



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικό και Καποδιστριακό  
Πανεπιστήμιο Αθηνών

---

Αρμονική Ανάλυση

**Ενότητα:**  $L_2$ -σύγκλιση σειρών Fourier - Ασκήσεις

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

---

## Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



## Περιεχόμενα ενότητας

<b>7</b>	<b><math>L_2</math>-σύγκλιση σειρών Fourier - Ασκήσεις</b>	<b>4</b>
7.1	Ομάδα Α' . . . . .	4
7.2	Ομάδα Β' . . . . .	11

## 7 $L_2$ -σύγκλιση σειρών Fourier - Ασκήσεις

### 7.1 Ομάδα Α'

1. (α) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = |x|$  και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(β) Χρησιμοποιώντας την  $2\pi$ -περιοδική περιπτή συνάρτηση  $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = x(\pi - x)$  στο  $[0, \pi]$  και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| d\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x d\lambda(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Για  $k \neq 0$  γράφουμε

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-ikx} d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sigma_{\text{υν}}(kx) d\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sigma_{\text{υν}}(kx) d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x \eta_{\mu}(kx)}{k} + \frac{\sigma_{\text{υν}}(kx)}{k^2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της  $f$  είναι η

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} e^{ikx}.$$

Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\frac{\pi^2}{4} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k+1)^4} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 d\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 d\lambda(x) = \frac{\pi^2}{3}.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Όμως,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} = \frac{\pi^4}{96} + \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{16 \pi^4}{15 \cdot 96} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(β) Αφού η  $f$  είναι περιπτή, έχουμε  $\widehat{f}(0) = 0$ . Για  $k \neq 0$  γράφουμε

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} d\lambda(x) = \frac{-i}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi-x) \eta\mu(kx) d\lambda(x) \\ &= \frac{-i}{\pi} \left[ -\frac{\pi x \sigma\upsilon\nu(kx)}{k} + \frac{\pi \eta\mu(kx)}{k^2} \right]_0^{\pi} + \frac{i}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \eta\mu(kx) d\lambda(x) \\ &= i \frac{(-1)^k \pi}{k} - \frac{i}{\pi} \left[ \frac{x^2 \sigma\upsilon\nu(kx)}{k} \right]_0^{\pi} + \frac{2i}{\pi k} \int_0^{\pi} x \sigma\upsilon\nu(kx) d\lambda(x) \\ &= i \frac{(-1)^k \pi}{k} - i \frac{(-1)^k \pi}{k} + \frac{2i}{\pi k} \left[ \frac{x \eta\mu(kx)}{k} + \frac{\sigma\upsilon\nu(kx)}{k^2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2i[(-1)^k - 1]}{\pi k^3}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της  $f$  είναι η

$$\sum_{k \neq 0} \frac{2i[(-1)^k - 1]}{\pi k^3} e^{ikx}.$$

Από την ταυτότητα του Parseval,

$$2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2 (2k+1)^6} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 d\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi-x)^2 x^2 d\lambda(x) = \frac{\pi^4}{30}.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}.$$

Όμως,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^6} = \frac{\pi^6}{960} + \frac{1}{64} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{64 \pi^6}{63 \cdot 960} = \frac{\pi^6}{945}.$$

2. Δείξτε ότι: αν  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ , τότε η σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\pi}{\eta\mu \pi \alpha} e^{i(\pi-x)\alpha}$$

στο  $[0, 2\pi]$ , είναι η

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k + \alpha}.$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του Parseval, συμπεράνατε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k + \alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\eta\mu^2(\pi\alpha)}.$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{\eta\mu \pi \alpha} e^{i\pi\alpha} e^{-ix(\alpha+k)} d\lambda(x) \\ &= \frac{e^{i\pi\alpha}}{2\eta\mu \pi \alpha} \left[ \frac{-e^{-ix(\alpha+k)}}{i(k + \alpha)} \right]_0^{2\pi} = \frac{e^{i\pi\alpha}}{2\eta\mu \pi \alpha} \frac{1 - e^{-2\pi i \alpha}}{i(k + \alpha)} \\ &= \frac{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}}{2i(k + \alpha) \eta\mu \pi \alpha} = \frac{2i \eta\mu \pi \alpha}{2i(k + \alpha) \eta\mu \pi \alpha} \\ &= \frac{1}{k + \alpha}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της  $f$  είναι η

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k + \alpha}.$$

Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k + \alpha)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 d\lambda(x) = \frac{\pi^2}{\eta\mu^2(\pi\alpha)},$$

αφού  $|f(x)| = \frac{\pi}{|\eta\mu(\pi\alpha)|}$  για κάθε  $x$ .

