ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αρμονική Ανάλυση

Ενότητα: Μετασχηματισμός Fourier

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα ενότητας

8 Μετασχηματισμός Fourier

8.1 Μετασχηματισμός Fourier στον $L_1(\mathbb{R}^n)$

Ορισμός 8.1.1 (μετασχηματισμός Fourier). *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ο **μετασχηματισμός Fourier** της f είναι η συνάρτηση $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ με*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} d\lambda(x), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Λήμμα 8.1.2. *Ο τελεστής $\mathcal{F}_1 : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ που ορίζεται από την $\mathcal{F}_1(f) = \widehat{f}$ είναι φραγμένος τελεστής, και $\|\mathcal{F}_1\| \leqslant 1$.*

Απόδειξη. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} d\lambda(x) \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, |e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle}|\, d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, d\lambda(x) = \|f\|_1. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\|\widehat{f}\|_\infty = \sup_{\xi} |\widehat{f}(\xi)| \leqslant \|f\|_1.$$

Η γραμμικότητα του $\mathcal{F}_1$ είναι απλή: από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος έπεται ότι, για κάθε $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και για κάθε $a, b \in \mathbb{K}$ ισχύει $\widehat{af + bg} = a\widehat{f} + b\widehat{g}$. $\square$

Λήμμα 8.1.3. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{f}$ της f είναι συνεχής συνάρτηση και μηδενίζεται στο άπειρο:*

$$\lim_{|\xi| \to \infty} |\widehat{f}(\xi)| = 0. \tag{8.1.0.1}$$

Ειδικότερα, η $\widehat{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη. Για τη συνέχεια της $\widehat{f}$ σταθεροποιούμε $\xi \in \mathbb{R}^n$ και τυχούσα ακολουθία (t_k) στον $\mathbb{R}^n$ με $t_k \to 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\xi + t_k) - \widehat{f}(\xi)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, |e^{-2\pi i \langle \xi + t_k, x \rangle} - e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle}|\, d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, |e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle}|\, |e^{-2\pi i \langle t_k, x \rangle} - 1|\, d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, |e^{-2\pi i \langle t_k, x \rangle} - 1|\, d\lambda(x). \end{aligned}$$

Ορίζουμε $g_k(x) = |f(x)|\,|e^{-2\pi i\langle t_k,x\rangle} - 1|$. Αφού $\lim_{k\to\infty}(e^{-2\pi i\langle t_k,x\rangle}) = 1$ για κάθε x, έχουμε $g_k(x) \to 0$ σχεδόν παντού (σε κάθε x για το οποίο $|f(x)| < \infty$). Επίσης,

$$0 \leqslant g_k(x) \leqslant |f(x)|(|e^{-2\pi i\langle t_k,x\rangle}| + 1) = 2|f(x)|.$$

Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης: έχουμε

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} g_k(x)\,d\lambda(x) = 0,$$

δηλαδή $\widehat{f}(\xi + t_k) \to \widehat{f}(\xi)$. Αυτό αποδεικνύει ότι η $\widehat{f}$ είναι συνεχής στο ξ.

Για την απόδειξη της (8.1.0.1) μπορούμε να δουλέψουμε με διάφορους τρόπους. Ο πρώτος είναι να ξεκινήσουμε αποδεικνύοντάς την για την χαρακτηριστική συνάρτηση ενός ορθογωνίου $Q = \prod_{j=1}^{n}[a_j, b_j]$. Στην περίπτωση $n = 1$ έχουμε

$$\widehat{\chi_{[a,b]}}(\xi) = \int_a^b e^{-2\pi i\xi t}d\lambda(t) = \frac{e^{-2\pi i\xi a} - e^{-2\pi i\xi b}}{2\pi i\xi},$$

άρα

$$|\widehat{\chi_{[a,b]}}(\xi)| \leqslant \frac{2}{2\pi|\xi|} \to 0$$

καθώς το $|\xi| \to \infty$. Στην γενική περίπτωση, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini, γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{\chi_Q}(\xi) &= \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n} e^{-2\pi i\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j}\,d\lambda(t)_n\cdots d\lambda(t)_1\\ &= \prod_{j=1}^{n}\int_{a_j}^{b_j} e^{-2\pi i\xi_j t_j}d\lambda(t)_j = \prod_{j=1}^{n}\frac{e^{-2\pi i\xi_j a_j} - e^{-2\pi i\xi_j b_j}}{2\pi i\xi_j}.\end{aligned}$$

