ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αρμονική Ανάλυση

Ενότητα: L_2-σύγκλιση σειρών Fourier

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

΄Αδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

7 L_2-σύγκλιση σειρών Fourier

7.1 Χώροι Hilbert

7.1.1 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο και χώροι Hilbert

Ορισμός 7.1.1. *Έστω X γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. Μια συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ λέγεται εσωτερικό γινόμενο αν ικανοποιεί τα εξής:*

(α) $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ για κάθε $x \in X$, με ισότητα αν και μόνο αν $x = 0$.

(β) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, για κάθε $x, y \in X$.

(γ) για κάθε $y \in X$ η συνάρτηση $x \mapsto \langle x, y \rangle$ είναι γραμμική.

Πρόταση 7.1.2 (ανισότητα Cauchy-Schwarz)**.** *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $x, y \in X$, τότε*

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}. \tag{7.1.1.1}$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Έστω $x, y \in X$ και έστω $M = |\langle x, y \rangle|$. Υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ ώστε $\langle x, y \rangle = Me^{i\theta}$. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $\lambda = re^{it}$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle &= |\lambda|^2 \langle x, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \overline{\lambda \langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\ &= |\lambda|^2 \langle x, x \rangle + 2Re(\lambda \langle x, y \rangle) + \langle y, y \rangle \\ &= r^2 \langle x, x \rangle + 2Re(rMe^{i(\theta+t)}) + \langle y, y \rangle. \end{aligned}$$

Επιλέγουμε το t έτσι ώστε $e^{i(\theta+t)} = -1$. Τότε, έχουμε

$$r^2 \langle x, x \rangle - 2rM + \langle y, y \rangle \geqslant 0 \tag{7.1.1.2}$$

για κάθε $r > 0$. Παίρνοντας $r = \sqrt{\langle y, y \rangle}/\sqrt{\langle x, x \rangle}$ έχουμε το ζητούμενο (η περίπτωση $x = 0$ ή $y = 0$ είναι προφανής).

Στην περίπτωση που $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι για κάθε $x, y \in X$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$0 \leqslant \langle tx + y, tx + y \rangle = t^2 \langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle. \tag{7.1.1.3}$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου ως προς t πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση από μηδέν.

Άρα, $4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leqslant 0$. Αυτό δίνει το ζητούμενο.

$\boxed{+}$

Ορίζουμε $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ με $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Η ανισότητα Cauchy-Schwarz μας επιτρέπει να δείξουμε ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα:

Πρόταση 7.1.3. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Η συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, με $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ είναι νόρμα.*

Απόδειξη. Αρκεί να ελέγξουμε την τριγωνική ανισότητα (οι άλλες ιδιότητες είναι απλές). Όμως,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re(\langle x,y\rangle) \\ &\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| \\ &\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| = (\|x\|+\|y\|)^2,\end{aligned}$$

από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου και την ανισότητα Cauchy-Schwarz. $\boxed{+}$

Παρατήρηση 7.1.4. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω $\|\cdot\|$ η επαγόμενη νόρμα. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται εύκολα ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι συνεχές ως προς την $\|\cdot\|$: Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$ ως προς την $\|\cdot\|$, τότε*

$$\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x,y\rangle. \tag{7.1.1.4}$$

Για την απόδειξη γράφουμε

$$\begin{aligned}|\langle x_n,y_n\rangle - \langle x,y\rangle| &= |\langle x_n, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y\rangle| \\ &\leqslant |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \leqslant \|x_n\|\,\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\,\|y\|.\end{aligned}$$

Η (x_n) συγκλίνει άρα είναι φραγμένη, και $\|y_n - y\| \to 0$, $\|x_n - x\| \to 0$. Άρα,

$$\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x,y\rangle. \tag{7.1.1.5}$$

Ειδικότερα, για κάθε $y \in X$ η απεικόνιση $x \mapsto \langle x,y\rangle$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον X.