3. Έστω  $0 < a \leq \pi$ . Θεωρούμε την συνάρτηση  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$ .

(α) Δείξτε ότι  $\widehat{f}(0) = \frac{a}{\pi}$  και  $\widehat{f}(k) = \frac{\eta\mu(ka)}{\pi k}$  αν  $k \neq 0$ .

(β) Δείξτε ότι για κάθε  $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-a, a\}$  ισχύει

$$f(x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{\eta\mu(ka)}{\pi k} e^{ikx}.$$

(γ) Υπολογίστε τα αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta\mu(ka)}{k} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta\mu^2(ka)}{k^2}.$$

Υπόδειξη. (α) Για  $k = 0$  έχουμε

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \mathbf{1} d\lambda(x) = \frac{2a}{2\pi} = \frac{a}{\pi}.$$

Για  $k \neq 0$  γράφουμε

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a e^{-ikx} d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \cos(kx) d\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^a \cos(kx) d\lambda(x) \\ &= \left[ \frac{\eta\mu(kx)}{\pi k} \right]_0^a = \frac{\eta\mu(ka)}{\pi k}. \end{aligned}$$

(β) Αν  $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-a, a\}$  τότε η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x$ , άρα

$$f(x) = S(f, x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{\eta\mu(ka)}{\pi k} e^{ikx}.$$

(γ) Θέτοντας  $x = 0$  στην ισότητα του (β) έχουμε

$$1 = f(0) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{\eta\mu(ka)}{\pi k} = \frac{a}{\pi} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta\mu(ka)}{\pi k},$$

άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta\mu(ka)}{k} = \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{a}{\pi} \right) = \frac{\pi - a}{2}.$$

Για το δεύτερο άθροισμα χρησιμοποιούμε την ταυτότητα του Parseval: έχουμε  $\widehat{f}(k) = \widehat{f}(-k)$  για κάθε  $k$ , άρα

$$\|f\|_2^2 = |\widehat{f}(0)|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = \frac{a^2}{\pi^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta\mu^2(ka)}{\pi^2 k^2}.$$

Αφού

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \mathbf{1}^2 d\lambda(x) = \frac{a}{\pi},$$

τελικά έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta\mu^2(ka)}{k^2} = \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{a}{\pi} - \frac{a^2}{\pi^2} \right) = \frac{\pi a}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{a(\pi - a)}{2}.$$

4. Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχώς παραγωγίσιμη  $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k(f')| + |b_k(f')|}{k}.$$

(β) Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \|f - s_n(f)\|_\infty = 0.$$

Υπόδειξη. Αφού η  $f$  είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, γνωρίζουμε ότι  $f \equiv S(f)$ . Συνεπώς,

$$f(x) - s_n(f, x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k(f) \sigma_{\sin kx} + b_k(f) \eta_{\mu kx}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Παίρνοντας απόλυτες τιμές και κατόπιν supremum πάνω απ' όλα τα  $x \in \mathbb{R}$ , καταλήγουμε στην

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k(f)| + |b_k(f)|).$$

Τώρα χρησιμοποιούμε τη σχέση των συντελεστών Fourier της  $f$  με τους συντελεστές Fourier της  $f'$ :  $|a_k(f)| = \frac{1}{k}|b_k(f')|$ ,  $|b_k(f)| = \frac{1}{k}|a_k(f')|$  και την ανισότητα Cauchy-Schwarz, διαδοχικά, για να πάρουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k(f)| + |b_k(f)|) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \left( \frac{|a_k(f')|}{k} + \frac{|b_k(f')|}{k} \right) \\ &\leq \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left[ \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(f')|^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k(f')|^2 \right)^{1/2} \right] \\ &\leq \sqrt{2/n} \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n}$$

και την στοιχειώδη ανισότητα  $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{2}\sqrt{a+b}$ . Επομένως,

$$\sqrt{n} \|f - s_n(f)\|_\infty \leq \sqrt{2} \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2 \right)^{1/2}.$$

Από την ανισότητα του Bessel έχουμε ότι η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2)$  συγκλίνει και το συμπέρασμα έπεται.