Παρατηρώντας ότι κάθε όρος του γινομένου φράσσεται απολύτως από $b_j - a_j$ (θυμηθείτε το Λήμμα 8.1.2) μπορούμε να γράψουμε

$$|\widehat{\chi_Q}(\xi)| \leqslant \frac{1}{\pi|\xi_{j_0}|}\prod_{j\neq j_0}(b_j - a_j),$$

όπου $|\xi_{j_0}| = \|\xi\|_\infty \geqslant \frac{|\xi|}{\sqrt{n}}$. Αυτό αποδεικνύει ότι $\|\xi\|_\infty \to 0$ καθώς το $|\xi| \to \infty$, και συμπεραίνουμε ότι $\lim_{|\xi|\to\infty}\widehat{\chi_Q}(\xi) = 0$.

Έχουμε τώρα την (8.1.0.1) για κάθε απλή συνάρτηση f που είναι γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων ορθογωνίων της μορφής $Q = \prod_{j=1}^{n}[a_j, b_j]$. Με ένα επιχείρημα προσέγγισης, βλέπουμε ότι το ίδιο ισχύει για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Ένας άλλος τρόπος είναι ο εξής: για κάθε $\xi \neq 0$ ορίζουμε $\xi' = \frac{\xi}{2|\xi|^2}$ και παρατηρούμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-\xi')e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\lambda(x) = e^{-2\pi i\langle \xi',\xi\rangle}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-\xi')e^{-2\pi i\langle x-\xi',\xi\rangle}d\lambda(x)$$
$$= e^{-\pi i}\int_{\mathbb{R}^n} f(z)e^{-2\pi i\langle z,\xi\rangle}d\lambda(x)$$
$$= -\widehat{f}(\xi).$$

Άρα, μπορούμε να γράψουμε

$$|\widehat{f}(\xi)| = \left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}(f(x)-f(x-\xi'))e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\lambda(x)\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)-f_{-\xi'}(x)|\,d\lambda(x)$$
$$= \frac{1}{2}\|f-f_{-\xi'}\|_1 \to 0$$

καθώς το $|\xi| \to \infty$ (θυμηθείτε ότι $f_h(x) := f(x+h)$ και παρατηρήστε ότι $|\xi'| = \frac{1}{2|\xi|} \to 0$).

$\boxed{+}$

Παρατήρηση 8.1.4. *Θα συμβολίζουμε με $C_0(\mathbb{R}^n)$ την κλάση των συνεχών συναρτήσεων $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ που μηδενίζονται στο άπειρο. Ως τώρα έχουμε δείξει ότι αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$.*

Οι επόμενες δύο προτάσεις μας δίνουν βασικές αλγεβρικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier.

Πρόταση 8.1.5. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Τότε:*

1. *Αν $h \in \mathbb{R}^n$ και $(\tau_h f)(x) = f_{-h}(x) = f(x-h)$,*
$$\widehat{\tau_h f}(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{-2\pi i\langle \xi,h\rangle}.$$
2. *Αν $h \in \mathbb{R}^n$,*
$$\widehat{e^{2\pi i\langle\cdot,h\rangle}f}(\xi) = (\tau_h\widehat{f})(\xi).$$
3. *Αν $\delta > 0$ και $f_\delta(x) = f(\delta x)$,*
$$\widehat{f_\delta}(\xi) = \frac{1}{\delta^n}\widehat{f}(\xi/\delta).$$

Απόδειξη. 1. Γράφουμε

$$\widehat{\tau_h f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n}\tau_h f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-h)e^{-2\pi i\langle x-h,\xi\rangle}e^{-2\pi i\langle h,\xi\rangle}d\lambda(x)$$
$$= e^{-2\pi i\langle h,\xi\rangle}\int_{\mathbb{R}^n} f(z)e^{-2\pi i\langle z,\xi\rangle}dz = e^{-2\pi i\langle h,\xi\rangle}\widehat{f}(\xi).$$