Ορισμός 7.1.5. *Ένας χώρος Banach λέγεται χώρος Hilbert αν υπάρχει εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ στον X ώστε $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ για κάθε $x \in X$.*

Στη συνέχεια συμβολίζουμε τους χώρους Hilbert με H. Κάθε χώρος Hilbert ικανοποιεί τον *κανόνα του παραλληλογράμμου*: για κάθε $x, y \in H$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{7.1.1.6}$$

Αντίστροφα, αν η νόρμα $\|\cdot\|$ ενός χώρου Banach X ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου, τότε προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο το οποίο ορίζεται από την

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\} \tag{7.1.1.7}$$

στην περίπτωση $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, και από την

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2) \tag{7.1.1.8}$$

στην περίπτωση $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

7.1.2 Καθετότητα

Ορισμός 7.1.6 (καθετότητα). *Έστω X ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Λέμε ότι τα $x, y \in X$ είναι ορθογώνια (ή κάθετα) και γράφουμε $x \perp y$, αν $\langle x,y\rangle = 0$. Αν $x \in X$ και M είναι ένα μη κενό υποσύνολο του X, λέμε ότι το x είναι κάθετο στο M και γράφουμε $x \perp M$ αν $x \perp y$ για κάθε $y \in M$.*

Παρατηρήσεις 7.1.7. *(α) Το 0 είναι κάθετο σε κάθε $x \in X$, και είναι το μοναδικό στοιχείο του X που έχει αυτήν την ιδιότητα.*

(β) Αν $x \perp y$, ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Ορισμός 7.1.8. *Έστω X ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω M γραμμικός υπόχωρος του X. Ορίζουμε*

(7.1.2.1)
$$M^{\perp} = \{x \in X : \forall y \in M, \ \ \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Ο $M^{\perp}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X

Πρόταση 7.1.9. *Έστω H χώρος Hilbert, M κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H, και $x \in H$. Υπάρχει μοναδικό $y_0 \in M$ ώστε*

(7.1.2.2)
$$\|x - y_0\| = dist(x, M) = \inf\{\|x-y\| : y \in M\}.$$

Το μοναδικό αυτό $y_0 \in M$ συμβολίζεται με $P_M(x)$, ονομάζεται προβολή του x στον M και ικανοποιεί την $x - P_M(x) \perp M$.

Απόδειξη. Θέτουμε $\delta = dist(x, M)$. Υπάρχει ακολουθία (y_n) στον M ώστε

(7.1.2.3)
$$\|x - y_n\| \to \delta.$$

Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου,

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) + (x - y_m)\|^2 \\
&= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|(y_n + y_m) - 2x\|^2 \\
&= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\right\|^2.
\end{aligned}$$

Όμως, $\frac{y_n+y_m}{2} \in M$, άρα $\|\frac{y_n+y_m}{2} - x\| \geqslant \delta$. Επομένως,

(7.1.2.4)
$$\|y_n - y_m\|^2 \leqslant 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\delta^2 \to 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$$

όταν $m, n \to \infty$. Άρα, η (y_n) είναι ακολουθία Cauchy στον H. Ο H είναι πλήρης, άρα υπάρχει $y_0 \in H$ ώστε $y_n \to y_0$. Έπεται ότι $y_0 \in M$ (ο M είναι κλειστός) και $\|x - y_0\| = \lim\limits_n \|x - y_n\| = \delta$.

Για τη μοναδικότητα, χρησιμοποιούμε και πάλι τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Αν $\|x - y\| = \delta = \|x - y'\|$, τότε

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \|y - y'\|^2 = 2\|x - y'\|^2 + 2\|x - y\|^2 - 4\left\|\frac{y + y'}{2} - x\right\|^2 \\
\leqslant 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0.
\end{aligned}$$

Άρα, $y = y'$.