5. Έστω  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά  $C(f) > 0$  ώστε  $|k\widehat{f}(k)| \leq C(f)$  για κάθε  $k \in \mathbb{Z}$ .

(β) Εξετάστε αν  $\lim_{|k| \rightarrow \infty} |k\widehat{f}(k)| = 0$ .

(γ) Εξετάστε αν  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$ .

Υπόδειξη. Η απάντηση είναι καταφατική σε όλα τα ερωτήματα. Αρχικά παρατηρούμε ότι η  $f'$  είναι ολοκληρώσιμη. Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}'(k)|^2 = \|f'\|_2^2 < +\infty.$$

Γνωρίζουμε ότι  $\widehat{f}'(k) = ik\widehat{f}(k)$ , συνεπώς

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |\widehat{f}(k)|^2 < +\infty.$$

Έπεται το (β) (και από αυτό, το (α)): αφού η παραπάνω σειρά συγκλίνει, έχουμε

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} |k\widehat{f}(k)| = 0.$$

Για το (γ), από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k \neq 0} |\widehat{f}(k)| \right)^2 &= \left( \sum_{k \neq 0} (k|\widehat{f}(k)|) \frac{1}{k} \right)^2 \\ &\leq \left( \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} \right) \left( \sum_{k \neq 0} k^2 |\widehat{f}(k)|^2 \right) < +\infty. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| = |\widehat{f}(0)| + \sum_{k \neq 0} |\widehat{f}(k)| < +\infty.$$

6. Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχώς παραγωγίσιμη  $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση με

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\lambda(x) = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval για τις  $f$  και  $f'$  δείξτε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 d\lambda(x) \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 d\lambda(x),$$

με ισότητα αν και μόνο αν  $f(x) = a \sin x + b \eta\mu x$  για κάποιους  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι  $\widehat{f}'(k) = ik\widehat{f}(k)$  για κάθε  $k \in \mathbb{Z}$ . Επίσης, από την υπόθεση έχουμε

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\lambda(x) = 0.$$

Από την ταυτότητα του Parseval για τις  $f$  και  $f'$  έπεται άμεσα ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 d\lambda(x) &= \|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \\ &= \sum_{k \neq 0} |\widehat{f}(k)|^2 = \sum_{k \neq 0} \frac{|\widehat{f}'(k)|^2}{k^2} \\ &\leq \sum_{k \neq 0} |\widehat{f}'(k)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 d\lambda(x). \end{aligned}$$

Για την τελευταία ισότητα παρατηρήστε ότι

$$\widehat{f}'(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) d\lambda(x) = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi} = 0$$

από την  $2\pi$ -περιοδικότητα της  $f$ . Ισότητα μπορεί να ισχύει αν και μόνο αν  $\widehat{f}'(k) = ik\widehat{f}(k) = 0$  για κάθε  $k \geq 2$  (εξηγήστε γιατί). Ισοδύναμα αν

$$f(x) = \widehat{f}(1)e^{ix} + \widehat{f}(-1)e^{-ix}$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , δηλαδή αν υπάρχουν  $a, b \in \mathbb{R}$  ώστε  $f(x) = a \sin x + b \eta\mu x$ .

7. (α) Έστω  $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι  $\int_0^{2\pi} g(t) d\lambda(t) = 0$ . Δείξτε ότι

$$\left| \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) d\lambda(t) \right|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 d\lambda(t) \int_0^{2\pi} |g'(t)|^2 d\lambda(t).$$

(β) Έστω  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με  $f(a) = f(b) = 0$ . Δείξτε ότι

$$\int_a^b |f(t)|^2 d\lambda(t) \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2 d\lambda(t).$$

Υπόδειξη. (α) Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\left| \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) d\lambda(t) \right|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 d\lambda(t) \int_0^{2\pi} |g(t)|^2 d\lambda(t).$$

Αφού  $\int_0^{2\pi} g(t) d\lambda(t) = 0$ , από την προηγούμενη άσκηση έχουμε

$$\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 d\lambda(t) \leq \int_0^{2\pi} |g'(t)|^2 d\lambda(t),$$

και έπεται το ζητούμενο.