2. Γράφουμε

$$\widehat{e^{2\pi i\langle\cdot,h\rangle}f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x,h\rangle}f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi-h\rangle}d\lambda(x)$$
$$= \widehat{f}(\xi-h) = (\tau_h\widehat{f})(\xi).$$

3. Γράφουμε

$$\widehat{f_\delta}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_\delta(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\lambda(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\delta x)e^{-2\pi i\langle \delta x,\xi/\delta\rangle}d\lambda(x)$$
$$= \frac{1}{\delta^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(z)e^{-2\pi i\langle z,\xi/\delta\rangle}dz = \frac{1}{\delta^n}\widehat{f}(\xi/\delta).$$

$\boxed{+}$

Πρόταση 8.1.6. *Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Τότε, $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και*

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\cdot\widehat{g}(\xi)$$

για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $F : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}$ με $F(x,y) = f(x-y)g(y)e^{-2\pi i\langle \xi,x\rangle}$ είναι μετρήσιμη και ανήκει στον $L^1(\mathbb{R}^n)$. Πράγματι,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |F(\xi,y)|\,d\lambda(y)\,d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(\xi)|\,|f(y)|\,d\lambda(y)\,d\xi$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(\xi)|\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,d\lambda(y)\right)d\xi$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(\xi)|\,\|f\|_1 d\lambda(y) = \|f\|_1\|g\|_1 < \infty.$$

Μπορούμε λοιπόν, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini και την Πρόταση 8.1.5 (i), να γράψουμε

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)d\lambda(y)\right)e^{-2\pi i\langle \xi,x\rangle}d\lambda(x)$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)e^{-2\pi i\langle \xi,x\rangle}d\lambda(x)\right)d\lambda(y)$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-2\pi i\langle \xi,y\rangle}\widehat{f}(\xi)\,d\lambda(y)$$
$$= \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).$$

$\boxed{+}$

8.2 Ο τύπος αντιστροφής του Fourier

Σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να αποδείξουμε τον τύπο αντιστροφής του Fourier στην εξής μορφή:

Θεώρημα 8.2.1 (τύπος αντιστροφής). *Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \langle x,\xi\rangle} d\xi \quad \text{σχεδόν παντού.}$$

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 2. Βασικό ρόλο θα παίξει επίσης ο ακόλουθος **πολλαπλασιαστικός τύπος**:

Θεώρημα 8.2.2 (πολλαπλασιαστικός τύπος). *Έστω f και g δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\widehat{g}(y)\, d\lambda(y).$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $F(\xi, y) = g(\xi) f(y) e^{-2\pi i \langle \xi,y\rangle}$ είναι μετρήσιμη και ανήκει στον $L^1(\mathbb{R}^{2n})$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Fubini παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\xi)\, d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \langle \xi,y\rangle} d\lambda(y) \right) g(\xi)\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{-2\pi i \langle \xi,y\rangle} d\xi \right) f(y)\, d\lambda(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y) f(y)\, d\lambda(y).
\end{aligned}$$

$\boxed{+}$

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης μια ειδική συνάρτηση:

Λήμμα 8.2.3. *Έστω $\delta > 0$ και έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Για τη συνάρτηση*

$$g_\delta(\xi) = e^{-\pi\delta|\xi|^2} e^{2\pi i \langle x,\xi\rangle}$$

ισχύει ότι

$$\widehat{g_\delta}(y) = \frac{1}{\delta^{n/2}} e^{-\pi \frac{|x-y|^2}{\delta}}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(\xi) = e^{-\pi\delta|\xi|^2}$. Από την Πρόταση 8.1.5 (ii) έχουμε

$$\widehat{g_\delta}(y) = (\tau_x \widehat{h})(y) = \widehat{h}(y - x).$$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $u(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$. Τότε, $h(\xi) = u(\sqrt{\delta}\xi)$. Από την Πρόταση 8.1.5 (iii) έχουμε

$$\widehat{h}(y) = \frac{1}{\delta^{n/2}} \widehat{u}(y/\sqrt{\delta}).$$

Τέλος, υπολογίζουμε την

$$\widehat{u}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|\xi|^2} e^{-2\pi i\langle \xi, y\rangle} d\xi = \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\xi_j^2} e^{-2\pi i \xi_j y_j} d\xi_j.$$

