



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αρμονική Ανάλυση

Ενότητα: Ολοκλήρωμα Riemann και ολοκλήρωμα Lebesgue - Ασκήσεις

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Περιεχόμενα ενότητας

3	Ολοκλήρωμα Riemann και ολοκλήρωμα Lebesgue -	
	Ασκήσεις	4
3.1	Ομάδα Α'	4
3.2	Ομάδα Β'	6

3 Ολοκλήρωμα Riemann και ολοκλήρωμα Lebesgue - Ασκήσεις

3.1 Ομάδα Α΄

1. Αποδείξτε το Λήμμα 3.3.4.

2. (α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\phi(x) = x \eta\mu \frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $\phi(0) = 0$ είναι συνεχής αλλά έχει άπειρη κύμανση.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\psi(x) = x^2 \eta\mu \frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $\psi(0) = 0$ έχει φραγμένη κύμανση.

3. (α) Έστω (ϕ_n) ακολουθία συναρτήσεων που ορίζονται στο $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι κάθε ϕ_n έχει φραγμένη κύμανση και ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $V(\phi_n | a, b) \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $\phi_n \rightarrow \phi$ κατά σημείο, δείξτε ότι η ϕ έχει φραγμένη κύμανση και $V(\phi | a, b) \leq M$.

(β) Η υπόθεση $V(\phi_n | a, b) \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ στο (α) είναι ουσιαστική. Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$\phi_n(x) = \begin{cases} x \eta\mu \frac{1}{x}, & x \geq \frac{1}{2n\pi} \\ 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2n\pi} \end{cases}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση ϕ της Άσκησης 2(α) και ότι κάθε ϕ_n έχει φραγμένη κύμανση (ενώ η ϕ όχι).

4. Έστω (ϕ_n) ακολουθία συναρτήσεων που ορίζονται στο $[a, b]$ και έχουν φραγμένη κύμανση. Αν $\phi_n \rightarrow \phi$ κατά σημείο, δείξτε ότι

$$V(\phi | a, b) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} V(\phi_n | a, b).$$

(Υπόδειξη για τις Ασκήσεις 3 και 4: Δείξτε ότι $V(\phi_n, P) \rightarrow V(\phi, P)$ για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$.)

5. Έστω $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε: για κάθε $\varepsilon > 0$, $V(\phi | a + \varepsilon, b) \leq M$.

(α) Δείξτε ότι $V(\phi | a, b) < +\infty$.

(β) Ποιά επιπλέον υπόθεση για την ϕ μας εξασφαλίζει ότι $V(\phi | a, b) \leq M$;

6. Θεωρούμε τη συνάρτηση $I(x) = 0$ αν $x < 0$ και $I(x) = 1$ αν $x \geq 0$. Έστω (c_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < +\infty$ και έστω (x_n) ακολουθία διαφορετικών ανά δύο σημείων του $(a, b]$. Αν

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - x_n), \quad x \in [a, b]$$

δείξτε ότι $\phi \in BV[a, b]$ και

$$V(\phi | a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|.$$

7. Έστω $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και κατά τμήματα μονότονη συνάρτηση. Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $N(y)$ το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\phi(x) = y$ στο $[a, b]$. Αν $m = \min\{\phi(x) : a \leq x \leq b\}$ και $M = \max\{\phi(x) : a \leq x \leq b\}$, δείξτε ότι

$$V(\phi | a, b) = \int_m^M N(y) d\lambda(y).$$

8. Βρείτε, αν υπάρχει, συνεχή συνάρτηση $\phi \in BV[a, b]$ η οποία δεν είναι Lipschitz συνεχής.

9. Έστω $a, b > 0$. Ορίζουμε

$$f(x) = \begin{cases} x^a \eta\mu(x^{-b}), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Δείξτε ότι η f έχει φραγμένη κύμανση στο $[0, 1]$ αν και μόνο αν $a > b$. Παίρνοντας $a = b$, κατασκευάστε (για κάθε $0 < \alpha < 1$) μια συνάρτηση που ικανοποιεί την Lipschitz συνθήκη τάξης α

$$|f(x) - f(y)| \leq A|x - y|^\alpha$$

για κάποια σταθερά $A > 0$, αλλά δεν έχει φραγμένη κύμανση.

10. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^2 \eta\mu(1/x^2)$, $x \neq 0$, και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι η $f'(x)$ υπάρχει για κάθε x , αλλά η f' δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[-1, 1]$.

11. Δείξτε (με βάση τον ορισμό) ότι η συνάρτηση Cantor-Lebesgue δεν είναι απολύτως συνεχής.

12. Έστω $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η

$$D^+(g)(x) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

13. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ απολύτως συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι:

(α) Η f απεικονίζει σύνολα μέτρου μηδέν σε σύνολα μέτρου μηδέν.