Για τον τελευταίο ισχυρισμό θέτουμε $w = x - P_M(x)$. Έστω ότι το w δεν είναι κάθετο στον M. Τότε, υπάρχει $z \in M$ ώστε $\langle w, z\rangle > 0$. Για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό, έχουμε $2\langle w, z\rangle - \varepsilon\|z\|^2 > 0$. Άρα,

$$\begin{aligned}
\|x - (P_M(x) + \varepsilon z)\|^2 &= \|w - \varepsilon z\|^2 = \langle w - \varepsilon z, w - \varepsilon z\rangle \\
&= \|w\|^2 - 2\varepsilon\langle w, z\rangle + \varepsilon\|z\|^2 \\
&= \delta^2 - \varepsilon(2\langle w, z\rangle - \varepsilon\|z\|^2) < \delta^2,
\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο γιατί $P_M(x) + \varepsilon z \in M$.

$\boxplus$

Πόρισμα 7.1.10. *Αν H χώρος Hilbert και M κλειστός γνήσιος υπόχωρος του H, τότε υπάρχει $z \in H$, $z \neq 0$, ώστε $z \perp M$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in H \setminus M$. Παίρνουμε $z = x - P_M(x) \neq 0$. ⊣

7.1.3 Ορθοκανονικές βάσεις

Ορισμός 7.1.11. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία $(e_k) \subseteq X$ λέγεται ορθοκανονική, αν $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ (1 αν $i = j$ και 0 αν $i \neq j$). Αν (e_k) είναι μια ορθοκανονική ακολουθία στον X, τότε το $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Πράγματι, αν $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{i_k} = 0$, τότε για κάθε $j = 1, \ldots, n$ έχουμε*

$$0 = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{i_k}, e_{i_j} \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_{i_k}, e_{i_j} \rangle = \lambda_j. \tag{7.1.3.1}$$

Ορισμός 7.1.12. *Έστω H χώρος Hilbert. Μία ορθοκανονική ακολουθία (e_k) λέγεται ορθοκανονική βάση του H αν*

$$H = \overline{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}. \tag{7.1.3.2}$$

Πρόταση 7.1.13. *Έστω H ένας απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ του H.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι κάθε ορθοκανονική οικογένεια $\{e_i : i \in I\}$ του H είναι αριθμήσιμο σύνολο: πράγματι, αν $e_i \neq e_j$ είναι στοιχεία μιας τέτοιας οικογένειας, τότε $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$. Την ίδια στιγμή, αφού ο χώρος είναι διαχωρίσιμος δεν γίνεται να υπάρχουν υπεραριθμήσιμα το πλήθος σημεία του που να απέχουν ανά δύο απόσταση ίση με $\sqrt{2}$. Θεωρούμε λοιπόν μια ορθοκανονική ακολουθία $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ του H (η διάταξη των στοιχείων της βάσης είναι τυχούσα) η οποία να είναι μεγιστική, δηλαδή να μην περιέχεται γνήσια σε κάποια άλλη. Αυτό γίνεται με χρήση του λήμματος του Zorn. Τότε, ο υπόχωρος $span\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνός στον H (αλλιώς, θα μπορούσαμε να βρούμε μοναδιαίο $z \perp e_k$ για κάθε k, και η (e_k) δεν θα ήταν μεγιστική). Άρα, η (e_k) είναι ορθοκανονική βάση του H. ⊣

Λήμμα 7.1.14. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω (e_n) ορθοκανονική ακολουθία στον X. Για κάθε $x \in H$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$,*

$$d(x, span\{e_1, \ldots, e_n\}) = \Big\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \Big\|. \tag{7.1.3.3}$$

Απόδειξη. Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ και $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \Big\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \Big\|^2 &= \Big\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k + \sum_{k=1}^{n} (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \Big\|^2 \\ &= \Big\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \Big\|^2 + \Big\| \sum_{k=1}^{n} (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \Big\|^2 \end{aligned}$$

$$= \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - \langle x, e_k \rangle|^2$$

(χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το $x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$ είναι κάθετο σε όλα τα e_k, άρα και στο $\sum_{k=1}^{n} (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k$, οπότε εφαρμόσαμε το Πυθαγόρειο θεώρημα γι' αυτά τα δύο διανύσματα). Άρα,

(7.1.3.4)
$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|^2 \geqslant \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2$$

και ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο αν $\lambda_k = \langle x, e_k \rangle$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, δηλαδή αν $y = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$. $\boxed{+}$

Σημείωση. Παρατηρήστε επίσης ότι

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 \\ &= \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

Το επόμενο θεώρημα δίνει ισοδύναμους χαρακτηρισμούς του ότι η (e_n) είναι ορθοκανονική βάση.