Απλός υπολογισμός (μιγαδική ολοκλήρωση) δείχνει ότι

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2 - 2\pi i y t} d\lambda(t) = e^{-\pi y^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(t+iy)^2} d\lambda(t) = e^{-\pi y^2}.$$

Συνεπώς,

$$\widehat{h}(y) = \prod_{j=1}^{n} e^{-\pi y_j^2} = e^{-\pi|y|^2}$$

και

$$\widehat{g_\delta}(y) = \widehat{h}(y-x) = \frac{1}{\delta^{n/2}} \widehat{u}\left(\frac{y-x}{\sqrt{\delta}}\right) = \frac{1}{\delta^{n/2}} e^{-\frac{\pi|y-x|^2}{\delta}}.$$

$\boxed{+}$

Απόδειξη του Θεωρήματος 8.2.1. Θεωρούμε την οικογένεια $(K_{\delta^2})_{\delta>0}$. Ελέγχουμε πρώτα ότι είναι οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας: για κάθε $\delta > 0$, κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y = \delta z$ παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_{\delta^2}(y)\, d\lambda(y) = \frac{1}{\delta^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\pi|y|^2}{\delta^2}} d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|z|^2} dz = 1.$$

Είναι προφανές ότι, για κάθε $\delta > 0$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, έχουμε

$$0 \leqslant K_{\delta^2}(y) = \frac{1}{\delta^n} e^{-\frac{\pi|y|^2}{\delta^2}} \leqslant \frac{1}{\delta^n}.$$

Μένει να δείξουμε ότι: αν $|y| \geqslant \delta$ τότε $|K_{\delta^2}(y)| \leqslant M\delta/|y|^{n+1}$ για κάποια σταθερά $M_n > 0$. Χρησιμοποιώντας την $e^t \geqslant t^{n+1}/(n+1)!$ με $t = \sqrt{\pi}|y|/\delta$, γράφουμε

$$0 \leqslant K_{\delta^2}(y) = \frac{1}{\delta^n} e^{-\frac{\pi|y|^2}{\delta^2}} \leqslant \frac{1}{\delta^n} \frac{(n+1)!\delta^{n+1}}{\pi^{(n+1)/2}|y|^{n+1}} = \frac{M_n\delta}{|y|^{n+1}},$$

όπου $M_n = (n+1)!/\pi^{(n+1)/2}$.

Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Από τον πολλαπλασιαστικό τύπο (Θεώρημα 8.2.2) έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g_{\delta^2}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\widehat{g_{\delta^2}}(y)\, d\lambda(y).$$

Από το Λήμμα 8.2.3 έχουμε $\widehat{g_{\delta^2}}(y) = \frac{1}{\delta^n} e^{-\pi\frac{|x-y|^2}{\delta^2}}$, άρα

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{-\pi\delta^2|\xi|^2} e^{2\pi i\langle x, \xi\rangle}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) K_{\delta^2}(x-y)\, d\lambda(y) = (f * K_{\delta^2})(x)$$

για κάθε $\delta > 0$.

Παρατηρούμε ότι, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{-\pi\delta^2|\xi|^2}e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}\,d\xi.$$

Από την άλλη πλευρά, αφού η $(K_{\delta^2})_{\delta>0}$ είναι οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας, για κάθε $x \in Leb(f)$ έχουμε

$$\lim_{\delta\to 0}(f * K_{\delta^2})(x) = f(x).$$

Αφού $m(\mathbb{R}^n \setminus Leb(f)) = 0$, έπεται το ζητούμενο. □

Πόρισμα 8.2.4 (μοναδικότητα). *Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Αν $\widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi)$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$, τότε $f(x) = g(x)$ σχεδόν παντού.*

Απόδειξη. Αφού $\widehat{f-g} = \widehat{f} - \widehat{g} = 0$, έχουμε $f - g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $\widehat{f-g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Άρα,

$$(f-g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f-g}(\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\xi = 0 \text{ σχεδόν παντού.}$$

Δηλαδή, $f(x) = g(x)$ σχεδόν παντού.

