



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αρμονική Ανάλυση

Ενότητα: Προσεγγίσεις της μονάδας και Αθροισμότητα

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Περιεχόμενα ενότητας

6 Προσεγγίσεις της μονάδας και Αθροισιμότητα	4
6.1 Οικογένειες καλών πυρήνων και προσεγγίσεων της μονάδας	4
6.2 Cesàro αθροισιμότητα	10
6.3 Ο πυρήνας του Fejér	11
6.4 Χαρακτηρισμός των τριγωνομετρικών σειρών που είναι σειρές Fourier	17
6.5 Abel αθροισιμότητα και ο πυρήνας του Poisson	19

6 Προσεγγίσεις της μονάδας και Αθροισιμότητα

6.1 Οικογένειες καλών πυρήνων και προσεγγίσεων της μονάδας

Σε αυτήν την παράγραφο θα ασχοληθούμε με μέσες τιμές μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης f οι οποίες προκύπτουν από την συνέλιξη της f

$$(6.1.0.1) \quad (f * K_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)K_\delta(y) d\lambda(y)$$

με μια οικογένεια (K_δ) συναρτήσεων οι οποίες ικανοποιούν κατάλληλες συνθήκες.

Ορισμός 6.1.1 (οικογένεια καλών πυρήνων). Μια οικογένεια $(K_\delta)_{\delta>0}$ συναρτήσεων στο \mathbb{R} λέγεται **οικογένεια καλών πυρήνων**, ή πιο απλά **πυρήνας**, αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) Για κάθε $\delta > 0$,

$$(6.1.0.2) \quad \int_{\mathbb{R}} K_\delta(y) d\lambda(y) = 1.$$

(ii) Υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε, για κάθε $\delta > 0$,

$$(6.1.0.3) \quad \int_{\mathbb{R}} |K_\delta(y)| d\lambda(y) \leq M.$$

(iii) Για κάθε $\eta > 0$,

$$(6.1.0.4) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|y| \geq \eta} |K_\delta(y)| d\lambda(y) = 0.$$

Η συνέλιξη $f * K_\delta$ μιας φραγμένης μετρήσιμης συνάρτησης f με μια οικογένεια καλών πυρήνων $(K_\delta)_{\delta>0}$ συγκλίνει στην f σε κάθε σημείο στο οποίο η f είναι συνεχής:

Θεώρημα 6.1.2. Έστω $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ μια οικογένεια καλών πυρήνων και έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ στο οποίο η f είναι συνεχής, έχουμε

$$(6.1.0.5) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} (f * K_\delta)(x) = f(x).$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο x και θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$. Από τη συνέχεια της f στο x , υπάρχει $\eta > 0$ ώστε: αν $|y| < \eta$ τότε $|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (i) της (K_δ) , γράφουμε

$$(f * K_\delta)(x) - f(x) = \int K_\delta(y)f(x-y) d\lambda(y) - f(x) = \int K_\delta(y)[f(x-y) - f(x)] d\lambda(y).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} |(f * K_\delta)(x) - f(x)| &= \left| \int K_\delta(y)[f(x-y) - f(x)] d\lambda(y) \right| \\ &\leq \int_{|y| < \eta} |K_\delta(y)| |f(x-y) - f(x)| d\lambda(y) \\ &\quad + \int_{|y| \geq \eta} |K_\delta(y)| |f(x-y) - f(x)| d\lambda(y). \end{aligned}$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα παρατηρούμε ότι: αν $|y| < \eta$ τότε $|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$. Χρησιμοποιώντας και την ιδιότητα (ii) της (K_δ) , παίρνουμε

$$\int_{|y| < \eta} |K_\delta(y)| |f(x-y) - f(x)| d\lambda(y) \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} |K_\delta(y)| d\lambda(y) \leq M\varepsilon.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε την υπόθεση ότι η f είναι φραγμένη και την ιδιότητα (iii) της (K_δ) για το συγκεκριμένο η : έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{|y| \geq \eta} |K_\delta(y)| |f(x-y) - f(x)| d\lambda(y) &\leq \int_{|y| \geq \eta} |K_\delta(y)| (|f(x-y)| + |f(x)|) d\lambda(y) \\ &\leq 2\|f\|_\infty \int_{|y| \geq \eta} |K_\delta(y)| d\lambda(y) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

καθώς το $\delta \rightarrow 0$. Συνεπώς,

$$(6.1.0.6) \quad \limsup_{\delta \rightarrow 0} |(f * K_\delta)(x) - f(x)| \leq M\varepsilon,$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $(f * K_\delta)(x) \rightarrow f(x)$ καθώς το $\delta \rightarrow 0$.

+

Ορισμός 6.1.3 (οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας). Μια οικογένεια $(K_\delta)_{\delta > 0}$ συναρτήσεων στο \mathbb{R} λέγεται **οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας**, ή πιο απλά **προσέγγιση της μονάδας**, αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) Για κάθε $\delta > 0$,

$$(6.1.0.7) \quad \int_{\mathbb{R}} K_\delta(y) d\lambda(y) = 1.$$

(ii) Υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε, για κάθε $\delta > 0$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}$,

$$(6.1.0.8) \quad |K_\delta(y)| \leq \frac{M}{\delta}$$

και, για κάθε $\delta > 0$ και για κάθε $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$(6.1.0.9) \quad |K_\delta(y)| \leq \frac{M\delta}{y^2}.$$

Παρατηρήστε ότι η πρώτη ανισότητα στην (ii) είναι ισχυρότερη από την δεύτερη όταν $|y| \leq \delta$. Τελείως αντίστοιχα, η δεύτερη ανισότητα στην (ii) είναι ισχυρότερη από την πρώτη όταν $|y| \geq \delta$.

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι οι υποθέσεις του Ορισμού 6.1.3 είναι ισχυρότερες από αυτές του Ορισμού 6.1.1.