Θεώρημα 7.1.15. *Έστω (e_k) ορθοκανονική ακολουθία σε έναν χώρο Hilbert H. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) Η (e_k) είναι ορθοκανονική βάση του H.

(β) Αν $x \in H$ και $\langle x, e_k \rangle = 0$ για κάθε k, τότε $x = 0$.

(γ) Αν $x \in H$ και $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$, τότε $s_n(x) \to x$. Δηλαδή,

(7.1.3.5)
$$x = \sum_{k} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

(δ) Ισχύει η ισότητα του Parseval: για κάθε $x \in H$,

(7.1.3.6)
$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2.$$

Απόδειξη. (α) $\Longrightarrow$ (β) Έστω $x \in H$. Αφού ο $F = span\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνός, υπάρχει ακολουθία $(y_n) \in F$ με $y_n \to x$. Από την υπόθεση έχουμε $x \perp y$ για κάθε $y \in F$. Τότε, $0 = \langle x, y_n \rangle \to \langle x, x \rangle$. Άρα, $\langle x, x \rangle = 0$, το οποίο σημαίνει ότι $x = 0$.

(β) $\Longrightarrow$ (γ) Παρατηρούμε πρώτα ότι $x - s_n(x) \perp s_n(x)$: πράγματι,

(7.1.3.7)
$$\langle x, s_n(x) \rangle = \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|s_n(x)\|^2 = \langle s_n(x), s_n(x) \rangle.$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε

(7.1.3.8) $$\|x\|^2 = \|x - s_n(x)\|^2 + \|s_n(x)\|^2 = \|x - s_n(x)\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2.$$

Συνεπώς. $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$ για κάθε n, και αφήνοντας το $n \to \infty$ παίρνουμε την ανισότητα Bessel

(7.1.3.9) $$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Ειδικότερα, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2$ συγκλίνει, και από την

(7.1.3.10) $$\|s_m(x) - s_n(x)\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |\langle x, e_k\rangle|^2$$

η οποία ισχύει για κάθε $m > n$, έπεται ότι η $\{s_n(x)\}$ είναι ακολουθία Cauchy. Αφού ο H είναι πλήρης, υπάρχει $y \in H$ ώστε $s_n(x) \to y$. Από την σύγκλιση αυτή βλέπουμε ότι $\langle x - y, e_k\rangle = 0$ για κάθε k, και η υπόθεσή μας (το (β)) εξασφαλίζει ότι

(7.1.3.11) $$x = y = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k.$$

(γ) $\Longrightarrow$ (δ) Έστω $x \in H$. Ελέγξαμε ότι $\|x\|^2 = \|x - s_n(x)\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2$ για κάθε n.

Αφού $\|x - s_n(x)\| \to 0$, έπεται ότι

(7.1.3.12) $$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x\|^2.$$

(δ) $\Longrightarrow$ (α) Έστω $x \in H$. Ελέγξαμε ότι $\|x\|^2 = \|x - s_n(x)\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2$ για κάθε n.

Αφού $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \to \|x\|^2$, έπεται ότι $\|x - s_n(x)\| \to 0$. Δηλαδή, $s_n(x) \to x$.

Αφού κάθε $s_n(x) \in span\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$, έπεται ότι

(7.1.3.13) $$H = \overline{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Δηλαδή, η $\{e_k\}$ είναι ορθοκανονική βάση του H.

