



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αρμονική Ανάλυση

Ενότητα: Ολοκλήρωμα Lebesgue - Ασκήσεις

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Περιεχόμενα ενότητας

1	Ολοκλήρωμα Lebesgue - Ασκήσεις	4
1.1	Ομάδα Α	4
1.2	Ομάδα Β'	19

1 Ολοκλήρωμα Lebesgue - Ασκήσεις

1.1 Ομάδα Α

1. Αν η $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, τότε η f' είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = n[f(x + 1/n) - f(x)]$. Εφόσον, η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in (a, b)$ ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f'(x)$. Κάθε f_n είναι μετρήσιμη οπότε η f' είναι μετρήσιμη.

2. (α) Αν $A \subseteq \mathbb{R}^d$ με $\lambda(A) = 0$, δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f : A \rightarrow [-\infty, +\infty]$ είναι μετρήσιμη.

(β) Έστω A, B μετρήσιμα σύνολα με $\lambda(B) = 0$ και έστω $f : A \cup B \rightarrow [-\infty, +\infty]$ μια συνάρτηση της οποίας ο περιορισμός $f|_A$ στο A είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

(γ) Αν το $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι μετρήσιμο σύνολο και η $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής σχεδόν παντού στο A , δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. (α) Άμεσο αφού κάθε υποσύνολο μηδενικού συνόλου είναι μετρήσιμο.

(β) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$[f > a] = \{x \in A \cup B : f(x) > a\} = \{x \in B : f(x) > a\} \cup \{x \in A : f(x) > a\}.$$

Το πρώτο σύνολο στην προηγούμενη ένωση είναι μετρήσιμο ως υποσύνολο μηδενικού συνόλου ενώ το δεύτερο είναι μετρήσιμο διότι η $f|_A$ είναι μετρήσιμη.

(γ) Έστω $C = C(f)$ το σύνολο των σημείων συνέχειας της f . Τότε, το $B = A \setminus C$ είναι μηδενικό σύνολο αφού η f είναι συνεχής σχεδόν παντού. Καθώς, κάθε συνεχής συνάρτηση είναι μετρήσιμη, το συμπέρασμα έπεται από το (β).

3. (α) Δώστε παράδειγμα μη μετρήσιμης συνάρτησης f με την ιδιότητα η f^2 να είναι μετρήσιμη.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ μετρήσιμο και έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f^2 είναι μετρήσιμη και το σύνολο $\{x \in A : f(x) > 0\}$ είναι μετρήσιμο, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε το μη μετρήσιμο σύνολο V του Vitali στο $[0, 1]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = 1$ αν $x \in V$ και -1 αλλιώς. Τότε, η f δεν είναι μετρήσιμη, αλλά η f^2 είναι η σταθερή 1 κι άρα είναι μετρήσιμη.

(β) Παρατηρήστε ότι το σύνολο $A_2 = \{x \in A \mid f(x) \leq 0\}$ είναι επίσης μετρήσιμο, αφού το $A_1 = \{x \in A \mid f(x) > 0\}$ είναι μετρήσιμο. Έστω $b \in \mathbb{R}$. Αν $b \leq 0$. Τότε, $[f \leq b] = [f^2 \geq b^2] \cap A_2$ το οποίο είναι μετρήσιμο. Αν $b > 0$ τότε

$$[f \leq b] = (A_1 \cap [f^2 \leq b^2]) \cup A_2$$

το οποίο είναι μετρήσιμο, ως πράξεις τέτοιων.

4. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ μετρήσιμο και $f_n : A \rightarrow [-\infty, +\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο

$$L = \{x \in A \mid \text{η ακολουθία } (f_n(x))_{n=1}^{\infty} \text{ συγκλίνει}\}$$

είναι μετρήσιμο.

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις $g(x) = \liminf f_n(x)$ και $h(x) = \limsup f_n(x)$ είναι μετρήσιμες. Τότε, το L γράφεται ως $L = [g = h] = \{x \in A \mid g(x) = h(x)\}$, το οποίο είναι μετρήσιμο.

5. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του \mathbb{R}^d και έστω $f : A \rightarrow [-\infty, +\infty]$ συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $q \in \mathbb{Q}$, το σύνολο $\{x \in A : f(x) > q\}$ είναι μετρήσιμο. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Λόγω της πυκνότητας του \mathbb{Q} υπάρχει (q_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία ρητών ώστε $q_n \rightarrow a$. Τότε,

$$\{x \in A \mid f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A \mid f(x) > q_n\}.$$

Επειδή κάθε $\{x \in A \mid f(x) > q_n\}$ είναι μετρήσιμο έπεται ότι το $[f \geq a]$ είναι μετρήσιμο. Καθώς το $a \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, το ζητούμενο έπεται.

6. Έστω $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν το $B \subseteq \mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel, τότε το $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \in B\}$ είναι μετρήσιμο.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την κλάση $\mathcal{A} = \{B \subseteq \mathbb{R} \mid f^{-1}(B) \text{ μετρήσιμο}\}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η σ -άλγεβρα των Borel του \mathbb{R} περιέχεται στην \mathcal{A} . Γι' αυτό δείχνουμε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η \mathcal{A} είναι σ -άλγεβρα: Πράγματι $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ μετρήσιμο, επομένως $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$. Αν $B \in \mathcal{A}$ τότε $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus B) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(B)$ και εφόσον το $B \in \mathcal{A}$ έπεται ότι το $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(B)$ είναι μετρήσιμο. Τέλος, αν $\{B_n\}$ ακολουθία στην \mathcal{A} , τότε $f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)$ είναι μετρήσιμο αφού κάθε $f^{-1}(B_n)$ είναι μετρήσιμο.

(ii) Δείχνουμε ότι η \mathcal{A} περιέχει τα ανοικτά: Αφού f μετρήσιμη το $f^{-1}((a, b)) = [f < b] \cap [f > a]$ είναι μετρήσιμο, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Δηλαδή, $(a, b) \in \mathcal{A}$. Όμως κάθε ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R} γράφεται ως αριθμήσιμη (ξένη) ένωση ανοικτών διαστημάτων κι εφόσον η \mathcal{A} είναι σ -άλγεβρα προκύπτει ότι περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του \mathbb{R} .

Από τον ορισμό των Borel έπεται ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

7. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του \mathbb{R} με $\lambda(A) < \infty$ και έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $\omega_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\omega_f(t) = \lambda(\{x \in A : f(x) > t\}).$$

(α) Δείξτε ότι η ω_f είναι φθίνουσα και συνεχής από δεξιά. Σε ποιά σημεία είναι ασυνεχής;

(β) Αν οι $f_k, f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμες και $f_k \uparrow f$, δείξτε ότι $\omega_{f_k} \uparrow \omega_f$.

Υπόδειξη. (α) Είναι προφανές ότι η ω_f είναι φθίνουσα. Για να δείξουμε ότι είναι δεξιά συνεχής, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $t_n \downarrow t$ ισχύει $\omega_f(t_n) \rightarrow \omega_f(t)$. Ορίζουμε $A_n = \{x \in A : f(x) > t_n\}$. Τότε, $A_n \subseteq A_{n+1}$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in A : f(x) > t\}$. Επομένως, από την ιδιότητα του μέτρου παίρνουμε:

$$\omega_f(t) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_f(t_n),$$

που αποδεικνύει την δεξιά συνέχεια της f .