Πρόταση 6.1.4. Κάθε οικογένεια $(K_\delta)_{\delta>0}$ προσεγγίσεων της μονάδας είναι οικογένεια καλών πυρήνων.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι υπάρχει $R > 0$ ώστε: για κάθε $\delta > 0$,

$$(6.1.0.10) \quad \int_{\mathbb{R}} |K_\delta(y)| d\lambda(y) \leq R.$$

Έστω $\delta > 0$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (ii) των προσεγγίσεων της μονάδας, γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |K_\delta(y)| d\lambda(y) &= \int_{|y|<\delta} |K_\delta(y)| d\lambda(y) + \int_{|y|\geq\delta} |K_\delta(y)| d\lambda(y) \\ &\leq \frac{M}{\delta} \int_{|y|<\delta} \mathbf{1} d\lambda(y) + M\delta \int_{|y|\geq\delta} \frac{d\lambda(y)}{y^2} \\ &= \frac{M}{\delta} \int_{|y|<\delta} \mathbf{1} d\lambda(y) + M\delta \cdot 2 \int_{\delta}^{\infty} \frac{d\lambda(y)}{y^2} \\ &= \frac{M}{\delta} \cdot 2\delta + M\delta \cdot \frac{2}{\delta} \\ &= 4M. \end{aligned}$$

Άρα, έχουμε το ζητούμενο με $R = 4M$.

Για την τρίτη ιδιότητα της οικογένειας καλών πυρήνων, σταθεροποιούμε $\eta > 0$ και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (iii) των προσεγγίσεων της μονάδας, γράφουμε

$$(6.1.0.11) \quad \int_{|y|\geq\eta} |K_\delta(y)| d\lambda(y) \leq M\delta \int_{|y|\geq\eta} \frac{d\lambda(y)}{|y|^2} = \frac{2M}{\eta} \delta \rightarrow 0$$

καθώς το $\delta \rightarrow 0$.

+

Παραδείγματα 6.1.5. (α) Έστω $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια μη αρνητική, φραγμένη συνάρτηση που μηδενίζεται έξω από το $[-1, 1]$ και έχει ολοκλήρωμα

$$(6.1.0.12) \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) d\lambda(y) = 1.$$

Για κάθε $\delta > 0$ ορίζουμε $K_\delta(y) = \delta^{-1} \varphi(\delta^{-1}y)$. Η $(K_\delta)_{\delta>0}$ είναι οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας.

(β) Ο πυρήνας της θερμότητας \mathcal{H}_t στο \mathbb{R} ορίζεται ως εξής:

$$(6.1.0.13) \quad \mathcal{H}_t(y) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-|y|^2/4t}.$$

Η οικογένεια $(\mathcal{H}_{\delta^2})_{\delta>0}$ είναι οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας.

Το επόμενο βασικό θεώρημα «επεκτείνει» το Θεώρημα 6.1.2.

Θεώρημα 6.1.6. Έστω $(K_\delta)_{\delta>0}$ οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας. Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ ισχύει

$$(6.1.0.14) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} (f * K_\delta)(x) = f(x)$$

σε κάθε σημείο Lebesgue x της f . Συνεπώς, $f * K_\delta \rightarrow f$ σχεδόν παντού καθώς το $\delta \rightarrow 0$.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.6 θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 6.1.7. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και έστω $f \in Leb(f)$. Ορίζουμε

$$(6.1.0.15) \quad \mathcal{A}(r) = \frac{1}{r} \int_{|y| \leq r} |f(x-y) - f(x)| d\lambda(y), \quad r > 0.$$

Τότε, η συνάρτηση \mathcal{A} είναι φραγμένη, συνεχής, και

$$(6.1.0.16) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{A}(r) = 0.$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η $\mathcal{A}(r)$ είναι συνεχής. Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $r \mapsto r\mathcal{A}(r)$ είναι συνεχής σε κάθε $r > 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε την απόλυτη συνέχεια του ολοκληρώματος: αφού $f \in L^1(\mathbb{R})$, αν θεωρήσουμε μια ακολουθία $r_k \rightarrow r^+$ τότε

$$\begin{aligned} 0 \leq r_k \mathcal{A}(r_k) - r \mathcal{A}(r) &= \left| \int_{|y| \leq r_k} |f(x-y) - f(x)| d\lambda(y) - \int_{|y| \leq r} |f(x-y) - f(x)| d\lambda(y) \right| \\ &= \int_{r < |y| \leq r_k} |f(x-y) - f(x)| d\lambda(y) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

καθώς το $k \rightarrow \infty$, διότι η $y \mapsto |f(x-y) - f(x)|$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη και $\lambda(\{y : r < |y| \leq r_k\}) \rightarrow 0$ όταν $k \rightarrow \infty$. Παρόμοιο επιχείρημα δείχνει τη συνέχεια από αριστερά.

Αφού $x \in Leb(f)$ έχουμε

$$(6.1.0.17) \quad \lim_{\substack{\lambda(I) \rightarrow 0 \\ x \in I}} \frac{1}{\ell(I)} \int_I |f(z) - f(x)| dz = 0.$$

Όμως,

$$(6.1.0.18) \quad \mathcal{A}(r) = \frac{2}{\ell(x-r, x+r)} \int_{x-r}^{x+r} |f(z) - f(x)| dz,$$

άρα είναι φανερό ότι $\mathcal{A}(r) \rightarrow 0$ καθώς το $r \rightarrow 0$.

Η \mathcal{A} είναι συνεχής και $\lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{A}(r) = 0$. Συνεπώς, υπάρχει $M_1 > 0$ ώστε $0 \leq \mathcal{A}(r) \leq M_1$ για κάθε $r \in [0, 1]$.

Για $r > 1$ γράφουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(r) &= \frac{1}{r} \int_{|y| \leq r} |f(x-y) - f(x)| d\lambda(y) \\ &\leq \frac{1}{r} \int_{x-r}^{x+r} |f(z)| dz + \frac{1}{r} \int_{|y| \leq r} |f(x)| d\lambda(y) \\ &\leq \int_{x-r}^{x+r} |f(z)| dz + \frac{1}{r} |f(x)| 2r \\ &\leq M_2 := \|f\|_1 + 2|f(x)|. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $0 \leq \mathcal{A}(r) \leq \max\{M_1, M_2\}$ για κάθε $r > 0$.

