sign\, k)c_k(f)\overline{c_k(g)} \right| \\ &= \left| \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\overline{\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)(-i)(sign\, k)c_k(g)} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{\sigma_n(\tilde{g}, t)}\, dt \right| \\ &= |\langle f, \sigma_n(\tilde{g})\rangle|. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder και την $\|\sigma_n(\tilde{g})\|_q \leqslant \|\tilde{g}\|_q$ παίρνουμε

(10.4.0.88) $$|\langle \sigma_n(\tilde{f}), g\rangle| \leqslant \|\sigma_n(\tilde{g})\|_q\|f\|_p \leqslant \|\tilde{g}\|_q\|f\|_p \leqslant C_q\|g\|_q\|f\|_p$$

όπου $C_q = O\left(\frac{1}{q-1}\right) = O\left(\frac{p}{q}\right) = O(p)$ καθώς το $q \to 1$ (δηλαδή, καθώς το $p \to \infty$). Έπεται ότι

(10.4.0.89) $$\|\sigma_n(\tilde{f})\|_p = \sup\left\{|\langle \sigma_n(\tilde{f}), g\rangle| : \|g\|_q \leqslant 1\right\} \leqslant Cp\|f\|_p.$$

Το θεώρημα είναι τώρα άμεση συνέπεια της (10.4.0.84).

$\boxed{+}$

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 10.4.4 με τα αποτελέσματα της Παραγράφου 6.2 έχουμε το εξής.

Θεώρημα 10.4.5. *Για κάθε $2 < p < \infty$ και για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$,*

(10.4.0.90) $$\|f - s_n(f)\|_p \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$. □

10.5 Η κλάση $L\, lnL$ του Zygmund

Στην τελευταία παράγραφο αυτού του Κεφαλαίου κοιτάζουμε πιο προσεκτικά τους υπογραμμικούς τελεστές που είναι ταυτόχρονα ασθενούς τύπου $(1,1)$ και ισχυρού τύπου (∞,∞). Η επόμενη πρόταση μας δίνει έναν απλό χαρακτηρισμό τους.

Πρόταση 10.5.1. *Ένας υπογραμμικός τελεστής T ορισμένος στον $L^1(\mathbb{T}) + L^\infty(\mathbb{T})$ είναι ταυτόχρονα ασθενούς τύπου $(1,1)$ και ισχυρού τύπου (∞,∞) αν και μόνο αν υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε, για κάθε $\lambda > 0$,*

(10.5.0.91) $$m(\{x : |Tf(x)| > \lambda\}) \leqslant \frac{c_1}{\lambda} \int_{\lambda/c_2}^{\infty} m(\{x : |f(x)| > t\})\, dt.$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη της (10.5.0.91) επαναλαμβάνουμε μέρος της απόδειξης του θεωρήματος του Marcinkiewicz στην ειδική περίπτωση $p_0 = 1$ και $p_1 = \infty$. Επιλέγουμε από την αρχή $\delta = \frac{1}{2A}$, όπου A είναι η σταθερά στην ανισότητα ισχυρού τύπου (∞, ∞). Για κάθε $\lambda > 0$ ορίζουμε

$$f_0^\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } |f(x)| > \lambda/2A \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και

$$f_1^\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } |f(x)| \leqslant \lambda/2A \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι

(10.5.0.92) $$\|Tf_1^\lambda\|_\infty \leqslant A\|f_1^\lambda\|_\infty \leqslant \lambda/2.$$

Συνεπώς, από την

$$\{x : |Tf(x)| > \lambda\} \subseteq \{x : |Tf_0^\lambda(x)| > \lambda/2\} \cup \{x : |Tf_1^\lambda(x)| > \lambda/2\},$$

παίρνουμε

(10.5.0.93) $$\begin{aligned} m(\{x : |Tf(x)| > \lambda\}) &\leqslant m(\{x : |Tf_0^\lambda(x)| > \lambda/2\}) + m(\{x : |Tf_1^\lambda(x)| > \lambda/2\}) \\ &= m(\{x : |Tf_0^\lambda(x)| > \lambda/2\}). \end{aligned}$$

Από την ανισότητα ασθενούς τύπου $(1, 1)$ έχουμε

(10.5.0.94) $$m(\{x : |Tf_0^\lambda(x)| > \lambda/2\}) \leqslant c\frac{c_1}{\lambda} \int\limits_{\{x:|f(x)|>\lambda/c_2} |f(x)|\,dx.$$

Με αλλαγή μεταβλητής και των σταθερών c_1, c_2 έχουμε την (10.5.0.91). Αντίστροφα, αν δεχτούμε την (10.5.0.91) τότε, για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$ παίρνουμε την ανισότητα ασθενούς τύπου $(1, 1)$ αντικαθιστώντας το λ/c_2 με 0. Επίσης, για κάθε $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ παρατηρούμε ότι $m(\{x : |f(x)| > s\}) = 0$ αν $s \geqslant \|f\|_\infty$, άρα το ολοκλήρωμα μηδενίζεται αν $\lambda \geqslant c_2\|f\|_\infty$. Συνεπώς, έχουμε $m(\{x : |Tf(x)| > \lambda\}) = 0$ αν $\lambda \geqslant c_2\|f\|_\infty$, και έπεται ότι $\|Tf\|_\infty \leqslant c_2\|f\|_\infty$.