(β) Υποθέτουμε πρώτα ότι  $[a, b] = [0, \pi]$ . Αφού  $f(0) = f(\pi) = 0$ , μπορούμε να επεκτείνουμε την  $f$  σε συνεχή  $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση με  $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) d\lambda(t) = 0$ , θέτοντας  $f(x) = -f(-x)$  για  $x \in [-\pi, 0]$ .

Η επέκταση της  $f$  είναι συνεχώς παραγωγίσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής  $(k\pi, k\pi + \pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Εφαρμόζοντας το (α) με  $g = f$ , παίρνουμε

$$\left| \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 d\lambda(t) \right|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 d\lambda(t) \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 d\lambda(t).$$

Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι η  $f$  είναι περιπτή, συμπεραίνουμε ότι

$$(*) \quad \int_0^{\pi} |f(t)|^2 d\lambda(t) \leq \int_0^{\pi} |f'(t)|^2 d\lambda(t).$$

Αν το  $[a, b]$  είναι τυχόν, θεωρούμε την  $F : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  με  $F(x) = f\left(a + \frac{b-a}{\pi}x\right)$ . Τότε, η (\*) ισχύει για την  $F$ , δηλαδή

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \left| f\left(a + \frac{b-a}{\pi}x\right) \right|^2 d\lambda(x) &= \int_0^{\pi} |F(x)|^2 d\lambda(x) \leq \int_0^{\pi} |F'(x)|^2 d\lambda(x) \\ &= \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_0^{\pi} \left| f'\left(a + \frac{b-a}{\pi}x\right) \right|^2 d\lambda(x). \end{aligned}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής  $t = a + \frac{b-a}{\pi}x$ , παίρνουμε

$$\int_a^b |f(t)|^2 d\lambda(t) \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2 d\lambda(t).$$

## 7.2 Ομάδα Β'

8. Δώστε παράδειγμα ακολουθίας  $\{f_n\}$  ολοκληρώσιμων συναρτήσεων  $f_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  ώστε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 d\lambda(x) = 0,$$

αλλά για κάθε  $x \in [0, 2\pi]$  η ακολουθία  $\{f_n(x)\}$  δεν συγκλίνει.

Υπόδειξη. Θεωρούμε μια ακολουθία  $\{I_n\}$  υποδιαστημάτων του  $[0, 2\pi]$  με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Για κάθε  $x \in [0, 2\pi]$ , τα σύνολα  $A_x = \{n \in \mathbb{N} : x \in I_n\}$  και  $B_x = \{n \in \mathbb{N} : x \notin I_n\}$  είναι άπειρα.
2.  $\ell(I_n) \rightarrow 0$ , όπου  $\ell(I)$  είναι το μήκος ενός διαστήματος  $I$ .

Ένας τρόπος να ορίσουμε μια τέτοια ακολουθία είναι ο εξής: παίρνουμε  $I_1 = [0, 2\pi]$ , στη συνέχεια χωρίζουμε το  $[0, 2\pi]$  σε δύο διαδοχικά διαστήματα  $I_2$  και  $I_3$  μήκους  $\pi$ , στη συνέχεια χωρίζουμε το  $[0, 2\pi]$  σε τέσσερα διαδοχικά διαστήματα  $I_4, \dots, I_7$  μήκους  $\pi/2$  και ούτω καθεξής.

Ορίζουμε  $f_n = \chi_{I_n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Παρατηρήστε ότι κάθε  $f_n$  είναι ολοκληρώσιμη και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 d\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell(I_n)}{2\pi} = 0.$$

Από την άλλη πλευρά, για κάθε  $x \in [0, 2\pi]$  έχουμε ότι τα  $A_x$  και  $B_x$  είναι άπειρα υποσύνολα του  $\mathbb{N}$ , άρα μπορούμε να βρούμε γνησίως αύξουσες ακολουθίες φυσικών  $(k_n)$  και  $(r_n)$  στα  $A_x$  και  $B_x$  αντίστοιχα. Τότε,

$$f_{k_n}(x) = \chi_{I_{k_n}}(x) = 1 \rightarrow 1 \text{ και } f_{r_n}(x) = \chi_{I_{r_n}}(x) = 0 \rightarrow 0,$$

δηλαδή η ακολουθία  $\{f_n(x)\}$  δεν συγκλίνει.