+

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.6. Έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε πρώτα $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$(6.1.0.19) \quad \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon.$$

Στη συνέχεια, για κάθε $\delta > 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned} |(f * K_\delta)(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| d\lambda(y) \\ &\leq \int_{|y| \leq \delta} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| d\lambda(y) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k \delta < |y| \leq 2^{k+1} \delta} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| d\lambda(y) \\ &\leq \frac{M}{\delta} \int_{|y| \leq \delta} |f(x-y) - f(x)| d\lambda(y) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} M\delta \int_{2^k \delta < |y| \leq 2^{k+1} \delta} |f(x-y) - f(x)| \frac{1}{|y|^2} d\lambda(y) \\ &\leq M \mathcal{A}(\delta) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M\delta}{(2^k \delta)^2} \int_{|y| \leq 2^{k+1} \delta} |f(x-y) - f(x)| d\lambda(y) \\ &= M \mathcal{A}(\delta) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M\delta}{(2^k \delta)^2} (2^{k+1} \delta) \mathcal{A}(2^{k+1} \delta) \\ &= M \mathcal{A}(\delta) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2M}{2^k} \mathcal{A}(2^{k+1} \delta) \\ &\leq M_1 \left[\mathcal{A}(\delta) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \mathcal{A}(2^{k+1} \delta) \right], \end{aligned}$$

όπου $M_1 = 2M$. Τώρα, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\|\mathcal{A}\|_\infty < \infty$ και το γεγονός ότι $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{A}(\delta) = 0$. Υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε για κάθε $0 < \delta < \delta_0$ να έχουμε

$$(6.1.0.20) \quad \mathcal{A}(2^k \delta) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Τότε, για κάθε $0 < \delta < \delta_0$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} |(f * K_\delta)(x) - f(x)| &\leq M_1 \left[\mathcal{A}(\delta) + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2^k} \mathcal{A}(2^{k+1} \delta) + \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} \mathcal{A}(2^{k+1} \delta) \right] \\ &\leq M_1 \left[\frac{\varepsilon}{3} + \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2^k} \right) \frac{\varepsilon}{3} + \|\mathcal{A}\|_\infty \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right] \\ &\leq M_1 \left[\frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} + \|\mathcal{A}\|_\infty \varepsilon \right] \\ &= M_1 (1 + \|\mathcal{A}\|_\infty) \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\lim_{\delta \rightarrow 0} (f * K_\delta)(x) = f(x)$. □

Το τελευταίο θεώρημα αυτής της παραγράφου αναφέρεται στη σύγκλιση της $f * K_\delta$ στην f ως προς την $\|\cdot\|_1$.

Θεώρημα 6.1.8. Έστω $(K_\delta)_{\delta > 0}$ οικογένεια καλών πυρήνων. Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ και για κάθε $\delta > 0$, η συνέλιξη

$$(6.1.0.21) \quad (f * K_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) K_\delta(y) d\lambda(y)$$

είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση στον \mathbb{R}^n , και

$$(6.1.0.22) \quad \|(f * K_\delta) - f\|_1 \rightarrow 0 \text{ καθώς το } \delta \rightarrow 0.$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $\delta > 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned} \|(f * K_\delta) - f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |(f * K_\delta)(x) - f(x)| d\lambda(x) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| d\lambda(y) d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)| d\lambda(x) \right) |K_\delta(y)| d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|f_{-y} - f\|_1 |K_\delta(y)| d\lambda(y), \end{aligned}$$

όπου $f_{-y}(x) = f(x-y)$. Τώρα, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι

$$(6.1.0.23) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \|f_{-y} - f\|_1 = 0$$

(βλέπε Κεφάλαιο 4). Δηλαδή, υπάρχει $\eta > 0$ ώστε

$$(6.1.0.24) \quad |y| < \eta \implies \|f_{-y} - f\|_1 < \varepsilon.$$

Τότε, χρησιμοποιώντας και την $\|f_{-y} - f\|_1 \leq \|f_{-y}\|_1 + \|f\|_1 = 2\|f\|_1$, έχουμε

$$\begin{aligned} \|(f * K_\delta) - f\|_1 &\leq \int_{|y| < \eta} \|f_{-y} - f\|_1 |K_\delta(y)| d\lambda(y) + \int_{|y| \geq \eta} \|f_{-y} - f\|_1 |K_\delta(y)| d\lambda(y) \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |K_\delta(y)| d\lambda(y) + 2\|f\|_1 \int_{|y| \geq \eta} |K_\delta(y)| d\lambda(y) \\ &\leq M\varepsilon + 2\|f\|_1 \int_{|y| \geq \eta} |K_\delta(y)| d\lambda(y), \end{aligned}$$

όπου $M := \sup \|K_\delta\|_1 < \infty$ (αφού η (K_δ) είναι πυρήνας). Αφήνοντας το $\delta \rightarrow 0$ και χρησιμοποιώντας την

$$(6.1.0.25) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|y| \geq \eta} |K_\delta(y)| d\lambda(y) = 0,$$

παίρνουμε

$$(6.1.0.26) \quad \limsup_{\delta \rightarrow 0} \|(f * K_\delta) - f\|_1 \leq M\varepsilon,$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\|(f * K_\delta) - f\|_1 \rightarrow 0$ καθώς το $\delta \rightarrow 0$.

+

6.2 Cesàro αθροισσιμότητα

Ορισμός 6.2.1. Έστω $\{c_k\}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Λέμε ότι η $\{c_k\}$ συγκλίνει **κατά Cesàro** στον $\ell \in \mathbb{C}$ αν η ακολουθία

$$(6.2.0.27) \quad C_k := \frac{c_1 + \dots + c_k}{k} \rightarrow \ell$$

καθώς το $k \rightarrow \infty$.

Πρόταση 6.2.2. Αν $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \ell$ τότε η $\{c_k\}$ συγκλίνει κατά Cesàro στον ℓ .