Η ω_f είναι συνεχής αν και μόνον αν είναι συνεχής από τα αριστερά. Ισοδύναμα, αν για κάθε (t_n) με $t_n \uparrow t$ ισχύει $\omega_f(t_n) \rightarrow \omega_f(t)$. Δείχνουμε όπως πριν ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_f(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(x \in A : f(x) > t_n) = \lambda(x \in A : f(x) \geq t),$$

όπου εδώ χρησιμοποιούμε την υποθέση $\lambda(A) < \infty$. Επομένως, η ω_f είναι αριστερά συνεχής αν και μόνον αν

$$\lambda(x \in A : f(x) > t) = \lambda(x \in A : f(x) \geq t) \stackrel{\lambda(A) < \infty}{\iff} \lambda(x \in A : f(x) = t) = 0.$$

Μ' άλλα λόγια η ω_f είναι συνεχής στο t αν και μόνον αν $\lambda(f^{-1}(\{t\})) = 0$.

(β) Είναι προφανές ότι για κάθε t έχουμε $\omega_{f_k}(t) \leq \omega_{f_{k+1}}(t)$. Έστω $t \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $B_k = \{x \in A : f_k(x) > t\}$. Τότε, $B_k \subseteq B_{k+1}$ και $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \{x \in A : f(x) > t\}$. Άρα, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \omega_{f_k}(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(x \in A : f_k(x) > t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(B_k) \\ &= \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lambda(x \in A : f(x) > t) = \omega_f(t). \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

8. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του \mathbb{R} , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι η $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε, $A = g^{-1}((a, +\infty))$ είναι διάστημα της μορφής $[b, +\infty)$ ή (b, ∞) αφού η g είναι αύξουσα. Επομένως, το $(g \circ f)^{-1}((a, +\infty)) = f^{-1}(A)$ είναι μετρήσιμο, αφού η f είναι μετρήσιμη.

9. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $F : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ με $F(t) = \lambda(\{f > t\})$. Δείξτε ότι η F είναι φθίνουσα, συνεχής από δεξιά, και $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 0$.

Υπόδειξη. Για κάθε $t > s \geq 0$ έχουμε $\{f > t\} \subseteq \{f > s\}$. Συνεπώς,

$$F(t) = \lambda(\{f > t\}) \leq \lambda(\{f > s\}) = F(s).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η F είναι φθίνουσα. Για να δείξουμε ότι η F είναι συνεχής από δεξιά, αρκεί να δείξουμε ότι: για κάθε $t \geq 0$ και για κάθε γνησίως φθίνουσα ακολουθία $t_n \rightarrow t$ ισχύει $F(t_n) \rightarrow F(t)$ (γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό). Όμως,

$$\{f > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f > t_n\}.$$

Πράγματι, είναι προφανές ότι αν για κάποιον n ισχύει $f(x) > t_n$ τότε $f(x) > t$, ενώ αντίστροφα, αν $f(x) > t$, από το γεγονός ότι $t_n \rightarrow t$ έπεται ότι υπάρχει n ώστε $f(x) > t_n > t$. Έχουμε επίσης υποθέσει ότι η (t_n) είναι φθίνουσα, άρα $\{f > t_n\} \subseteq \{f > t_{n+1}\}$ για κάθε n . Δηλαδή, η $(\{f > t_n\})_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Έπεται ότι

$$F(t) = \lambda(\{f > t\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\{f > t_n\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(t_n).$$

Τέλος, για κάθε $t > 0$, από την ανισότητα του Markov έχουμε

$$tF(t) = t \lambda(\{f > t\}) \leq \int f.$$

Άρα,

$$F(t) \leq \frac{1}{t} \int f,$$

και αυτό δείχνει ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0$.

10. Υποθέτουμε ότι f και f_n , $n \in \mathbb{N}$, είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, $f_n \searrow f$, και υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\int f_k < \infty$. Δείξτε ότι

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $\{f_k - f_n\}_{n=k}^{\infty}$. Αφού η $\{f_n\}$ είναι φθίνουσα, συμπεραίνουμε ότι η $\{f_k - f_n\}_{n=k}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Αφού $f_n \searrow f$, έχουμε $f_k - f_n \nearrow f_k - f$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int (f_k - f_n) \rightarrow \int (f_k - f).$$

Παρατηρήστε ότι $0 \leq f_k - f \leq f_k$, άρα

$$\int (f_k - f_n) \leq \int (f_k - f) \leq \int f_k < \infty$$

για κάθε n . Δηλαδή, η $f_k - f$ και όλες οι $f_k - f_n$ είναι ολοκληρώσιμες. Από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος,

$$\int f_n = \int f_k - \int (f_k - f_n) \rightarrow \int f_k - \int (f_k - f) = \int f.$$

11. Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f > 0$ σ.π. Αν $\int_E f = 0$ για κάποιο μετρήσιμο σύνολο E , δείξτε ότι $\lambda(E) = 0$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f > 0$ παντού στο E , δηλαδή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in E$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $E_n = \{x \in E : f(x) > 1/n\}$. Παρατηρήστε ότι

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

διότι $f(x) > 0$ αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f(x) > 1/n$. Από την ανισότητα του Markov,

$$\frac{1}{n} \lambda(E_n) \leq \int_{E_n} f \leq \int_E f = 0,$$

άρα $\lambda(E_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$\lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = 0.$$

Αυτό το επιχείρημα καλύπτει και την περίπτωση όπου $f > 0$ σ.π.: αν $Z = \{x \in E : f(x) = 0\}$ τότε $\lambda(Z) = 0$ και $\int_{E \setminus Z} f = 0$. Μπορούμε λοιπόν να δουλέψουμε με το $E \setminus Z$: αν δείξουμε ότι $\lambda(E \setminus Z) = 0$, θα έχουμε και $\lambda(E) = 0$.

12. Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{f \geq 1/n\}} f.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{[-n,n]}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα και, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε τελικά $x \in [-n, n]$ άρα $g_n(x) = f(x) \rightarrow f(x)$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{-n}^n f = \int f \chi_{[-n,n]} = \int g_n \rightarrow \int f.$$

Για το δεύτερο ερώτημα, ορίζουμε $h_n(x) = f(x)\chi_{\{f \geq 1/n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{h_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{f \geq 1/n\} \subseteq \{f \geq 1/(n+1)\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ έχουμε τελικά $f(x) \geq 1/n$ άρα $h_n(x) = f(x) \rightarrow f(x)$, ενώ αν $f(x) = 0$ έχουμε $h_n(x) = 0$ για κάθε n , οπότε πάλι $h_n(x) \rightarrow 0 = f(x)$ (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες). Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{f \geq 1/n\}} f = \int f \chi_{\{f \geq 1/n\}} = \int h_n \rightarrow \int f.$$

13. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{f \leq n\}} f.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{\{f \leq n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{f \leq n\} \subseteq \{f \leq n+1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) < \infty$ έχουμε τελικά $f(x) \leq n$ άρα $g_n(x) = f(x) \rightarrow f(x)$. Δηλαδή, αν $E = \{f < \infty\}$, έχουμε $g_n \chi_E \nearrow f \chi_E$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{f \leq n\}} f = \int f \chi_{\{f \leq n\}} = \int g_n = \int g_n \chi_E \rightarrow \int f \chi_E.$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, γνωρίζουμε ότι $\lambda(E^c) = 0$ και $\int f \chi_{E^c} = 0$. Έπεται ότι

$$\int f = \int f \chi_E + \int f \chi_{E^c} = \int f \chi_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{f \leq n\}} f.$$

14. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είναι σωστό ότι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$;

Υπόδειξη. Όχι. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$$

είναι σχεδόν παντού ίση με την μηδενική συνάρτηση. Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int f = 0$. Όμως, το $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ δεν υπάρχει: έχουμε

$$f(n) \rightarrow 1 \text{ και } f(-n) \rightarrow 1.$$

15. Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \lambda(\{f > 2^k\}) < \infty.$$

Υπόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε:

$$\int f, d\lambda = \int_0^{\infty} \lambda(f > t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2^{k-1}}^{2^k} \lambda(f > t) dt.$$

Επειδή η συνάρτηση $t \mapsto \lambda(f > t)$ είναι φθίνουσα η τελευταία σειρά είναι ισοδύναμη με την $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \lambda(f > 2^k)$ και το συμπέρασμα έπεται.

16. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο E με $\lambda(E) < \infty$, ώστε

$$\int_E f > \int f - \varepsilon.$$

Επιπλέον, δείξτε ότι το E μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε η f να είναι φραγμένη στο E .

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{\{1/n \leq f \leq n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{1/n \leq f \leq n\} \subseteq \{1/(n+1) \leq f \leq n+1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $0 < f(x) < \infty$ έχουμε τελικά $f(x) \geq 1/n$ και $f(x) \leq n$, άρα $g_n(x) = f(x) \rightarrow f(x)$, ενώ αν $f(x) = 0$ έχουμε $g_n(x) = 0$ για κάθε n , οπότε πάλι $g_n(x) \rightarrow 0 = f(x)$ (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες). Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{1/n \leq f \leq n\}} f = \int f \chi_{\{1/n \leq f \leq n\}} = \int g_n \rightarrow \int f.$$

Συνεπώς, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε, αν θέσουμε $E = \{1/n \leq f \leq n\}$ τότε

$$\int_E f > \int f - \varepsilon.$$

Παρατηρήστε ότι η f είναι φραγμένη (από n) στο E . Τέλος, από την ανισότητα του Markov,

$$\lambda(E) \leq \lambda(\{f \geq 1/n\}) \leq n \int f < +\infty.$$

17. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{-\infty}^x f$ είναι συνεχής.

Υπόδειξη. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Εύκολα βλέπουμε ότι $F(x) \leq F(y)$, δηλαδή η F είναι αύξουσα. Οπότε, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε μονότονη ακολουθία (x_n) με $x_n \rightarrow x$ ισχύει $F(x_n) \rightarrow F(x)$ (εξηγήστε γιατί). Υποθέτουμε ότι $x_n \downarrow x$ (όμοια αντιμετωπίζεται κι άλλη περίπτωση). Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g_n = f \chi_{(-\infty, x_n]}$ και $g = f \chi_{(-\infty, x]}$, οπότε $F(x_n) = \int f_n d\lambda$ και $F(x) = \int g d\lambda$. Επιπλέον, $g_n \rightarrow g$ κατά σημείο και $|g_n| \leq f$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε:

$$F(x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} f = \int g_n d\lambda \rightarrow \int g d\lambda = F(x).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η F είναι δεξιά συνεχής.

18. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\lambda(E) < \delta$ τότε $\int_E f < \varepsilon$.

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την συνάρτηση $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$. Παρατηρήστε ότι $f_n \leq n$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f$$

(εξηγήστε γιατί η $\{f_n\}$ είναι αύξουσα και $f_n \rightarrow f$). Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\int (f - f_n) = \int f - \int f_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \delta$. Γράφουμε

$$\int_E f = \int_E f_n + \int_E (f - f_n) \leq \int_E f_n + \int (f - f_n) \leq n\lambda(E) + \frac{\varepsilon}{2} < n\frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

19. Θεωρώντας τις συναρτήσεις $f_n = \chi_{[n, n+1]}$ δείξτε ότι στο Λήμμα του Fatou η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια.

Υπόδειξη. Αν $f_n = \chi_{[n, n+1]}$, τότε $f_n(x) \rightarrow 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$: παρατηρήστε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 > x$ και τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $x \notin [n, n+1)$, άρα $f_n(x) = \chi_{[n, n+1)}(x) = 0$. Έπεται ότι

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0,$$

ενώ $\int f_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n = 1.$$

20. Έστω (f_n) μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Είναι σωστό ότι

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n \leq \int \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n \right);$$

Αν προσθέσουμε την υπόθεση ότι η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη:

Υπόδειξη. Όχι. Αν $f_n = \frac{1}{n} \chi_{[0,n]}$, τότε $f_n(x) \rightarrow 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης, η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη ($0 \leq f_n \leq 1$). Παρατηρήστε ότι

$$\int \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0,$$

αλλά $\int f_n = \frac{1}{n} \lambda([0, n]) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n = 1.$$

21. Έστω f και $f_n, n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \leq f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \rightarrow f$. Δείξτε ότι

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

Υπόδειξη. Αφού $f_n \leq f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $\int f_n \leq \int f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n \leq \int f.$$

Από το Λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

Έπεται ότι

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f.$$

Άρα,

$$\int f_n \rightarrow \int f.$$

22. Έστω f και $f_n, n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \rightarrow f$ και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f < \infty.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n = \int_E f$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο E . Δώστε παράδειγμα που να δείχνει ότι αυτό δεν ισχύει αν $\int f = \infty$.

Υπόδειξη. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του \mathbb{R} . Από το Λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int_E f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n$$

και

$$\int_{E^c} f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{E^c} f_n$$

δηλαδή

$$\int f - \int_E f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int f_n - \int_E f_n \right).$$

Αφού

$$-\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\int f_n \right),$$

προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$-\int_E f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(-\int_E f_n \right) = -\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n.$$

Δηλαδή,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \leq \int_E f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n.$$

Συνεπώς,

$$\int_E f_n \rightarrow \int_E f.$$

23. Έστω (f_n) ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[a, b]$. Αν $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int_a^b |f_n - f| \rightarrow 0$.

Υπόδειξη. Η f είναι μετρήσιμη διότι $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Η σταθερή συνάρτηση ε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, οπότε, από την $|f| < |f_{n_0}| + \varepsilon$ έπεται ότι η $|f|$ (άρα και η f) είναι ολοκληρώσιμη. Τέλος, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \varepsilon(b - a).$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f.$$

24. Δείξτε ότι

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = 1.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n(x) = (1 - x/n)^n \chi_{[0,n]}(x)$ των μετρησίμων συναρτήσεων για την οποία ισχύει $|f_n(x)| \leq e^{-x} \chi_{[0,\infty)}(x)$. Παρατηρούμε ότι η $x \mapsto e^{-x} \chi_{[0,\infty)}(x)$ είναι ολοκληρώσιμη και $f_n(x) \rightarrow e^{-x} \chi_{[0,\infty)}(x)$ κατά σημείο. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται το συμπέρασμα.