9. Δείξτε ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{\eta_{\mu} t}{t} d\lambda(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι το ολοκλήρωμα του  $n$ -οστού πυρήνα του Dirichlet στο  $[-\pi, \pi]$  είναι ίσο με  $2\pi$ . Δηλαδή,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\eta_{\mu} \left(n + \frac{1}{2}\right) t}{\eta_{\mu} \frac{t}{2}} d\lambda(t) = 2\pi.$$

Γράφουμε

$$2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\eta_{\mu} \left(n + \frac{1}{2}\right) t}{t/2} d\lambda(t) + \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \eta_{\mu} \left(n + \frac{1}{2}\right) t d\lambda(t),$$

όπου  $g(t) = \frac{1}{\eta_{\mu}(t/2)} - \frac{1}{t/2}$ . Παρατηρούμε ότι η  $g$  μπορεί να οριστεί στο 0 ώστε να γίνει συνεχής συνάρτηση στο  $[-\pi, \pi]$  (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \eta_{\mu} \left(n + \frac{1}{2}\right) t d\lambda(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sigma_{\mu}(t/2) \eta_{\mu}(nt) d\lambda(t) \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \eta_{\mu}(t/2) \sigma_{\mu}(nt) d\lambda(t) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

όταν  $n \rightarrow \infty$ , από το Λήμμα Riemann–Lebesgue για τις συνεχείς συναρτήσεις  $g(t) \sigma_{\mu}(t/2)$  και  $g(t) \eta_{\mu}(t/2)$ . Έπεται ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_0^{\pi} \frac{\eta_{\mu} \left(n + \frac{1}{2}\right) t}{t/2} d\lambda(t) = 2\pi.$$

Όμως,

$$\int_0^\pi \frac{\eta_\mu \left(n + \frac{1}{2}\right) t}{t/2} d\lambda(t) = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{2\eta_\mu x}{x} d\lambda(x).$$

Έπεται ότι

$$\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\eta_\mu x}{x} d\lambda(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

όταν  $n \rightarrow \infty$ . Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\eta_\mu x}{x} = 0$ , μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι υπάρχει το

$$\int_0^\infty \frac{\eta_\mu x}{x} d\lambda(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M \frac{\eta_\mu x}{x} d\lambda(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες.

**10.** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  συνάρτηση  $2\pi$ -περιοδική, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ , όπου  $K > 0$  σταθερά.

(α) Για κάθε  $t > 0$  ορίζουμε  $g_t(x) = f(x + t) - f(x - t)$ . Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 d\lambda(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4|\eta_\mu kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2$$

και συμπεράνατε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\eta_\mu kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leq K^2 t^2.$$

(β) Έστω  $p \in \mathbb{N}$ . Επιλέγοντας  $t = \pi/2^{p+1}$ , δείξτε ότι

$$\sum_{2^{p-1} < |k| \leq 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{K^2 \pi^2}{2^{2p+1}}.$$

(γ) Δώστε άνω φράγμα για το

$$\sum_{2^{p-1} < |k| \leq 2^p} |\widehat{f}(k)|$$

και συμπεράνατε ότι η σειρά Fourier της  $f$  συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

Υπόδειξη. (α) Από την ταυτότητα του Parseval έχουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 d\lambda(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{g}_t(k)|^2.$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier της  $g_t$ : είναι

$$\widehat{g}_t(k) = \widehat{f(x+t)}(k) - \widehat{f(x-t)}(k) = e^{ikt} \widehat{f}(k) - e^{-ikt} \widehat{f}(k) = (2i \eta_{\mu} kt) \widehat{f}(k).$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 d\lambda(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4 |\eta_{\mu} kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2.$$

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη Lipschitz παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\eta_{\mu} kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2 &= \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x-t)|^2 d\lambda(x) \\ &\leq \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} K^2 (2t)^2 d\lambda(x) = K^2 t^2. \end{aligned}$$

(β) Εφαρμόζοντας το (α) για  $t = \pi/2^{p+1}$  έχουμε

$$\sum_{2^{p-1} < |k| \leq 2^p} |\eta_{\mu}(k\pi/2^{p+1})|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\eta_{\mu}(k\pi/2^{p+1})|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{K^2 \pi^2}{2^{2p+2}}.$$