$\boxed{+}$

Η παρατήρηση της επόμενης Πρότασης θα μας φανεί χρήσιμη στην επόμενη παράγραφο.

Πρόταση 8.2.5. *Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $\widehat{f} \geqslant 0$, και αν η f είναι συνεχής στο 0, τότε $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, άρα*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\xi \text{ σχεδόν παντού.}$$

Απόδειξη. Επιστρέφουμε στην απόδειξη του τύπου αντιστροφής. Για $x = 0$ και για κάθε $\delta > 0$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{-\pi\delta^2|\xi|^2}\,d\xi = (f * K_{\delta^2})(0).$$

Αφού $\widehat{f} \geqslant 0$, το θεώρημα μονότονης σύγκλισης δείχνει ότι

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{-\pi\delta^2|\xi|^2}\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\,d\xi.$$

Αφού η f είναι συνεχής στο 0, έχουμε

$$\lim_{\delta\to 0}(f * K_{\delta^2})(0) = f(0).$$

Έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\,d\xi = f(0),$$

δηλαδή $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Κατόπιν, εφαρμόζεται το Θεώρημα 8.2.1.

$\boxed{+}$

8.3 Μετασχηματισμός Fourier στον $L^2(\mathbb{R}^n)$

Σκοπός μας είναι να ορίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier μιας συνάρτησης $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Θα υποθέσουμε πρώτα ότι $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Τότε, από την Παράγραφο 3.1 γνωρίζουμε ότι ορίζεται καλά ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{f} = \mathcal{F}_1(f)$.

Θεώρημα 8.3.1. *Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ τότε $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ και*

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε g με $g(x) = \overline{f(-x)}$. Είναι φανερό ότι $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ και

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(-x)}\, e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(-x)\, e^{-2\pi i\langle -x,\xi\rangle}}\, d\lambda(x) \\ &= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(-x)\, e^{-2\pi i\langle -x,\xi\rangle}\, d\lambda(x)} = \overline{\widehat{f}(\xi)}.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\,\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\,\overline{\widehat{f}(\xi)} = |\widehat{f}(\xi)|^2 \geqslant 0.$$

Επίσης, η $f * g$ είναι συνεχής στο 0. Έχουμε

$$\begin{aligned}|(f*g)(h) - (f*g)(0)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(h-x)\, d\lambda(x) - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(-x)\, d\lambda(x)\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{f(x-h)}\, d\lambda(x) - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{f(x)}\, d\lambda(x)\right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, |\overline{f(x-h)} - \overline{f(x)}|\, d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, |f(x-h) - f(x)|\, d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, |f_{-h}(x) - f(x)|\, d\lambda(x) \\ &\leqslant \|f\|_2\, \|f_{-h} - f\|_2 \to 0\end{aligned}$$

καθώς το $h \to 0$, όπου στο τέλος χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz για τις f και $f_{-h} - f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, και το γεγονός ότι $\lim_{h\to 0} \|f_{-h} - f\|_2 = 0$.

Από την Πρόταση 8.2.5 συμπεραίνουμε ότι $\widehat{f * g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και

$$(f*g)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f * g}(\xi)\, d\xi.$$

Όμως,

$$(f*g)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(-x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{f(x)}\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 d\lambda(x) = \|f\|_2^2$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f * g}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{f}(\xi)}\, d\xi$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\widehat{f}\|_2^2.$$

Συνεπώς, $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$.

$\boxed{+}$

Από το Θεώρημα 8.3.1 έχουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένας καλά ορισμένος φραγμένος γραμμικός τελεστής στο πυκνό υποσύνολο $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ του $L^2(\mathbb{R}^n)$, και μάλιστα είναι ισομετρία. Συνεπώς, υπάρχει φραγμένη γραμμική επέκταση $\mathcal{F}_2$ αυτού του τελεστή σε ολόκληρο τον $L^2(\mathbb{R}^n)$. Θα λέμε ότι ο $\mathcal{F}_2$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier στον $L^2(\mathbb{R}^n)$ και θα συνεχίσουμε να γράφουμε $\widehat{f} = \mathcal{F}_2(f)$ για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Με βάση αυτόν τον ορισμό, η $\widehat{f} = \mathcal{F}_2(f)$ είναι το L^2-όριο της ακολουθίας $\{\widehat{g}_k\}$, όπου $\{g_k\}$ είναι μια ακολουθία στον $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ η οποία συγκλίνει στην f ως προς την $\|\cdot\|_2$. Μπορούμε, για παράδειγμα, να επιλέξουμε την ακολουθία συναρτήσεων