25. Υπολογίστε το $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n (1 - (x/n))^n e^{x/2} dx$ (απολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n(x) = (1 - x/n)^n e^{x/2} \chi_{[0,n]}$, η οποία αποτελείται από μετρήσιμες συναρτήσεις με $|f_n(x)| \leq e^{-x/2} \chi_{[0,\infty)}$. Η συνάρτηση $g(x) = e^{-x/2} \chi_{[0,\infty)}$ είναι ολοκληρώσιμη, οπότε από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται ότι $\lim_n \int f_n = \int \lim_n f_n$. Αλλά, $\lim_n f_n(x) = 0$ για κάθε $x < 0$ ενώ αν $x \geq 0$ έχουμε

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \left[\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} \right] = e^{-x} e^{x/2} = e^{-x/2}.$$

Συνεπώς, έχουμε

$$\lim_n \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-x/2} dx = \int_0^{\infty} e^{-x/2} dx = 2,$$

που υπολογίζει το ζητούμενο όριο.

26. Έστω ότι οι f, f_n είναι ολοκληρώσιμες και $f_n \nearrow f$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\int f_n \rightarrow \int f$;

Υπόδειξη. Θεωρούμε τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $g_n := f - f_n$. Παρατηρήστε ότι $g_n \geq 0$, $g_n \geq g_{n+1}$ και $g_n \searrow 0$. Εφόσον, οι f, f_n είναι ολοκληρώσιμες και $\int g_1 < +\infty$ μπορούμε να γράψουμε (από το διϊκό του θεωρήματος μονότονης σύγκλισης - Άσκηση 10):

$$\int f - \lim_n \int f_n = \lim_n \left(\int f - \int f_n \right) = \lim_n \left(\int f - f_n \right) = \lim_n \int g_n = \int \lim_n g_n = 0,$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

27. Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες. Αν $\int |f_n - f| \rightarrow 0$, δείξτε ότι $\int f_n \rightarrow \int f$ και $\int |f_n| \rightarrow \int |f|$.

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\left| \int |f_n| - \int |f| \right| \leq \int ||f_n| - |f|| \leq \int |f_n - f| \rightarrow 0.$$

Άρα,

$$\int |f_n| \rightarrow \int |f|.$$

Με ανάλογο τρόπο,

$$\left| \int f_n - \int f \right| = \left| \int (f_n - f) \right| \leq \int |f_n - f| \rightarrow 0.$$

Άρα,

$$\int f_n \rightarrow \int f.$$

28. Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες. Αν $\int |f_n - f| \rightarrow 0$, δείξτε ότι $\int_E f_n \rightarrow \int_E f$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο E , και $\int f_n^+ \rightarrow \int f^+$.

Υπόδειξη. Έστω E μετρήσιμο σύνολο. Γράφουμε

$$\left| \int_E f_n - \int_E f \right| = \left| \int_E (f_n - f) \right| \leq \int_E |f_n - f| \leq \int |f_n - f| \rightarrow 0.$$

Άρα,

$$\int_E f_n \rightarrow \int_E f.$$

Για το δεύτερο ερώτημα χρησιμοποιούμε την Άσκηση 27. Με την υπόθεση ότι $\int |f_n - f| \rightarrow 0$, δείξαμε ότι $\int f_n \rightarrow \int f$ και $\int |f_n| \rightarrow \int |f|$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int f_n^+ &= \int \frac{f_n + |f_n|}{2} = \frac{1}{2} \int f_n + \frac{1}{2} \int |f_n| \rightarrow \frac{1}{2} \int f + \frac{1}{2} \int |f| \\ &= \int \frac{f + |f|}{2} = \int f^+. \end{aligned}$$

29. Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \lambda(\{|f| > 2^k\}) < \infty$.

Υπόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε το ολοκλήρωμα της f με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\int |f| d\lambda = \int_0^{\infty} \lambda(|f| > t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2^{k-1}}^{2^k} \lambda(|f| > t) dt.$$

Παρατηρήστε ότι η $t \mapsto \lambda(|f| > t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του $t > 0$, οπότε

$$2^{k-1} \lambda(|f| > 2^k) < \int_{2^{k-1}}^{2^k} \lambda(|f| > t) dt < 2^{k-1} \lambda(|f| > 2^{k-1}),$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Επομένως, το ολοκλήρωμα $\int |f| d\lambda$ είναι πεπερασμένο αν και μόνον αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \lambda(|f| > 2^k) < +\infty$.

30. Έστω $(f_n), (g_n)$ και g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $|f_n| \leq g_n, f_n \rightarrow f, g_n \rightarrow g$ (όλα αυτά σχεδόν παντού) και ότι $\int g_n \rightarrow \int g$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int f_n \rightarrow \int f$.

Υπόδειξη. Οι υποθέσεις εξασφαλίζουν ότι οι f, g και οι f_n, g_n παίρνουν πεπερασμένες τιμές σχεδόν παντού. Από την $|f_n| \leq g_n$ έχουμε $-g_n \leq f_n \leq g_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$f_n + g_n \geq 0 \quad \text{και} \quad g_n - f_n \geq 0.$$

Αφού $f_n + g_n \rightarrow f + g$ και $g_n - f_n \rightarrow g - f$, το Λήμμα του Φατου μας δίνει:

$$\int f + \int g = \int (f + g) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (f_n + g_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n + \int g$$

(χρησιμοποιήσαμε την $\int g_n \rightarrow \int g$). Άρα,

$$\int f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

Πάλι από το Λήμμα του Φατου,

$$\int g - \int f = \int (g - f) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (g_n - f_n) = \int g - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n,$$

δηλαδή,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n \leq \int f.$$

Έπεται ότι

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f.$$

Άρα,

$$\int f_n \rightarrow \int f.$$

31. Έστω $(f_n), f$ ολοκληρώσιμες και έστω ότι $f_n \rightarrow f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι $\int |f_n - f| \rightarrow 0$ αν και μόνο αν $\int |f_n| \rightarrow \int |f|$.