Όμως, αν  $2^{p-1} < |k| \leq 2^p$  έχουμε  $\frac{\pi}{4} \leq \left| \frac{k\pi}{2^{p+1}} \right| \leq \frac{\pi}{2}$ . Άρα,  $|\eta_{\mu}(k\pi/2^{p+1})| \geq \eta_{\mu}(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$  γι' αυτές τις τιμές του  $k$ . Επιστρέφοντας στην προηγούμενη ανισότητα, παίρνουμε

$$\frac{1}{2} \sum_{2^{p-1} < |k| \leq 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{K^2 \pi^2}{2^{2p+2}},$$

δηλαδή

$$\sum_{2^{p-1} < |k| \leq 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{K^2 \pi^2}{2^{2p+1}}.$$

(γ) Αρκεί να δείξουμε ότι  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$ . Χρησιμοποιώντας το (β) και την ανισότητα Cauchy-Schwarz, έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{|k|>1} |\widehat{f}(k)| &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{2^{p-1} < |k| \leq 2^p} |\widehat{f}(k)| \leq \sum_{p=1}^{\infty} 2^{p/2} \left( \sum_{2^{p-1} < |k| \leq 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{p=1}^{\infty} 2^{p/2} \frac{K\pi}{\sqrt{2} 2^p} = \frac{K\pi}{\sqrt{2}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^p} < +\infty. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| = \sum_{k=-1}^1 |\widehat{f}(k)| + \sum_{|k|>1} |\widehat{f}(k)| < +\infty.$$

11. Έστω  $\alpha > 1/2$  και  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  συνάρτηση  $2\pi$ -περιοδική, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Hölder

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha$$

για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ , όπου  $K > 0$  σταθερά. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της  $f$  συγκλίνει απολύτως, άρα μοιόμορφα.

Υπόδειξη. Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με αυτήν της Άσκησης 10. Για κάθε  $t > 0$  ορίζουμε  $g_t(x) = f(x + t) - f(x - t)$  και, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval, βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 d\lambda(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4|\eta_\mu kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2.$$

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη Hölder παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\eta_\mu kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2 &= \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x-t)|^2 d\lambda(x) \\ &\leq \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} K^2(2t)^{2\alpha} d\lambda(x) = K^2 t^{2\alpha}. \end{aligned}$$

Επιλέγοντας  $t = \pi/2^{p+1}$ , έχουμε

$$\sum_{2^{p-1} < |k| \leq 2^p} |\eta_\mu(k\pi/2^{p+1})|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\eta_\mu(k\pi/2^{p+1})|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{K^2 \pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha(p+1)}}.$$

Όμως, αν  $2^{p-1} < |k| \leq 2^p$  έχουμε  $\frac{\pi}{4} \leq \left| \frac{k\pi}{2^{p+1}} \right| \leq \frac{\pi}{2}$ . Άρα,  $|\eta_\mu(k\pi/2^{p+1})| \geq \eta_\mu(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$  γι' αυτές τις τιμές του  $k$ . Επιστρέφοντας στην προηγούμενη ανισότητα, παίρνουμε

$$\frac{1}{2} \sum_{2^{p-1} < |k| \leq 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{K^2 \pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha(p+1)}},$$

δηλαδή

$$\sum_{2^{p-1} < |k| \leq 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{2K^2 \pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha(p+1)}}.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz, έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{|k|>1} |\widehat{f}(k)| &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{2^{p-1} < |k| \leq 2^p} |\widehat{f}(k)| \leq \sum_{p=1}^{\infty} 2^{p/2} \left( \sum_{2^{p-1} < |k| \leq 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{p=1}^{\infty} 2^{p/2} \frac{\sqrt{2}K\pi^\alpha}{2^{\alpha p + \alpha}} = \frac{\sqrt{2}K\pi^\alpha}{2^\alpha} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(\alpha - \frac{1}{2})p}} < +\infty, \end{aligned}$$

διότι  $\alpha - \frac{1}{2} > 0$ . Έπεται ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| = \sum_{k=-1}^1 |\widehat{f}(k)| + \sum_{|k|>1} |\widehat{f}(k)| < +\infty.$$