$\boxed{+}$

7.2 Σύγκλιση στον $L_2(\mathbb{T})$

Εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου στην L_2-σύγκλιση των σειρών Fourier. Το ερώτημα είναι αν για κάθε $f \in L_2(\mathbb{T})$ ισχύει

(7.2.0.14) $$\|s_n(f) - f\|_2 \to 0 \text{ καθώς το } n \to \infty.$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο $L^2(\mathbb{T})$ είναι χώρος Hilbert. Η $\|\cdot\|_2$ επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο

(7.2.0.15) $$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Λήμμα 7.2.1. *Η ακολουθία $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι ορθοκανονική βάση στον $L^2(\mathbb{T})$.*

Απόδειξη. Έχουμε δεί ότι

(7.2.0.16) $$\langle e^{ikx}, e^{isx}\rangle = \delta_{k,s}$$

για κάθε $k, s \in \mathbb{Z}$, και από το Θεώρημα 6.3.10 έχουμε ότι αν $f \in L^2(\mathbb{T})$ και $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $f \equiv 0$. Ισοδύναμα, αν $\langle f, e^{ikx}\rangle = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ τότε $f = 0$. Το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα 7.1.15.

$\boxed{+}$

Άμεσο πόρισμα της γενικής θεωρίας των χώρων Hilbert είναι τώρα το εξής.

Θεώρημα 7.2.2. *Έστω $f \in L_2(\mathbb{T})$. Τότε,*

(7.2.0.17) $$\|s_n(f) - f\|_2 \to 0 \text{ καθώς το } n \to \infty$$

και

(7.2.0.18) $$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2.$$

Παρατήρηση 7.2.3. *Στην απόδειξη της $\|f\|_2^2 = \|f - s_n(f)\|_2^2 + \|s_n(f)\|_2^2$ χρησιμοποιήθηκε μόνο το γεγονός ότι το $\{e^{ik\theta} : |k| \leqslant n\}$ είναι ορθοκανονικό. Με το ίδιο επιχείρημα μπορείτε εύκολα να ελέγξετε ότι: αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε ορθοκανονικό σύνολο $E = \{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ συναρτήσεων στον $L_2(\mathbb{T})$ και αν, για τυχόν n, θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f_n = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k$, τότε*

(7.2.0.19) $$\|f\|_2^2 = \|f - f_n\|_2^2 + \|f_n\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2.$$

Συνεπώς,

(7.2.0.20) $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 \leqslant \|f\|_2^2,$$

για κάθε ορθοκανονικό σύνολο $E = \{e_k : k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{R}$. Αυτή είναι η (γενική) **ανισότητα του Bessel**. *Ισότητα στην ανισότητα του Bessel ισχύει για κάθε $f \in L_2(\mathbb{T})$, ακριβώς όταν το E είναι ορθοκανονική βάση του $L_2(\mathbb{T})$, δηλαδή*

(7.2.0.21) $$\lim_{n\to\infty}\left\| f - \sum_{k=-n}^{n}\langle f, e_k\rangle e_k\right\|_2 = 0$$

για κάθε $f \in L_2(\mathbb{T})$.

Θεώρημα 7.2.4 (Riesz-Fisher). *Ο $L_2(\mathbb{T})$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\ell_2(\mathbb{Z})$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $T : L_2(\mathbb{T}) \to \ell_2(\mathbb{Z})$ με

(7.2.0.22) $$T(f) = \{\widehat{f}(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}.$$

Ο T είναι καλά ορισμένος, γιατί

(7.2.0.23) $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = \|f\|_2^2 < +\infty$$

από την ταυτότητα του Parseval, άρα $T(f) \in \ell_2(\mathbb{Z})$. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα.

Η ταυτότητα του Parseval δείχνει επιπλέον ότι

(7.2.0.24) $$\|T(f)\|_{\ell_2(\mathbb{Z}} = \|f\|_2$$

για κάθε $f \in L_2(\mathbb{T})$, άρα ο T είναι ισομετρία (ειδικότερα, είναι ένα προς ένα).