(8.3.0.2) $$g_k(x) = f(x)\chi_{\{|x| \leqslant k\}}(x).$$

Άρα, η $\widehat{f}$ είναι το L^2-όριο της $\{\widehat{g}_k\}$, όπου

(8.3.0.3) $$\widehat{g}_k(\xi) = \int_{\{|x| \leqslant k\}} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\lambda(x).$$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι ο $\mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ είναι ένας ορθομοναδιαίος τελεστής.

Θεώρημα 8.3.2. *Ο $\mathcal{F}_2$ είναι ορθομοναδιαίος.*

Απόδειξη. Αφού ο $\mathcal{F}_2$ είναι ισομετρία, το σύνολο τιμών του είναι ένας κλειστός υπόχωρος M του $L^2(\mathbb{R}^n)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$ με $\|h\|_2 \neq 0$ και την ιδιότητα

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)h(x)\, d\lambda(x) = 0$$

για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Παρατηρούμε ότι ο πολλαπλασιαστικός τύπος του Θεωρήματος 8.2.2 επεκτείνεται στον $L^2(\mathbb{R}^n)$, άρα

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\widehat{h}(y)\, d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)\, d\lambda(x) = 0$$

για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Έπεται ότι $\widehat{h} = 0$, άρα $\|h\|_2 = \|\widehat{h}\|_2 = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

$\boxed{+}$

Μπορούμε επίσης να περιγράψουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier $\mathcal{F}_2^{-1}$.

Θεώρημα 8.3.3. *Για κάθε $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ έχουμε*

(8.3.0.4) $$(\mathcal{F}_2^{-1}g)(x) = (\mathcal{F}_2 g)(-x).$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη εκφράζουμε την $\mathcal{F}_2^{-1}(\widehat{f})$ σαν το L^2-όριο της ακολουθίας συναρτήσεων

$$f_k(x) = \int_{\{|y|\leqslant k\}} \widehat{f}(y)e^{2\pi i\langle x,y\rangle}d\lambda(y). \tag{8.3.0.5}$$

Εξηγούμε πρώτα την (8.3.0.5) στην περίπτωση που $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Ορίζουμε

$$\tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)e^{2\pi i\langle x,y\rangle}d\lambda(y) = \|\cdot\|_2 - \lim_{k\to\infty} f_k(x)$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\langle h, \tilde{f}\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\overline{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)e^{2\pi i\langle x,y\rangle}d\lambda(y)\right)}d\lambda(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} h(x)e^{-2\pi i\langle x,y\rangle}d\lambda(x)\right)\overline{\widehat{f}(y)}\,d\lambda(y)\\ &= \langle \mathcal{F}_2 h, \widehat{f}\rangle\end{aligned}$$

για κάθε $h \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Δηλαδή,

$$\langle h, \tilde{f}\rangle = \langle \mathcal{F}_2 h, \widehat{f}\rangle = \langle \mathcal{F}_2 h, \mathcal{F}_2 f\rangle = \langle h, f\rangle$$

για κάθε $h \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Έπεται ότι

$$f(x) = \tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)e^{2\pi i\langle x,y\rangle}d\lambda(y). \tag{8.3.0.6}$$

Θέτοντας $g = \widehat{f} = \mathcal{F}_2(f)$, έχουμε

$$\mathcal{F}_2^{-1}g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{2\pi i\langle x,y\rangle}d\lambda(y) = (\mathcal{F}_2 g)(-x). \tag{8.3.0.7}$$

Τα Θεωρήματα 8.3.2 και 8.3.3 είναι γνωστά ως «θεώρημα Plancherel». $\boxed{+}$