**12.** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής  $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση και έστω  $a_k, b_k$  οι συντελεστές Fourier της  $f$ . Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x) d\lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}.$$

Υπόδειξη. Για την  $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = \pi - x$  έχουμε  $\widehat{g}(0) = 0$  και  $\widehat{g}(k) = \frac{(-i)}{k}$  για κάθε  $k \neq 0$ . Έχουμε  $f, g \in L_2(\mathbb{T})$ , άρα

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x) d\lambda(x) &= \langle g, f \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i}{k} (\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i}{k} (-i) b_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}. \end{aligned}$$

**13.** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής  $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση και έστω  $a_k, b_k$  οι συντελεστές Fourier της  $f$ . Υποθέτουμε ότι  $a_0 = 0$ . Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \ln\left(2 \eta\mu \frac{x}{2}\right) d\lambda(x).$$

Υπόδειξη. Επεκτείνουμε την  $\ln(2 \eta\mu \frac{x}{2})$  σε μια άρτια  $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση  $g$  στο  $\mathbb{R}$ . Εξηγήστε πρώτα ότι, γενικά, αν  $f, g \in L_2(\mathbb{T})$  και οι  $f, g$  παίρνουν πραγματικές τιμές, τότε

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) d\lambda(x) = \frac{1}{2} a_0(f) a_0(g) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) a_k(g) + b_k(f) b_k(g)).$$

Αφού η  $g$  είναι άρτια, έχουμε  $b_k(g) = 0$  για κάθε  $k \geq 1$ . Άρα,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) d\lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) a_k(g).$$

Τέλος, για κάθε  $k \geq 1$  έχουμε:

$$\begin{aligned} a_k(g) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|2 \eta\mu \frac{x}{2}\right| \sigma\upsilon\nu kx d\lambda(x) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln(2 \eta\mu \frac{x}{2}) \sigma\upsilon\nu kx d\lambda(x) \\ &= -\frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \frac{\eta\mu kx \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}}{2 \eta\mu(x/2)} d\lambda(x) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \frac{\eta\mu(k+1/2)x + \eta\mu(k-1/2)x}{2\eta\mu(x/2)} d\lambda(x) \\
 &= -\frac{1}{2k\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{D_k(x) + D_{k-1}(x)}{2} d\lambda(x) = -\frac{1}{k}.
 \end{aligned}$$

14. Έστω  $f \in L^1(\mathbb{T})$ . Υποθέτουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} [w_1(f, \pi/n)]^2 < \infty,$$

όπου

$$w_1(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x+t) - f(t)| d\lambda(t).$$

Δείξτε ότι  $f \in L^2(\mathbb{T})$ .

Υπόδειξη. Από το θεώρημα Riesz-Fisher αρκεί να δείξουμε ότι η σειρά  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2$  συγκλίνει.

Έστω  $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ . Παρατηρούμε ότι

$$\widehat{f(\cdot + \pi/k)}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t + \pi/k) e^{-ikt} d\lambda(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(s) e^{-iks} ds = -\widehat{f}(k).$$

Άρα,

$$2|\widehat{f}(k)| = |\widehat{f(\cdot + \pi/k)}(k) - \widehat{f}(k)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t + \pi/k) - f(t)| d\lambda(t) = w_1(f, \pi/k).$$

Χρησιμοποιώντας και την  $w_1(f, x) = w_1(f, -x)$  (η οποία προκύπτει από την αλλαγή μεταβλητής  $s = x + t$  στο  $\int_{\mathbb{T}} |f(x+t) - f(t)| d\lambda(t)$ ) έχουμε

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{w_1(f, \pi/|k|)}{2}$$

για κάθε  $k \neq 0$ . Επίσης,  $|\widehat{f}(0)| \leq \|f\|_1$ . Συνεπώς,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \leq |\widehat{f}(0)|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[w_1(f, \pi/k)]^2}{4} \leq \|f\|_1^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [w_1(f, \pi/k)]^2 < \infty$$

από την υπόθεση.

15. Έστω  $f \in L^2(\mathbb{T})$ . Ορίζουμε

$$F(x) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n(f, x) - \sigma_{n+1}(f, x)|^2}{n} \right)^{1/2}.$$

Δείξτε ότι  $F \in L^2(\mathbb{T})$  και  $\|F\|_2 \leq \|f\|_2$ . Ειδικότερα,  $F(x) < \infty$  σχεδόν παντού στο  $\mathbb{T}$ .