Απόδειξη. Κάνουμε πρώτα την επιπλέον υπόθεση ότι $c_k \rightarrow 0$ και δείχνουμε ότι $C_k \rightarrow 0$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $k_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \geq k_1$ ισχύει $|c_k| < \varepsilon/2$. Τότε, για κάθε $k > k_1$ έχουμε

$$(6.2.0.28) \quad |C_k| \leq \frac{|c_1 + \dots + c_{k_1}|}{k} + \frac{k - k_1}{k} \frac{\varepsilon}{2} < \frac{|c_1 + \dots + c_{k_1}|}{k} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ο $A := |c_1 + \dots + c_{k_1}|$ εξαρτάται από το ε . Επιλέγουμε $k_2(A) = k_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \geq k_2$,

$$(6.2.0.29) \quad \frac{|c_1 + \dots + c_{k_1}|}{k} = \frac{A}{k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αν θέσουμε $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ τότε, για κάθε $k \geq k_0$,

$$(6.2.0.30) \quad |C_k| \leq \frac{A}{k} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Άρα, $C_k \rightarrow 0$.

Για τη γενική περίπτωση εφαρμόζουμε το προηγούμενο στην ακολουθία $c'_k := c_k - \ell$.

+

Παρατήρηση 6.2.3. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Η ακολουθία $c_k = 1 + (-1)^k$ αποκλίνει, αλλά συγκλίνει κατά Cesàro στο 1.

Ορισμός 6.2.4. Έστω $\{c_k\}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Ορίζουμε

$$(6.2.0.31) \quad s_n = \sum_{k=1}^n c_k \quad \text{και} \quad \sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k.$$

Λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ συγκλίνει **κατά Cesàro** στον $s \in \mathbb{C}$ αν

$$(6.2.0.32) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = s.$$

Παρατήρηση 6.2.5. Από την Πρόταση 6.2.2 έπεται ότι: αν $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = s$, άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ συγκλίνει κατά Cesàro στον s .

Από την άλλη πλευρά, αν $z \neq 1$, $|z| = 1$, και αν ορίσουμε $c_k = z^k$, $k \geq 0$, τότε η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ αποκλίνει διότι $c_k \not\rightarrow 0$, όμως

$$(6.2.0.33) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=0}^k z^k = \frac{1}{1-z}.$$

Δηλαδή, η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ συγκλίνει κατά Cesàro στον $\frac{1}{1-z}$.

6.3 Ο πυρήνας του Fejér

Ορισμός 6.3.1 (Cesàro μέσοι). Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Το n -οστό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της f ορίστηκε ως εξής:

$$(6.3.0.34) \quad s_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

Ο n -οστός Cesàro μέσος της σειράς Fourier της f ορίζεται από την

$$(6.3.0.35) \quad \sigma_n(f, x) = \frac{s_0(f, x) + s_1(f, x) + \dots + s_{n-1}(f, x)}{n}, \quad n \geq 1.$$

Μπορούμε να εκφράσουμε την $\sigma_n(f, t)$ σε κλειστή μορφή, γράφοντας

$$\begin{aligned} \sigma_n(f, x) &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} s_m(f, x) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=-m}^m \widehat{f}(k) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(\sum_{m=|k|}^{n-1} \mathbf{1} \right) \widehat{f}(k) e^{ikx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} (n - |k|) \widehat{f}(k) e^{ikx} \\
 &= \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \widehat{f}(k) e^{ikx}.
 \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι

$$(6.3.0.36) \quad s_m(f, x) = (f * D_m)(x)$$

όπου D_m είναι ο m -οστός πυρήνας του Dirichlet, μπορούμε επίσης να γράψουμε

$$(6.3.0.37) \quad \sigma_n(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} (f * D_m)(x) = \left(f * \frac{D_0 + D_1 + \dots + D_{n-1}}{n} \right) (x).$$

Ορισμός 6.3.2 (πυρήνας Fejér). Ο n -οστός πυρήνας του Fejér είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$(6.3.0.38) \quad F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} D_m(x).$$

Παρατηρήστε ότι

$$(6.3.0.39) \quad F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=-m}^m e^{ikx} = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{ikx}.$$

Μπορούμε επίσης να εκφράσουμε τον F_n σε κλειστή μορφή, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$(6.3.0.40) \quad D_m(x) = \frac{\eta\mu\left(m + \frac{1}{2}\right)x}{\eta\mu\frac{x}{2}}.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}
 F_n(x) &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\eta\mu\left(m + \frac{1}{2}\right)x}{\eta\mu\frac{x}{2}} = \frac{1}{2n \eta\mu^2(x/2)} \sum_{m=0}^{n-1} 2 \eta\mu\frac{x}{2} \eta\mu\left(m + \frac{1}{2}\right)x \\
 &= \frac{1}{2n \eta\mu^2(x/2)} \sum_{m=0}^{n-1} [\sigma\upsilon\nu(mx) - \sigma\upsilon\nu(m+1)x] = \frac{1}{2n \eta\mu^2(x/2)} [1 - \sigma\upsilon\nu(nx)] \\
 &= \frac{1}{2n \eta\mu^2(x/2)} \cdot 2 \eta\mu^2(nx/2) = \frac{1}{n} \left(\frac{\eta\mu^2(nx/2)}{\eta\mu(x/2)} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Συνεπώς, έχουμε το εξής:

Λήμμα 6.3.3. Για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$(6.3.0.41) \quad F_n(x) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{ikx}$$

και

$$(6.3.0.42) \quad F_n(x) = \frac{1}{n} \left(\frac{\eta\mu(nx/2)}{\eta\mu(x/2)} \right)^2.$$

Παρατηρήσεις 6.3.4. Από το Λήμμα 6.3.3 είναι φανερό ότι ο πυρήνας του Fejér F_n είναι μη αρνητική άρτια συνάρτηση. Λόγω της $F_n(-x) = F_n(x)$, έχουμε

$$(6.3.0.43) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} F_n(x) d\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F_n(x) d\lambda(x) = 1.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} 0 \leq F_n(x) &\leq \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} |D_m(x)| \leq \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} (2m+1) \\ &= \frac{1}{n} \cdot [n(n-1) + n] = n. \end{aligned}$$