(β) Η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα.

14. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ απολύτως συνεχής, αύξουσα συνάρτηση με $f(a) = A$ και $f(b) = B$. Έστω $g : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι η $g(f(x))f'(x)$ είναι μετρήσιμη στο $[a, b]$.

(β) Δείξτε ότι αν η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[A, B]$ τότε η $g(f(x))f'(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_A^B g(y) d\lambda(y) = \int_a^b g(f(x))f'(x) d\lambda(x).$$

15. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ απολύτως συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι η fg είναι απολύτως συνεχής, και

$$\int_a^b f'(x)g(x)d\lambda(x) = - \int_a^b f(x)g'(x)d\lambda(x) + f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

3.2 Ομάδα Β'

16. Έστω $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ μη μηδενική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε

$$f^*(x) \geq \frac{c}{|x|^d} \quad \text{για κάθε } |x| \geq 1,$$

και συμπεράνετε ότι η f^* δεν είναι ολοκληρώσιμη.

17. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{1}{|x|(\log_{10} 1/|x|)^2} \quad \text{αν } |x| \leq 1/2$$

και $f(x) = 0$ αλλιώς. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Δείξτε επίσης ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε

$$f^*(x) \geq \frac{c}{|x|(\log_{10} 1/|x|)} \quad \text{για κάθε } |x| \leq 1/2,$$

και συμπεράνετε ότι η f^* δεν είναι τοπικά ολοκληρώσιμη.

18. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μη μηδενική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε

$$f_+^*(x) = \sup_{h>0} \int_x^{x+h} |f(y)| d\lambda(y).$$

Για κάθε $\alpha > 0$ θέτουμε $E_\alpha^+ = \{x \in \mathbb{R} : f_+^*(x) > \alpha\}$. Δείξτε ότι

$$\lambda(E_\alpha^+) = \frac{1}{\alpha} \int_{E_\alpha^+} |f(y)| d\lambda(y).$$

(Υπόδειξη. Εφαρμόστε το λήμμα του ανατέλλοντος ηλίου για την $F(x) = \int_a^x |f(y)| d\lambda(y) - \alpha x$.)

19. Έστω F κλειστό υποσύνολο του \mathbb{R} . Θεωρούμε την συνάρτηση

$$\delta(x) = d(x, F) = \inf\{|x - y| : y \in F\}.$$

Ελέγξτε ότι $\delta(x + y) \leq |y|$ για κάθε $x \in F$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι, ισχυρότερα, ισχύει το εξής:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\delta(x + y)}{|y|} = 0 \quad \text{σχεδόν για κάθε } x \in F.$$

20. Κατασκευάστε μια αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: η f είναι ασυνεχής στο x αν και μόνο αν $x \in \mathbb{Q}$.

21. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $D^+(f)(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι η f είναι αύξουσα.

22. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν η $f'(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in (a, b)$ και $|f'(x)| \leq M$, δείξτε ότι $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ για κάθε $x, y \in [a, b]$ και ότι η f είναι απολύτως συνεχής.

23. Έστω $E \subset \mathbb{R}^d$ με $\lambda(E) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει μη αρνητική ολοκληρώσιμη $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\liminf_{\substack{\lambda(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y) d\lambda(y) = \infty$$

για κάθε $x \in E$.

23. Έστω $E \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(E) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει αύξουσα, απολύτως συνεχής $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $D_+(f)(x) = D_-(f)(x) = \infty$ για κάθε $x \in E$.

24. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

για κάποια σταθερά $M > 0$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν η f είναι απολύτως συνεχής και $|f'(x)| \leq M$ σχεδόν για κάθε x .

25. Έστω $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αποδείξτε τα εξής:

(α) Η f είναι συνεχής.

(β) Η f είναι Lipschitz συνεχής, άρα και απολύτως συνεχής, σε κάθε κλειστό διάστημα $[\gamma, \delta] \subset (a, b)$.

(γ) Η $f'(x)$ υπάρχει σε όλα, εκτός από αριθμήσιμα το πλήθος, τα $x \in (a, b)$, η $f' = D^+(f)$ είναι ολοκληρώσιμη, και

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t) d\lambda(t)$$

για κάθε $x < y$ στο (a, b) .

(δ) Αντίστροφα, αν η $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αύξουσα, τότε για κάθε $\gamma \in (a, b)$ η $f(x) = \int_\gamma^x g(t) d\lambda(t)$ είναι κυρτή συνάρτηση στο (a, b) .

26. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η $f'(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in (a, b)$ και η f' είναι ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι η f είναι απολύτως συνεχής και

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) d\lambda(x).$$