Υπόδειξη. Για κάθε  $N \in \mathbb{N}$  ορίζουμε

$$g_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{|s_n(f, x) - \sigma_{n+1}(f, x)|^2}{n}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$s_n(f, x) - \sigma_{n+1}(f, x) = \sum_{k=-n}^n \frac{|k|}{n+1} \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

Άρα,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g_N(x) d\lambda(x) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=-n}^n \frac{|k|^2}{n(n+1)^2} |\widehat{f}(k)|^2 = \sum_{k=-N}^N |k|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \sum_{n=|k|}^N \frac{1}{n(n+1)^2}.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=|k|}^N \frac{1}{n(n+1)^2} &= \sum_{n=|k|}^N \left( \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\ &\leq \sum_{n=|k|}^N \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \sum_{n=|k|+1}^{N+1} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{|k|} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{|k|+1} + \frac{1}{N+2} \\ &\leq \frac{1}{|k|(|k|+1)} \leq \frac{1}{|k|^2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g_N(x) d\lambda(x) \leq \sum_{k=-N}^N |k|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \frac{1}{|k|^2} = \sum_{k=-N}^N |\widehat{f}(k)|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|F\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n(f, x) - \sigma_{n+1}(f, x)|^2}{n} \right) d\lambda(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g_N(x) d\lambda(x) \leq \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

**16.** Έστω  $x_n, y_m \in \mathbb{C}$ ,  $n, m \geq 0$ . Δείξτε ότι

$$\left| \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{x_n y_m}{n+m+1} \right| \leq \pi \left( \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{m=0}^{\infty} |y_m|^2 \right)^{1/2}.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την  $\phi : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$  με  $\phi(t) = i(\pi - t)e^{-it}$  και την επεκτείνουμε σε  $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση στο  $\mathbb{R}$ . Αυτό που θα χρησιμοποιήσουμε είναι ότι  $\widehat{\phi}(k) = \frac{1}{k+1}$  για κάθε  $k \geq 0$  και  $\|\phi\|_{\infty} = \pi$ .

Για κάθε  $N \in \mathbb{N}$  έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=0}^N \frac{|x_n| |y_m|}{n+m+1} &= \sum_{n,m=0}^N |x_n| |y_m| \widehat{\phi}(n+m) \\ &= \sum_{n,m=0}^N |x_n| |y_m| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \phi(t) e^{-i(n+m)t} d\lambda(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left( \sum_{n=0}^N |x_n| e^{-int} \right) \left( \sum_{m=0}^N |y_m| e^{-imt} \right) \phi(t) d\lambda(t). \end{aligned}$$

Δηλαδή, αν ορίσουμε  $\alpha_N(t) = \sum_{n=0}^N |x_n| e^{-int}$  και  $\beta_N(t) = \sum_{m=0}^N |y_m| e^{-imt}$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=0}^N \frac{|x_n| |y_m|}{n+m+1} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \alpha_N(t) \beta_N(t) \phi(t) d\lambda(t) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |\alpha_N(t)| |\beta_N(t)| \|\phi\|_{\infty} d\lambda(t) \\ &\leq \|\phi\|_{\infty} \|\alpha_N\|_2 \|\beta_N\|_2 \end{aligned}$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Αφού

$$\|\alpha_N\|_2 = \left( \sum_{n=0}^N |x_n|^2 \right)^{1/2} \quad \text{και} \quad \|\beta_N\|_2 = \left( \sum_{m=0}^N |y_m|^2 \right)^{1/2},$$

παίρνουμε

$$\sum_{n,m=0}^N \frac{|x_n| |y_m|}{n+m+1} \leq \|\phi\|_{\infty} \left( \sum_{n=0}^N |x_n|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{m=0}^N |y_m|^2 \right)^{1/2}.$$

Αφού  $\|\phi\|_{\infty} = \pi$ , έπεται ότι

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{|x_n| |y_m|}{n+m+1} \leq \pi \left( \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{m=0}^{\infty} |y_m|^2 \right)^{1/2}.$$

Ειδικότερα, έχουμε το ζητούμενο.