Υπόδειξη. (\implies) Έχουμε

$$\left| \int |f_n| - \int |f| \right| \leq \int ||f_n| - |f|| \leq \int |f_n - f| \rightarrow 0.$$

Άρα,

$$\int |f_n| \rightarrow \int |f|.$$

(\impliedby) Έχουμε $||f_n - f| - |f_n|| \leq |f|$. Η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και $|f_n - f| - |f_n| \rightarrow -|f|$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int (|f_n - f| - |f_n|) \rightarrow \int (-|f|).$$

Έχουμε υποθέσει ότι

$$\int |f_n| \rightarrow \int |f|.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$\int |f_n - f| \rightarrow 0.$$

32. Έστω (f_n) ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση g ώστε $|f_n| \leq g$ σχεδόν παντού για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι

$$\int \left(\liminf_n f_n \right) \leq \liminf_n \int f_n \leq \limsup_n \int f_n \leq \int \left(\limsup_n f_n \right).$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $h_n = g - f_n$, η οποία είναι ακολουθία ολοκληρωσίμων συναρτήσεων με $h_n \geq 0$. Από το λήμμα του Fatou παίρνουμε:

$$\int [g + \liminf(-f_n)] d\lambda = \int \liminf h_n d\lambda \leq \liminf \int h_n d\lambda = \liminf \left(\int g d\lambda - \int f_n d\lambda \right).$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\liminf(-f_n) - \limsup f_n$ και ότι $\int g d\lambda < +\infty$ προκύπτει ότι

$$- \int \limsup f_n d\lambda \leq - \limsup \int f_n d\lambda,$$

το οποίο αποδεικνύει το δεξιό ζευγάρι ανισοτήτων. Για την άλλη μη τετριμμένη ανισότητα εργαζόμαστε ανάλογα θεωρώντας την ακολουθία συναρτήσεων $u_n = g + f_n$.

33. Έστω f μετρήσιμη και σχεδόν παντού πεπερασμένη στο $[0, 1]$.

(α) Αν $\int_E f = 0$ για κάθε μετρήσιμο $E \subset [0, 1]$ με $\lambda(E) = 1/2$, δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού στο $[0, 1]$.

(β) Αν $f > 0$ σχεδόν παντού, δείξτε ότι

$$\inf \left\{ \int_E f : \lambda(E) \geq \frac{1}{2} \right\} > 0.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_{[0,1]} f = 0$ (διότι το $[0, 1]$ είναι η ένωση δύο συνόλων μέτρου $1/2$). Έστω $A, B \subset [0, 1]$ με $\lambda(A) = \lambda(B) = \frac{1}{4}$. Τότε, $\lambda([0, 1] \setminus (A \cup B)) \geq 1/2$. Συνεπώς, υπάρχει $C \subseteq [0, 1]$ με $\lambda(C) = 1/4$ και $C \cap A = C \cap B = \emptyset$ (εξηγήστε γιατί). Γράφουμε

$$\int_A f = \int_{A \cup C} f - \int_C f = - \int_C f = \int_{B \cup C} f - \int_C f = \int_B f,$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\int_{A \cup C} f = 0 = \int_{B \cup C} f$ το οποίο ισχύει από την υπόθεση αφού $\lambda(A \cup C) = \lambda(B \cup C) = 1/2$. Τώρα, μπορούμε να δείξουμε ότι αν $\lambda(A) = 1/4$ τότε $\int_A f = 0$. Πράγματι, υπάρχει $B \subset [0, 1]$ με $\lambda(B) = 1/4$ και $A \cap B = \emptyset$, συνεπώς,

$$0 = \int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f = 2 \int_A f.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι: για κάθε $k \geq 1$, αν $A \subset [0, 1]$ και $\lambda(A) = \frac{1}{2^k}$ τότε

$$\int_A f = 0.$$

Έπεται τώρα ότι, για κάθε «δυναμικό ρητό» $x = \frac{m}{2^k}$, όπου $k \in \mathbb{N}$ και $0 \leq m \leq 2^k$, ισχύει

$$\int_{[0, m/2^k]} f = 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f$. Όπως στην Άσκηση 12, μπορούμε να δείξουμε ότι η F είναι συνεχής. Αφού $F(x) = 0$ για κάθε δυναμικό ρητό $x \in [0, 1]$, συμπεραίνουμε ότι $F(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Ειδικότερα, $\int_I f = 0$ για κάθε διάστημα $I \subseteq [0, 1]$. Έπεται τώρα ότι $\int_E f = 0$ για κάθε ανοικτό $E \subseteq [0, 1]$ (εξηγήστε γιατί). Αφού $\int_{[0,1]} f = 0$, έπεται ότι $\int_F f = 0$ για κάθε κλειστό $F \subseteq [0, 1]$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\lambda(\{f \neq 0\}) > 0$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε τότε να υποθέσουμε ότι $\lambda(\{f > 0\}) > 0$. Έπεται ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\lambda(D) > 0$, όπου $D = \{f \geq 1/k\}$ (εξηγήστε γιατί). Μπορούμε να βρούμε κλειστό $F \subseteq D$ με $\lambda(F) > 0$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, καταλήγουμε σε άτοπο, διότι

$$\int_F f \geq \frac{1}{k} \lambda(F) > 0.$$

(β) Αφού $f > 0$ σχεδόν παντού υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\lambda(\{x : f(x) > \varepsilon\}) > 2/3$. (Πράγματι: αν θεωρήσουμε την ακολουθία συνόλων $E_k = \{x : f(x) > 1/k\}$ τότε $E_k \nearrow [0, 1]$, άρα $\lambda(E_k) \rightarrow 1$.) Αν θέσουμε λοιπόν $F = \{x : |f(x)| > \varepsilon\} > 2/3$ τότε μπορούμε να γράψουμε: αν E μετρήσιμο με $\lambda(E) \geq 1/2$ τότε

$$\int_E f \, d\lambda \geq \int_{E \cap F} f \, d\lambda \geq \varepsilon \lambda(E \cap F),$$

διότι η f είναι θετική σχεδόν παντού. Επιπλέον, είναι $\lambda(E \cap F) \geq \lambda(E) + \lambda(F) - 1 > 1/6$. Επομένως, $\int_E f \, d\lambda \geq \varepsilon/6$ για κάθε τέτοιο σύνολο E , που αποδεικνύει το ζητούμενο.

34. Έστω $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| < +\infty$. Δείξτε ότι:

(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in E$.

(β) Η συνάρτηση $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n.$$

Υπόδειξη. (α) Από το θεώρημα Βερρο–Levi έχουμε ότι $\int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| < +\infty$, δηλαδή η συνάρτηση

$F = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ είναι ολοκληρώσιμη, άρα πεπερασμένη σχεδόν παντού. Μ' άλλα λόγια η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει (απόλυτα) σχεδόν για κάθε $x \in E$.

(β) Έστω $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, η οποία ορίζεται σχεδόν για κάθε $x \in E$. Τότε, σχεδόν για κάθε $x \in E$ ισχύει

$$|f(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = F(x).$$

Η F είναι ολοκληρώσιμη, από υπόθεση, άρα η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε την ακολουθία ολοκληρωσίμων συναρτήσεων $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ και παρατηρούμε ότι σχεδόν για κάθε $x \in E$ ισχύει

$$|s_n(x)| \leq \sum_{k=1}^n |f_k(x)| \leq F(x).$$

Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε:

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \int_E \lim_n s_n = \lim_n \int_E s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n.$$

35. (α) Αν $f \geq 0$ σχεδόν παντού στο E και αν $f_n = \min\{f, n\}$, δείξτε ότι $\int_E f_n \rightarrow \int_E f$.

(β) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο E και $f_n = \max\{\min\{n, f\}, -n\}$, δείξτε ότι $\int_E f_n \rightarrow \int_E f$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ και $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο, σχεδόν παντού στο E . Το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης.