Τέλος, για κάθε $0 < |x| < \pi$ έχουμε

$$(6.3.0.44) \quad 0 \leq F_n(x) = \frac{1}{n} \left(\frac{\eta\mu(nx/2)}{\eta\mu(x/2)} \right)^2 \leq \frac{1}{n} \frac{1}{(x/\pi)^2} = \frac{\pi^2}{nx^2}.$$

Για τους Cesàro μέσους $\sigma_n(f, x)$ θα χρησιμοποιούμε συχνά την αναπαράσταση

$$(6.3.0.45) \quad \sigma_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x-t) F_n(t) d\lambda(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \right) F_n(t) d\lambda(t)$$

ή την

$$(6.3.0.46) \quad \sigma_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t)) F_n(t) d\lambda(t).$$

Οι σχέσεις αυτές προκύπτουν άμεσα από το γεγονός ότι η F_n είναι άρτια συνάρτηση (με απλές αλλαγές μεταβλητής).

Θεώρημα 6.3.5 (Fejér). Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και έστω $x \in \mathbb{T}$. Αν τα πλευρικά όρια $f(x+0)$ και $f(x-0)$ υπάρχουν, τότε

$$(6.3.0.47) \quad \sigma_n(f, x) \rightarrow \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$. Ειδικότερα, αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο ενός κλειστού διαστήματος $I \subset \mathbb{T}$, τότε $\sigma_n(f, x) \rightarrow f(x)$ ομοιόμορφα στο I .

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \sigma_n(f, x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \right) F_n(t) d\lambda(t) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{f(x+t) - f(x+0)}{2} + \frac{f(x-t) - f(x-0)}{2} \right) F_n(t) d\lambda(t). \end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|f(x+t) - f(x+0)| < \varepsilon$ και $|f(x-t) - f(x-0)| < \varepsilon$ για κάθε $t \in (0, \delta)$. Άρα,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \left(\frac{f(x+t) - f(x+0)}{2} + \frac{f(x-t) - f(x-0)}{2} \right) F_n(t) d\lambda(t) \right| \\ & \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \left(\frac{|f(x+t) - f(x+0)|}{2} + \frac{|f(x-t) - f(x-0)|}{2} \right) F_n(t) d\lambda(t) \\ & \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \varepsilon F_n(t) d\lambda(t) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Στο (δ, π) έχουμε

$$(6.3.0.48) \quad F_n(t) \leq \frac{\pi^2}{n\delta^2}.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \left(\frac{f(x+t) - f(x+0)}{2} + \frac{f(x-t) - f(x-0)}{2} \right) F_n(t) d\lambda(t) \right| \\ & \leq \frac{\pi^2}{n\delta^2} \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \left(\frac{|f(x+t) - f(x+0)|}{2} + \frac{|f(x-t) - f(x-0)|}{2} \right) d\lambda(t) \\ & \leq \frac{M(f)}{n\delta^2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$. Άρα,

$$(6.3.0.49) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n(f, x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

και έπεται το ζητούμενο. Στην περίπτωση που η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο ενός κλειστού διαστήματος $I \subset \mathbb{T}$, από την ομοιόμορφη συνέχεια της f στο I βλέπουμε ότι η επιλογή του δ στο παραπάνω επιχείρημα είναι ανεξάρτητη από το $x \in I$ (εξαρτάται μόνο από το ε), άρα $\sigma_n(f, x) \rightarrow f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ ομοιόμορφα στο I .

+

Ένα πόρισμα του Θεωρήματος 6.3.5 είναι η πυκνότητα των τριγωνομετρικών πολυωνύμων στον $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ και στον $(L^1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_1)$ που είχε χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη του λήμματος Riemann-Lebesgue.

Θεώρημα 6.3.6. Για κάθε $g \in C(\mathbb{T})$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο q_ε ώστε

$$(6.3.0.50) \quad \|g - q_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon.$$

Επίσης, για κάθε $1 \leq p < \infty$, για κάθε $f \in L_p(\mathbb{T})$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο q_ε ώστε

$$(6.3.0.51) \quad \|f - q_\varepsilon\|_p < \varepsilon.$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι η $\sigma_n(g) = g * F_n$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, ως συνέλιξη μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης με το τριγωνομετρικό πολυώνυμο F_n . Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι $\sigma_n(g) \rightarrow g$ ομοιόμορφα, διότι η g είναι συνεχής. Δηλαδή, $\|g - \sigma_n(g)\|_\infty \rightarrow 0$. Για το τυχόν λοιπόν $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$(6.3.0.52) \quad \|g - \sigma_n(g)\|_\infty < \varepsilon$$

αν το n είναι αρκετά μεγάλο. Αυτό αποδεικνύει τον πρώτο ισχυρισμό.

Για τον δεύτερο, έστω $f \in L_p(\mathbb{T})$ και $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $g \in C(\mathbb{T})$ ώστε $\|f - g\|_p < \varepsilon/2$. Στη συνέχεια, θεωρούμε τριγωνομετρικό πολυώνυμο q_ε ώστε $\|g - q_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon/2$. Αφού

$$(6.3.0.53) \quad \|g - q_\varepsilon\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |g(x) - q_\varepsilon(x)|^p d\lambda(x) \right)^{1/p} \leq \|g - q_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon/2,$$

ο ισχυρισμός έπεται από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_p$.