$\boxed{+}$

Η ανισότητα (10.5.0.91) δίνει αρκετές πληροφορίες για την ολοκληρωσιμότητα της Tf. Για παράδειγμα, αν $f \in \bigcup\limits_{p>1} L^p(\mathbb{T})$ τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $Tf \in L^1(\mathbb{T})$. Όμως, αυτό δεν είναι το βέλτιστο αποτέλεσμα. Η κατάλληλη κλάση για το ερώτημα είναι η κλάση $L\,lnL$ του Zygmund, την οποία ορίζουμε στη συνέχεια.

Ορισμός 10.5.2 (η κλάση $L\,lnL$ του Zygmund). *Λέμε ότι μια μετρήσιμη συνάρτηση f ανήκει στην κλάση $L\,lnL(\mathbb{T})$ αν*

$$\int\limits_{\mathbb{T}} |f(x)|\,ln^+|f(x)|\,dx = \int\limits_0^\infty m(\{x : |f(x)| > \lambda\}) \frac{d(\lambda\,ln^+\lambda)}{d\lambda} < \infty,$$

όπου $ln^+t = lnt$ αν $t \geqslant 1$ και $ln^+t = 0$ αλλιώς.

Θεώρημα 10.5.3. *Έστω T ένας υπογραμμικός τελεστής, ορισμένος στον $L^1(\mathbb{T}) + L^\infty(\mathbb{T})$, ο οποίος είναι ταυτόχρονα ασθενούς τύπου $(1, 1)$ και ισχυρού τύπου (∞, ∞). Τότε, ο T απεικονίζει τον $L\,lnL(\mathbb{T})$ στον $L^1(\mathbb{T})$, και*

(10.5.0.95) $$\|Tf\|_1 \leqslant c + c\int\limits_{\mathbb{T}} |f(x)|\,ln^+|f(x)|\,dx,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Αφού $m(\{x : |Tf(x)| \leqslant 1\}) \leqslant 2\pi$, αρκεί να δείξουμε ότι

(10.5.0.96)
$$I := \int_{\{|Tf|>1\}} |Tf(x)|\, dx \leqslant c \int_{\mathbb{T}} |f(x)|\, ln^+|f(x)|\, dx$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$.

Χρησιμοποιώντας την (10.5.0.91) και το θεώρημα Tonelli γράφουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_1^\infty m(\{x : |Tf(x)| > \lambda\})\, d\lambda \leqslant c \int_1^\infty \frac{1}{\lambda} \int_{c\lambda}^\infty m(\{x : |f(x)| > s\})\, ds\, d\lambda \\ &= c_1 \int_c^\infty m(\{x : |f(x)| > s\}) \int_1^{s/c} \frac{d\lambda}{\lambda}\, ds \\ &= c_1 \int_c^\infty m(\{x : |f(x)| > s\})\, ln^+(s/c)\, ds, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται το συμπέρασμα.

$\boxed{+}$

Το συμπέρασμα του Θεωρήματος 10.5.3 είναι βέλτιστο, όπως φαίνεται από το επόμενο θεώρημα σχετικά με τον μεγιστικό τελεστή Hardy-Littlewood.

Θεώρημα 10.5.4. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $Mf \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε, $f \in L\, lnL(\mathbb{T})$.*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι, για κάθε $\lambda < \|f\|_1$,

(10.5.0.97)
$$\frac{1}{2\lambda} \int_{\{|f|>\lambda\}} |f(x)|\, dx \leqslant m(\{x : Mf(x) > \lambda\}).$$

Πράγματι, αν θεωρήσουμε την διάσπαση Calderón-Zygmund της f στο επίπεδο λ, για κάθε j έχουμε

(10.5.0.98)
$$\lambda < \frac{1}{m(I_j)} \int_{I_j} |f(x)|\, dx \leqslant 2\lambda$$

και

(10.5.0.99)
$$|f(x)| \leqslant \lambda \quad \text{σχεδόν παντού στο} \quad \mathbb{T} \setminus \bigcup_j I_j.$$

Από την αριστερή ανισότητα στην (10.5.0.98) βλέπουμε ότι $\bigcup_j I_j \subseteq \{x : Mf(x) > \lambda\}$, ενώ από την δεξιά ανισότητα έχουμε

(10.5.0.100)
$$\int_{\bigcup_j I_j} |f(x)|\, dx \leqslant 2\lambda\, m\left(\bigcup_j I_j\right) \leqslant 2\lambda\, m(\{x : Mf(x) > \lambda\}).$$

Επιπλέον, αφού από την (10.5.0.99) έχουμε $\{x : |f(x)| > \lambda\} \subseteq \bigcup_j I_j$, από την (10.5.0.100) παίρνουμε αμέσως την (10.5.0.97). Ολοκληρώνοντας αυτήν την ανισότητα βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{\|f\|_1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \int_{\{|f|>\lambda\}} |f(x)|\, dx\, d\lambda &= \int_{\{x:|f(x)|>\|f\|_1\}} |f(x)| \int_{\|f\|_1}^{|f(x)|} \frac{d\lambda}{\lambda}\, dx \\ &\leqslant 2 \int_0^{\infty} m(\{x : Mf(x) > \lambda\})\, d\lambda,\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται το συμπέρασμα του θεωρήματος.

$\boxed{+}$