(β) Παρατηρούμε ότι $|f_n| \leq |f|$ και ότι $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο, σχεδόν παντού στο E . Το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

36. Έστω $k, n \in \mathbb{N}$ με $k \leq n$ και E_1, \dots, E_n μετρήσιμα υποσύνολα του $[0, 1]$ με την εξής ιδιότητα: κάθε $x \in [0, 1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα E_1, E_2, \dots, E_n . Δείξτε ότι υπάρχει $i \leq n$ ώστε $\lambda(E_i) \geq k/n$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $f = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}$. Αφού κάθε $x \in [0, 1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα E_1, \dots, E_n , έχουμε

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}(x) \geq k$$

για κάθε $x \in [0, 1]$. Συνεπώς,

$$\sum_{i=1}^n \lambda(E_i) = \sum_{i=1}^n \int_{[0,1]} \chi_{E_i}(x) d\lambda(x) = \int_{[0,1]} f d\lambda \geq k.$$

Έπεται ότι

$$\max_{1 \leq i \leq n} \lambda(E_i) \geq \frac{k}{n}.$$

Δηλαδή, υπάρχει $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ με την ιδιότητα $\lambda(E_{i_0}) \geq \frac{k}{n}$.

1.2 Ομάδα Β'

37. (α) Δείξτε ότι αν $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη, τότε η $h \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

(β) Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Cantor–Lebesgue βρείτε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε η $h \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.

Υπόδειξη. (α) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε, $(h \circ g)^{-1}((a, +\infty)) = g^{-1}(h^{-1}(a, +\infty))$. Όμως, η h είναι μετρήσιμη, άρα το $B = h^{-1}(a, +\infty)$ είναι Borel. Έπεται, ότι το $g^{-1}(B)$ είναι επίσης Borel αφού g συνεχής.

(β) Έστω $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ η συνάρτηση Cantor–Lebesgue και ξαναλέμε ϕ την επέκτασή της σε ολόκληρο το \mathbb{R} με $\phi(x) = 1$ αν $x > 1$ ενώ $\phi(x) = 0$ αν $x < 0$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x + \phi(x)$. Έχουμε δει ότι $\lambda(f(C)) = 1$, άρα υπάρχει $V \subseteq f(C)$ μη μετρήσιμο. Επίσης, το $A = f^{-1}(V)$ είναι μετρήσιμο. Παρατηρήστε ότι ορίζεται η $g = f^{-1}$, η οποία είναι συνεχής και $h = \chi_A$ η οποία είναι μετρήσιμη. Τότε, η $h \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι μετρήσιμη αφού $\{x \mid (h \circ g)(x) > 0\} = V$.

38. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι η f απεικονίζει F_σ -σύνολα σε F_σ -σύνολα.

(β) Δείξτε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα αν και μόνο αν για κάθε $A \subset [a, b]$ με $\lambda(A) = 0$ ισχύει $\lambda(f(A)) = 0$.

Υπόδειξη. (α) Πρώτα δείχνουμε ότι η f απεικονίζει κλειστά υποσύνολα του $[a, b]$ σε κλειστά. Πράγματι αν F κλειστό στο $[a, b]$, επειδή το $[a, b]$ είναι συμπαγές έπεται ότι το F είναι συμπαγές. Αφού η f είναι συνεχής παίρνουμε ότι το $f(F)$ είναι συμπαγές, άρα κλειστό. Αν τώρα $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ είναι F_σ σύνολο, τότε

κάθε E_n είναι κλειστό, οπότε το $f(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(E_n)$ είναι F_σ .

(β) Υποθέτουμε ότι αν $\lambda(A) = 0$ τότε $\lambda(f(A)) = 0$. Θα δείξουμε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σε μετρήσιμα. Πράγματι αν A μετρήσιμο, τότε γνωρίζουμε ότι υπάρχουν N και E μηδενικό σύνολο και F_σ -σύνολο αντίστοιχα, ώστε $A = E \cup N$. Τότε, $f(A) = f(E) \cup f(N)$. Αλλά, από το (α) το $f(E)$ είναι F_σ , ενώ από την υπόθεση το $f(N)$ είναι μηδενικό. Συνεπώς, το $f(A)$ είναι μετρήσιμο.

Αντίστροφα: έστω ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σε μετρήσιμα. Θα δείξουμε ότι απεικονίζει μηδενικά σύνολα σε μηδενικά. Έστω $A \subset [a, b]$ με $\lambda(A) = 0$. Τότε, το $f(A)$ είναι μετρήσιμο. Αν είναι $\lambda(f(A)) > 0$ τότε υπάρχει $V \subset f(A)$ μη μετρήσιμο. Έστω $E = f^{-1}(V) \cap A$, το οποίο είναι προφανώς μετρήσιμο. Τότε, το $f(E) = V$ δεν είναι μετρήσιμο κι έχουμε αντίφαση.

39. (α) Έστω $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x : f_n(x) > \alpha\}) < \infty$, τότε υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \leq \alpha$ για κάθε $x \notin Z$.

(β) Έστω $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x : f_n(x) > \varepsilon_n\}) < \infty$, τότε υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $f_n(x) \rightarrow 0$ για κάθε $x \notin Z$.

Υπόδειξη. (α) Θέτουμε $A_n = \{x : f_n(x) > \alpha\}$. Τότε, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < \infty$, άρα από το πρώτο λήμμα Borel–Cantelli έπεται ότι $\lambda(\limsup A_n) = 0$. Θέτουμε $Z = \limsup A_n$ επομένως, αν $x \notin Z$ τότε υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq N_x$ τότε $x \notin A_n$ δηλαδή $f_n(x) \leq \alpha$, άρα $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \leq \alpha$.

(β) Όπως προηγουμένως, υπάρχει Z με $\lambda(Z) = 0$ ώστε αν $x \notin Z$, τότε υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq N_x$ τότε $f_n(x) \leq \varepsilon_n$. Καθώς, $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ το ζητούμενο έπεται.

40. Έστω $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (α_n) θετικών πραγματικών αριθμών και υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x)}{\alpha_n} = 0$ για κάθε $x \notin Z$.

Υπόδειξη. Για κάθε n υπάρχει $\beta_n > 0$ ώστε $\lambda(\{x : |f_n(x)| > \beta_n\}) < 1/2^n$. Προς τούτο αρκεί να αποδείξουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός. Αν $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\beta > 0$ ώστε $\lambda(\{x : |g(x)| > \beta\}) < \varepsilon$.