+

Παρατήρηση 6.3.7. Για κάθε n ορίζουμε $\delta_n = \frac{1}{n}$ και $K_{\delta_n} = F_n$. Η οικογένεια $\{K_{\delta_n}\}$ είναι προσέγγιση της μονάδας (στο \mathbb{T}). Πράγματι, για κάθε n ισχύει

$$(6.3.0.54) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} K_{\delta_n}(t) d\lambda(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} F_n(t) d\lambda(t) = 1.$$

Επίσης,

$$(6.3.0.55) \quad |K_{\delta_n}(t)| = F_n(t) \leq n = \frac{1}{\delta_n}$$

και, για κάθε $0 < |t| < \pi$, έχουμε

$$(6.3.0.56) \quad |K_{\delta_n}(t)| = F_n(t) \leq \frac{\pi^2}{nt^2} = \frac{\pi^2 \delta_n}{t^2}.$$

Από τα αποτελέσματα της Παραγράφου 6.1 (ή μια απλή παραλλαγή της απόδειξής τους) έχουμε το εξής θεώρημα που «συμπληρώνει» το Θεώρημα 6.3.5:

Θεώρημα 6.3.8. Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $x \in \text{Leb}(f)$ ισχύει $\sigma_n(f, x) \rightarrow f(x)$ καθώς το $n \rightarrow \infty$. Ειδικότερα, $\sigma_n(f, x) \rightarrow f(x)$ σχεδόν παντού στο \mathbb{T} . □

Το επόμενο θεώρημα αναφέρεται στην L_p -σύγκλιση των Cesàro μέσω των $\sigma_n(f)$ στην f .

Θεώρημα 6.3.9. Έστω $1 \leq p < \infty$. Για κάθε $f \in L_p(\mathbb{T})$ ισχύει

$$(6.3.0.57) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_n(f) - f\|_p = 0.$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \|\sigma_n(f) - f\|_p &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |\sigma_n(f, x) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} (f(x+t) - f(x)) F_n(t) d\lambda(t) \right|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Υπάρχει $h \in L_q(\mathbb{T})$, όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p , τέτοια ώστε $\|h\|_q = 1$ και

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (f(x+t) - f(x)) F_n(t) d\lambda(t) \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} h(x) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (f(x+t) - f(x)) F_n(t) d\lambda(t) \right) d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} h(x) (f(x+t) - f(x)) d\lambda(x) \right) F_n(t) d\lambda(t) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \|h\|_q \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x+t) - f(x)|^p d\lambda(x) \right)^{1/p} F_n(t) d\lambda(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x+t) - f(x)|^p d\lambda(x) \right)^{1/p} F_n(t) d\lambda(t) \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα Fubini και την ανισότητα Hölder. Αν θέσουμε $f_t(x) = f(x+t)$, συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε

$$(6.3.0.58) \quad \|\sigma_n(f) - f\|_p \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \|f_t - f\|_p F_n(t) d\lambda(t).$$

Ορίζουμε $A(t) = \|f_t - f\|_p$. Γνωρίζουμε ότι η A είναι συνεχής στο 0, άρα

$$(6.3.0.59) \quad \sigma_n(A, 0) \rightarrow A(0) = 0 \text{ καθώς το } n \rightarrow \infty.$$

Όμως,

$$\begin{aligned} \sigma_n(A, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} A(t) F_n(-t) d\lambda(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} A(t) F_n(t) d\lambda(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \|f_t - f\|_p F_n(t) d\lambda(t), \end{aligned}$$

άρα

$$(6.3.0.60) \quad \|\sigma_n(f) - f\|_p \leq \sigma_n(A, 0)$$

και έπεται το συμπέρασμα.



Παρατηρήστε ότι το Θεώρημα 6.3.9 έχει ως συνέπεια το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 6.3.6. Δείχνει επίσης ότι η απεικόνιση $f \mapsto \{\widehat{f}(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι 1-1.

Θεώρημα 6.3.10 (μοναδικότητα). Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Αν $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $f \equiv 0$.

Απόδειξη. Αφού $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε k , έχουμε

$$(6.3.0.61) \quad \sigma_n(f, x) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \widehat{f}(k) e^{ikx} = 0$$

για κάθε n , δηλαδή $\sigma_n(f) \equiv 0$. Από το Θεώρημα 6.3.9 βλέπουμε ότι

$$(6.3.0.62) \quad \|f\|_p = \|\sigma_n(f) - f\|_p \rightarrow 0.$$

Άρα, $\|f\|_p = 0$ και αυτό δείχνει ότι $f \equiv 0$.

+

6.4 Χαρακτηρισμός των τριγωνομετρικών σειρών που είναι σειρές Fourier

Σε αυτήν την παράγραφο εξετάζουμε αν υπάρχουν κάποια απλά κριτήρια τα οποία να μας επιτρέπουν να δούμε αν κάποια τριγωνομετρική σειρά είναι η σειρά Fourier μιας συνάρτησης $f \in L_p(\mathbb{T})$. Θεωρούμε λοιπόν μια τριγωνομετρική σειρά

$$(6.4.0.63) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

και τους Cesàro μέσους

$$(6.4.0.64) \quad \sigma_n(t) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) c_k e^{ikt}.$$

της σειράς (6.4.0.63).

Θεώρημα 6.4.1. Η (6.4.0.63) είναι η σειρά Fourier μιας συνεχούς συνάρτησης $f \in C(\mathbb{T})$ αν και μόνο αν η ακολουθία συναρτήσεων $\{\sigma_n\}$ των Cesàro μέσων της συγκλίνει ομοιόμορφα στο \mathbb{T} .

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ ώστε $\widehat{f}(k) = c_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Τότε,

$$(6.4.0.65) \quad \sigma_n(x) = \sigma_n(f, x).$$

Από το Θεώρημα 6.3.5 συμπεραίνουμε ότι $\sigma_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο \mathbb{T} .

Αντίστροφα, έστω ότι η $\{\sigma_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση f στο \mathbb{T} . Η f είναι συνεχής ως ομοιόμορφο όριο τριγωνομετρικών πολυωνύμων. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, αν θεωρήσουμε $n > |k|$ τότε

$$(6.4.0.66) \quad \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sigma_n(x) e^{-ikx} d\lambda(x).$$

Καθώς το $n \rightarrow \infty$ έχουμε

$$(6.4.0.67) \quad \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) c_k \rightarrow c_k$$

και, αφού $\sigma_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα,

$$(6.4.0.68) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sigma_n(x) e^{-ikx} d\lambda(x) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-ikx} d\lambda(x) = \widehat{f}(k).$$

Έπεται ότι $c_k = \widehat{f}(k)$ για κάθε k , δηλαδή η (6.4.0.63) είναι η σειρά Fourier της f .