Δείχνουμε τέλος ότι ο T είναι επί: έστω $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \ell_2(\mathbb{Z})$. Ορίζουμε $f_N(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} a_k e^{ikx}$.

Τότε, αν $N > M$ έχουμε

(7.2.0.25) $$\|f_N - f_M\|_2^2 = \sum_{k=M+1}^{N} a_k^2 \to 0$$

καθώς $N, M \to \infty$, και αυτό δείχνει ότι η (f_N) είναι ακολουθία Cauchy στον $L_2(\mathbb{T})$. Ο $L_2(\mathbb{T})$ είναι πλήρης, άρα υπάρχει $f \in L_2(\mathbb{T})$ ώστε $f_N \to f$. Αφού

(7.2.0.26) $$\|f - f_N\|_1 \leqslant \|f - f_N\|_2 \to 0,$$

είναι εύκολο να δούμε (άσκηση του Κεφαλαίου 5) ότι

(7.2.0.27) $$(\widehat{f_N})(k) \to \widehat{f}(k)$$

(και μάλιστα ομοιόμορφα ως προς k). Όμως, για κάθε $N > |k|$ ισχύει $\widehat{f}(k) = a_k$, από τον ορισμό των f_N. Συνεπώς,

(7.2.0.28) $$\widehat{f}(k) = a_k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $T(f) = \{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$.

$\boxed{+}$

Παρατήρηση 7.2.5. *Άμεση συνέπεια της ταυτότητας του Parseval είναι το Λήμμα Riemann-Lebesgue για τον $L_2(\mathbb{T})$. Για κάθε $f \in L_2(\mathbb{T})$ έχουμε*

(7.2.0.29) $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 < +\infty,$$

άρα

(7.2.0.30) $$\lim_{|k|\to\infty} \widehat{f}(k) = 0.$$

Συχνά, χρησιμοποιούμε το Λήμμα Riemann-Lebesgue στην εξής μορφή: αν η $f \in L_2(\mathbb{T})$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε

$$a_k(f) = \int_{\mathbb{T}} f(x)\,\sigma\upsilon\nu(kx)\,d\lambda(x) \to 0 \quad \textit{και} \quad b_k(f) = \int_{\mathbb{T}} f(x)\,\eta\mu(kx)\,d\lambda(x) \to 0 \tag{7.2.0.31}$$

όταν $k \to \infty$. Από τις σχέσεις που συνδέουν τους $\widehat{f}(k)$, $a_k(f)$ και $b_k(f)$, ελέγχουμε εύκολα ότι η πρόταση «$a_k(f) \to 0$ και $b_k(f) \to 0$ όταν $k \to \infty$» είναι ακριβώς ισοδύναμη με την «$\widehat{f}(k) \to 0$ όταν $|k| \to \infty$» (εξηγήστε γιατί).

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μια γενίκευση της ταυτότητας του Parseval.

Πρόταση 7.2.6. *Έστω $f, g \in L_2(\mathbb{T})$. Τότε,*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{g(x)}\,d\lambda(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}. \tag{7.2.0.32}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε την παρατήρηση ότι αν X είναι ένας γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$ με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$, τότε

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right]. \tag{7.2.0.33}$$

Έχουμε

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{4}\left[\|f+g\|_2^2 - \|f-g\|_2^2 + i\|f+ig\|_2^2 - i\|f-ig\|_2^2\right] \tag{7.2.0.34}$$

και

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)} = \frac{1}{4}\left[\|\widehat{f}(k)+\widehat{g}(k)\|^2 - \|\widehat{f}(k)-\widehat{g}(k)\|^2 + i\|\widehat{f}(k)+i\widehat{g}(k)\|^2 - i\|\widehat{f}(k)-i\widehat{g}(k)\|^2\right]. \tag{7.2.0.35}$$

Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα, αν εφαρμόσουμε την ταυτότητα του Parseval για τις $f+g$, $f-g$, $f+ig$ και $f-ig$.

$\dashv$