Έστω $E_n = \{x : |g(x)| \leq n\}$. Τότε, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = [0, 1]$ και η $\{E_n\}$ είναι αύξουσα. Άρα, είναι $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(E_n) = \lambda([0, 1]) = 1$. Επομένως, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\lambda(E_k) > 1 - \varepsilon$. Τότε, $\lambda(\{x : |g(x)| > k\}) < \varepsilon$. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Εφαρμόζοντας αυτό για $g = f_n$ και $\varepsilon = 2^{-n}$ βρίσκουμε $\beta_n > 0$ ώστε $\lambda(\{x : |f_n(x)| > \beta_n\}) < 1/2^n$. Θέτουμε $E_n = \{x : |f_n(x)| > \beta_n\}$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) < +\infty$. Αν θέσουμε $Z = \limsup E_n$, τότε από το πρώτο λήμμα Borel–Cantelli παίρνουμε $\lambda(Z) = 0$. Αν $x \notin Z$ τότε υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq N_x$ ισχύει $|f_n(x)| \leq \beta_n$. Αν θεωρήσουμε την $\alpha_n = \frac{1}{n\beta_n}$ τότε έχουμε ότι για κάθε $x \notin Z$ ισχύει $\frac{f_n(x)}{\alpha_n} \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

41. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι t -περιοδική και s -περιοδική για κάποιους $t, s > 0$ με $t/s \notin \mathbb{Q}$, δείξτε ότι η f είναι σχεδόν παντού σταθερή.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι μη αρνητική και φραγμένη. Ορίζουμε $F(x) = \int_0^x f(t) d\lambda(t)$. Για κάθε y της μορφής $y = kt + ms$, $k, m \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$F(x) = \int_0^x f(t) d\lambda(t) = \int_0^x f(t+y) d\lambda(t) = \int_y^{x+y} f(t) d\lambda(t) = F(x+y) - F(y),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από το θεώρημα του Kronecker γνωρίζουμε ότι το σύνολο $D = \{kt + ms : k, m \in \mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό στο \mathbb{R} . Εφόσον, η F είναι συνεχής (εξηγήστε γιατί) και ικανοποιεί τη συναρτησιακή εξίσωση $F(x+y) = F(x) + F(y)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε y σε ένα πυκνό υποσύνολο του \mathbb{R} , έπεται ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $F(x) = \alpha x$. Έτσι,

$$F(x) - \alpha x = \int_0^x f(t) d\lambda(t) - \alpha x = \int_0^x (f(t) - \alpha) d\lambda(t) = 0,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από εδώ έπεται εύκολα ότι η $h(t) = f(t) - \alpha$ έχει ολοκλήρωμα μηδέν σε κάθε διάστημα κι άρα είναι μηδέν σχεδόν παντού.

Για τη γενική περίπτωση θεωρούμε τη συνάρτηση $f_1(t) = 1 + \frac{2}{\pi} \text{τοξεφ } f(t)$ για την οποία πρέπει πρώτα να παρατηρήσουμε ότι είναι μετρήσιμη και ότι $0 < f_1 < 2$.

42. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο. Δείξτε ότι κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$g_n(x) = f(x) \chi_{E \cap [-n, n]}(x).$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Lusin, για κάθε n βρίσκουμε ένα κλειστό σύνολο $F_n \subseteq E \cap [-n, n]$ ώστε η $g_n|_{F_n}$ να είναι συνεχής και $\lambda(E \cap [-n, n] \setminus F_n) \leq \frac{1}{n^2}$. Κατόπιν, επεκτείνουμε την g_n σε μια συνεχής συνάρτηση $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (θεώρημα Pietze, στην περίπτωσή μας είναι πιο απλό, αφού το $\mathbb{R} \setminus F_n$ είναι μια ξένη ένωση ανοικτών διαστημάτων). Τότε, οι $f_n := h_n|_E : E \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Θέτουμε

$$D = \{x \in E : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}$$

και θα δείξουμε ότι $\lambda(D) = 0$. Έστω $x \in D$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|x| \leq n_0$ και, άρα $x \in E \cap [-n, n]$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $g_n(x) = f(x)$. Αφού $f_n(x) \not\rightarrow f(x)$, θα πρέπει να υπάρχουν άπειροι φυσικοί n για τους οποίους $f_n(x) \neq g_n(x)$, δηλαδή άπειροι φυσικοί n για τους οποίους $x \in E_n := E \cap [-n, n] \setminus F_n$. Δηλαδή,

$$D \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} (E_n).$$

Όμως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Από το λήμμα Borel-Cantelli έχουμε $\lambda(\limsup_n (E_n)) = 0$, άρα $\lambda(D) = 0$.

43. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ χωριστά συνεχής συνάρτηση: για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η $f_x(y) := f(x, y)$ είναι συνεχής και για κάθε $y \in \mathbb{R}$ η $f^y(x) := f(x, y)$ είναι συνεχής. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Ορίζουμε $f_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ως εξής. Αν $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ τότε υπάρχει μοναδικός $m = m_x \in \mathbb{Z}$ ώστε $x \in \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right)$. Θέτουμε

$$f_n(x, y) = f\left(\frac{m_x}{n}, y\right).$$

Δείχνουμε ότι η f_n είναι μετρήσιμη: παρατηρήστε ότι, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$E_n(\alpha) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_n(x, y) > \alpha\} = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right) \times \{y \in \mathbb{R} : f(m/n, y) > \alpha\}.$$

Για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, αφού η $f_{m/n}$ είναι συνεχής συνάρτηση, το σύνολο $\{y \in \mathbb{R} : f(m/n, y) > \alpha\}$ είναι ανοικτό, άρα το σύνολο

$$\left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right) \times \{y \in \mathbb{R} : f(m/n, y) > \alpha\}$$

είναι μετρήσιμο. Έπεται ότι το $E_n(\alpha)$ είναι μετρήσιμο για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, και αυτό δείχνει ότι η f_n είναι μετρήσιμη.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι $f_n(x, y) \rightarrow f(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Πράγματι, αφού $\frac{m_x}{n} \rightarrow x$ καθώς το $n \rightarrow \infty$ (εξηγήστε γιατί) και αφού η f^y είναι συνεχής, έχουμε

$$f_n(x, y) = f(m_x/n, y) = f^y(m_x/n) \rightarrow f^y(x) = f(x, y).$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση ως κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων.

44. Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: αν η $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι σχεδόν παντού ίση με την f τότε η g είναι ασυνεχής σε κάθε $x \in [0, 1]$.

Υπόδειξη. Από την Άσκηση 22 του Κεφαλαίου 1 γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq [0, 1]$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε διάστημα $J \subseteq [0, 1]$,

$$\lambda(J \cap E) > 0 \quad \text{και} \quad \lambda(J \setminus E) > 0.$$

Θεωρούμε την $f = \chi_E : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι αν $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση σχεδόν παντού ίση με την f τότε η g είναι ασυνεχής σε κάθε $x \in [0, 1]$.

Έστω $x_0 \in (0, 1)$ και $\delta > 0$ ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (0, 1)$. Τα σύνολα $A_\delta = E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και $B_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus E$ έχουν θετικό μέτρο. Αφού $f(x) = g(x)$ σχεδόν παντού, μπορούμε να βρούμε $x_\delta \in A_\delta$ και $y_\delta \in B_\delta$ για τα οποία επιπλέον έχουμε

$$g(x_\delta) = f(x_\delta) = 1 \quad \text{και} \quad g(y_\delta) = f(y_\delta) = 0.$$

Βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}) \subset (0, 1)$ για κάθε $n \geq n_0$, και χρησιμοποιώντας την προηγούμενη παρατήρηση βρίσκουμε x_n, y_n με $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, $|y_n - x_0| < \frac{1}{n}$, $g(x_n) = 1$ και $g(y_n) = 0$. Αφού $x_n \rightarrow x_0$, $y_n \rightarrow x_0$ και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = 1 \neq 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n),$$

η g είναι ασυνεχής στο x_0 .