+

Στη συνέχεια μελετάμε την περίπτωση $1 < p < \infty$.

Θεώρημα 6.4.2. Έστω $1 < p < \infty$. Η (6.4.0.63) είναι η σειρά Fourier μιας συνάρτησης $f \in L_p(\mathbb{T})$ αν και μόνο αν η ακολουθία $\{\sigma_n\}$ των Cesàro μέσων της είναι φραγμένη στον $L_p(\mathbb{T})$. Δηλαδή, αν υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|\sigma_n\|_p \leq M$ για κάθε n .

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\begin{aligned} \|\sigma_n(f)\|_p &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |\sigma_n(f, x)|^p d\lambda(x) \right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x+t) F_n(t) d\lambda(t) \right|^p d\lambda(x) \right)^{1/p} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x+t)|^p d\lambda(x) \right)^{1/p} F_n(t) d\lambda(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \|f_t\|_p F_n(t) d\lambda(t), \end{aligned}$$

όπου $f_t(x) = f(x+t)$, χρησιμοποιώντας τον δυϊσμό όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.3.9. Αφού $\|f_t\|_p = \|f\|_p$ για κάθε $t \in \mathbb{T}$, συμπεραίνουμε ότι

$$(6.4.0.69) \quad \|\sigma_n(f)\|_p \leq \|f\|_p \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} F_n(t) d\lambda(t) = \|f\|_p$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση θα χρησιμοποιήσουμε το εξής: αν $1 < p < \infty$ και $\{f_n\}$ είναι μια φραγμένη ακολουθία στον $L_p(\mathbb{T})$ τότε υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ η οποία συγκλίνει ασθενώς σε κάποια $g \in L^p(\mathbb{T})$: αυτό σημαίνει ότι

$$(6.4.0.70) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f_{k_n}(x) h(x) d\lambda(x) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(x) h(x) d\lambda(x)$$

για κάθε $h \in L_q(\mathbb{T})$, όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p . Μια άμεση απόδειξη αυτού του ισχυρισμού έχουμε αν σκεφτούμε ότι η μοναδιαία μπάλα B_p του $L_p(\mathbb{T})$ είναι ασθενώς συμπαγής (διότι ο L_p είναι

αυτοπαθής χώρος, άρα ισοδύναμα μιλάμε για τη μοναδιαία μπάλα του $(L_q(\mathbb{T}))^*$ με την w^* -τοπολογία). Επίσης, η ασθενής τοπολογία στην B_p είναι μετριοποιήσιμη διότι αναφερόμαστε σε διαχωρίσιμους χώρους. Εφαρμόζουμε λοιπόν αυτό το αποτέλεσμα για την $\{f_n\}$ η οποία περιέχεται σε κάποιο πολλαπλάσιο της B_p .

Υποθέτουμε ότι η $\{\sigma_n(f)\}$ είναι φραγμένη στον $L_p(\mathbb{T})$. Τότε, υπάρχει υπακολουθία $\{\sigma_{k_n}(f)\}$ της $\{\sigma_n(f)\}$ η οποία συγκλίνει ασθενώς σε κάποια $g \in L_p(\mathbb{T})$: για κάθε $h \in L_q(\mathbb{T})$,

$$(6.4.0.71) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sigma_{k_n}(f, x) h(x) d\lambda(x) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(x) h(x) d\lambda(x).$$

Όπως και στην προηγούμενη απόδειξη, παρατηρούμε ότι, για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, αν θεωρήσουμε $k_n > |m|$ τότε

$$(6.4.0.72) \quad \left(1 - \frac{|m|}{k_n}\right) c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sigma_{k_n}(f, t) e^{-imt} d\lambda(t).$$

Καθώς το $n \rightarrow \infty$ έχουμε

$$(6.4.0.73) \quad \left(1 - \frac{|m|}{k_n + 1}\right) c_m \rightarrow c_m$$

και, αφού η $t \mapsto e^{-imt}$ ανήκει στον $L_q(\mathbb{T})$,

$$(6.4.0.74) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sigma_{k_n}(f, t) e^{-imt} d\lambda(t) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(t) e^{-imt} d\lambda(t) = \widehat{g}(m).$$

Έπεται ότι $c_m = \widehat{g}(m)$ για κάθε m , δηλαδή η (6.4.0.63) είναι η σειρά Fourier της g .

+

6.5 Abel αθροισιμότητα και ο πυρήνας του Poisson

Μια σειρά μιγαδικών αριθμών $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ λέγεται *Abel αθροίσιμη* στον $s \in \mathbb{C}$ αν για κάθε $0 \leq r < 1$ η σειρά

$$(6.5.0.75) \quad A(r) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k$$

συγκλίνει, και

$$(6.5.0.76) \quad \lim_{r \rightarrow 1^-} A(r) = s.$$

Οι ποσότητες $A(r)$ λέγονται *Abel μέσοι* της σειράς $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$. Αποδεικνύεται ότι αν η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ συγκλίνει στον s τότε είναι και Abel αθροίσιμη στον s . Αποδεικνύεται επίσης ότι αν η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ είναι Cesàro αθροίσιμη στον s τότε είναι και Abel αθροίσιμη στον s . Το παράδειγμα της σειράς

$$(6.5.0.77) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots$$

δείχνει ότι μια σειρά μπορεί να είναι Abel αθροίσιμη χωρίς να είναι Cesàro αθροίσιμη. Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι

$$(6.5.0.78) \quad A(r) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1)r^k = \frac{1}{(1+r)^2}$$

για κάθε $0 \leq r < 1$, συνεπώς

$$(6.5.0.79) \quad \lim_{r \rightarrow 1^-} A(r) = \frac{1}{4}.$$

Όμως, η σειρά αυτή δεν είναι Cesàro αθροίσιμη: θα έπρεπε να ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n/n) = 0$. Για αποδείξεις των παραπάνω ισχυρισμών παραπέμπουμε στο Παράρτημα και τις σχετικές ασκήσεις.

Ορισμός 6.5.1 (πυρήνας του Poisson). Για κάθε $0 \leq r < 1$ θεωρούμε τη συνάρτηση $P_r : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ που ορίζεται μέσω της

$$(6.5.0.80) \quad P_r(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikx}.$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Weierstrass βλέπουμε ότι η σειρά στο δεξιό μέλος συγκλίνει απολύτως για κάθε x και ομοιόμορφα σαν σειρά συναρτήσεων στο $[-\pi, \pi]$. Η συνάρτηση P_r λέγεται r -πυρήνας του Poisson. Από την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς (6.5.0.80) έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι

$$(6.5.0.81) \quad \widehat{P}_r(k) = r^{|k|}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι ο πυρήνας P_r παίρνει μη αρνητικές πραγματικές τιμές: δίνεται μάλιστα από την

$$(6.5.0.82) \quad P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2}.$$

Για την απόδειξη της τελευταίας ισότητας θέτουμε $\omega = re^{ix}$. Τότε,

$$\begin{aligned} P_r(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} r^k (e^{ix})^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} r^{-k} (e^{-ix})^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (re^{ix})^k + \sum_{s=1}^{\infty} (re^{-ix})^s \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{\omega}^s = \frac{1}{1-\omega} + \frac{\bar{\omega}}{1-\bar{\omega}} = \frac{1-\bar{\omega} + (1-\omega)\bar{\omega}}{(1-\omega)(1-\bar{\omega})} \\ &= \frac{1-|\omega|^2}{|1-\omega|^2}. \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι $|\omega| = r$ και $1-\omega = 1-re^{ix} = (1-r \cos x) - ir \sin x$, καταλήγουμε στην

$$(6.5.0.83) \quad P_r(x) = \frac{1-r^2}{(1-r \cos x)^2 + r^2 \sin^2 x} = \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2}.$$

Θα αποδείξουμε ότι η οικογένεια $\{P_r\}_{0 \leq r \leq 1}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων. Δεδομένου ότι το σύνολο δεικτών είναι τώρα το διάστημα $[0, 1)$, αυτό που χρειάζεται να τροποποιήσουμε είναι η τρίτη συνθήκη του ορισμού. Ουσιαστικά ζητάμε το εξής: για κάθε ακολουθία $\{r_n\}$ στο $[0, 1)$ με $r_n \rightarrow 1^-$, ζητάμε η ακολουθία $\{P_{r_n}\}_{n=1}^{\infty}$ να είναι ακολουθία καλών πυρήνων. Η δεύτερη συνθήκη του ορισμού είναι άμεση συνέπεια της πρώτης συνθήκης, διότι οι P_r παίρνουν μη αρνητικές πραγματικές τιμές. Αποδεικνύουμε λοιπόν την εξής πρόταση.

Πρόταση 6.5.2. Για κάθε $0 \leq r < 1$ έχουμε

$$(6.5.0.84) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) d\lambda(x) = 1,$$

και για κάθε $0 < \delta < \pi$ ισχύει ότι

$$(6.5.0.85) \quad \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} P_r(x) d\lambda(x) = 0.$$

Απόδειξη. Έστω $0 \leq r < 1$. Αφού η σειρά συναρτήσεων $P_r(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\pi, \pi]$, έχουμε

$$(6.5.0.86) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) d\lambda(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{r^{|k|}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} d\lambda(x) = \frac{r^0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^0 d\lambda(x) = 1,$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} d\lambda(x) = 0$ αν $k \neq 0$. Έστω τώρα $0 < \delta < \pi$ και έστω $1/2 \leq r < 1$. Έχουμε

$$(6.5.0.87) \quad 1 - 2r \cos x + r^2 = (1 - r)^2 + 2r(1 - \cos x) \geq (1 - r)^2 + 2r(1 - \cos \delta) \geq c_\delta = 1 - \cos \delta > 0$$

για κάθε $\delta \leq |x| \leq \pi$ (διότι $\cos x \leq \cos \delta$). Συνεπώς,

$$(6.5.0.88) \quad 0 \leq \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} P_r(x) d\lambda(x) \leq \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} \frac{1 - r^2}{c_\delta} d\lambda(x) \leq \frac{2\pi}{c_\delta} (1 - r^2) \rightarrow 0$$

όταν $r \rightarrow 1^-$. Έπεται το συμπέρασμα της πρότασης. □

Ορισμός 6.5.3 (Abel μέσοι της f). Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $0 \leq r < 1$ ορίζουμε τον r -Abel μέσο της f μέσω της

$$(6.5.0.89) \quad A_r(f)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

Αφού η ακολουθία $\{|\widehat{f}(k)|\}$ είναι φραγμένη, το κριτήριο του Weierstrass δείχνει ότι η σειρά συναρτήσεων στο δεξιό μέλος συγκλίνει ομοιόμορφα στον \mathbb{T} . Παρατηρήστε ότι $A_r(f)(x)$ είναι ο r -Abel μέσος της σειράς Fourier $S(f)$ της f .

Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης της σειράς (6.5.0.89), μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} A_r(f)(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} \widehat{f}(k) e^{ikx} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} d\lambda(y) \right) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{-ik(y-x)} \right) d\lambda(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) P_r(x-y) d\lambda(y) \\
 &= (f * P_r)(x).
 \end{aligned}$$

Αφού η $\{P_r\}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων, παίρνουμε αμέσως το εξής.

Θεώρημα 6.5.4. Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Τότε, η σειρά Fourier $S(f)$ της f είναι Abel αθροίσιμη στην f σε κάθε σημείο συνέχειας της f : αν η f είναι συνεχής στο $x \in \mathbb{T}$, τότε

$$(6.5.0.90) \quad A_r(f)(x) \rightarrow f(x).$$

Επιπλέον, αν η f είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{T}$, τότε η σειρά Fourier $S(f)$ της f είναι ομοιόμορφα Abel αθροίσιμη στην f : δηλαδή,

$$(6.5.0.91) \quad A_r(f) \xrightarrow{\text{ομ}} f.$$