Παρόμοιο επιχείρημα εφαρμόζεται για τα $x_0 = 0$ και $x_0 = 1$ (θεωρήστε διαστήματα της μορφής $[0, \delta)$ ή $(1 - \delta, 1]$ αντίστοιχα).

45. Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $\sup_n |f_n(x)| < \infty$. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $A \subseteq [0, 1]$ μετρήσιμο και $M > 0$ ώστε $\lambda([0, 1] \setminus A) < \varepsilon$ και, για κάθε $x \in A$, $\sup_n |f_n(x)| \leq M$.

Υπόδειξη. Η συνάρτηση $f(x) = \sup_n |f_n(x)|$ είναι μετρήσιμη, διότι οι f_n είναι μετρήσιμες. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$E_n = \{x \in [0, 1] : f(x) > n\}.$$

Αφού $\sup_n |f_n(x)| < \infty$ για κάθε $x \in [0, 1]$, βλέπουμε ότι η (E_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0, 1]$ με $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$. Από τη συνέχεια του μέτρου Lebesgue έχουμε $\lambda(E_n) \rightarrow 0$. Άρα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\lambda(E_{n_0}) < \varepsilon$. Θέτοντας $A = [0, 1] \setminus E_{n_0}$ και $M = n_0$, έχουμε

$$\lambda([0, 1] \setminus A) = \lambda(E_{n_0}) < \varepsilon$$

και, για κάθε $x \in A$,

$$\sup_n |f_n(x)| = f(x) \leq n_0 = M.$$

46. Έστω $\{I_n\}$ ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n \subseteq [0, 1]$. Συμβολίζουμε με f_n την χαρακτηριστική συνάρτηση του I_n .

(α) Αν $\lambda(I_n) \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι $f_n(x) \rightarrow 0$ σχεδόν παντού.

(β) Εξετάστε αν ισχύει το ίδιο με την υπόθεση ότι $\lambda(I_n) \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. (α) Αν για κάποιο $x \in [0, 1]$ η ακολουθία $(f_n(x))$ δεν συγκλίνει στο 0, τότε το x ανήκει σε άπειρα από τα I_n . Δηλαδή,

$$\{x \in [0, 1] : f_n(x) \not\rightarrow 0\} \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} I_n.$$

Αφού

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

από το λήμμα Borel-Cantelli συμπεραίνουμε ότι $\lambda\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} I_n\right) = 0$, άρα $\lambda(\{x \in [0, 1] : f_n(x) \not\rightarrow 0\}) = 0$. Έπεται ότι $f_n(x) \rightarrow 0$ σχεδόν παντού στο $[0, 1]$.

(β) Όχι. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει, μπορούμε να κατασκευάσουμε ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n \subseteq [0, 1]$ με $\lambda(I_n) \leq \frac{1}{n}$, τέτοια η $f_n(x)$ να αποκλίνει παντού. Αρχικά, θέτουμε $I_1 = [0, \frac{1}{2}]$, $I_2 = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}]$, $I_3 = [\frac{1}{2} + \frac{1}{3}, 1]$, και θέτουμε $n_1 = 3$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά: η σειρά $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, και $\frac{1}{4} < 1$, άρα υπάρχει ο ελάχιστος $n_2 > 4$ τέτοιος ώστε $\sum_{n=4}^{n_2} \frac{1}{n} > 1$. Καλύπτουμε τότε το $[0, 1]$ με διαδοχικά κλειστά διαστήματα I_4, I_5, \dots, I_{n_2} για τα οποία έχουμε ότι $\lambda(I_k) \leq \frac{1}{k}$.

Με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε ακολουθία κλειστών διαστημάτων I_n και γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών n_k τέτοια ώστε $\lambda(I_n) \leq \frac{1}{n}$, οποιαδήποτε δύο διαδοχικά από τα I_n έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο, και $\bigcup_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} I_i = [0, 1]$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αυτό δείχνει ότι κάθε σημείο $x \in [0, 1]$ ανήκει σε άπειρα από τα I_n , αλλά όχι σε όλα τελικά τα I_n , επομένως η $f_n(x)$ δεν συγκλίνει.

47. Σταθεροποιούμε $0 < a < b$ και ορίζουμε $f_n(x) = ae^{-nax} - ne^{-nbx}$. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n| d\lambda = \infty$$

και

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\lambda \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n d\lambda.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $\delta_n := \frac{\log(n/a)}{n(b-a)}$. Τότε, για κάθε $n > a$ ισχύει $\delta_n > 0$ και $f_n(x) < 0$ για $0 < x < \delta_n$.

Επομένως,

$$\int_0^{\infty} |f_n| d\lambda \geq \int_0^{\delta_n} [ne^{-nbx} - ae^{-nax}] d\lambda = \frac{1}{b} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{\frac{b}{b-a}}} \left(1 - \frac{a}{b}\right) a^{\frac{a}{b-a}},$$

απ' όπου έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n| d\lambda = +\infty$.

Για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = a \frac{e^{-ax}}{1 - e^{-ax}} - \frac{e^{-bx}}{(1 - e^{-bx})^2}.$$

Έπεται ότι $\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\lambda = +\infty$. Τέλος, είναι

$$\int_0^{\infty} f_n d\lambda = \frac{1}{n} - \frac{1}{b},$$

συνεπώς έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n d\lambda = -\infty$.

48. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^{-1/2}$ αν $0 < x < 1$ και $f(x) = 0$ αλλιώς. Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ των ρητών, και θέτουμε $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x-q_n)}{2^n}$.

(α) Δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη. Ειδικότερα, $|g| < \infty$ σχεδόν παντού.

(β) Δείξτε ότι η g είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο και δεν είναι φραγμένη σε κανένα διάστημα. Τα παραπάνω ισχύουν ακόμα κι αν μεταβάλλουμε τις τιμές της g σε οποιοδήποτε σύνολο μηδενικού μέτρου Lebesgue.

(γ) Δείξτε ότι $g^2 < \infty$ σχεδόν παντού, αλλά η g^2 δεν είναι ολοκληρώσιμη σε κανένα διάστημα.

Υπόδειξη. (α) Από το θεώρημα Βερρο Levi έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(x-q_n)|}{2^n} d\lambda(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_{\mathbb{R}} |f(x-q_n)| d\lambda(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_{q_n}^{q_n+1} \frac{1}{\sqrt{x-q_n}} d\lambda(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} d\lambda(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2\sqrt{t} \Big|_0^1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n} = 2 < \infty. \end{aligned}$$

Αφού $f \geq 0$ έχουμε

$$|g(x)| = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(x - q_n)|}{2^n},$$

άρα

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)| d\lambda(x) < \infty,$$

δηλαδή η g είναι ολοκληρώσιμη. Ειδικότερα, $|g(x)| < \infty$ σχεδόν παντού.

(β) Έστω (a, b) ένα διάστημα και έστω $M > 0$. Θεωρούμε ένα ρητό $q_m \in (a, b)$ και βρίσκουμε $\epsilon > 0$ ώστε $(q_m, q_m + \epsilon) \subset (a, b)$. Παρατηρήστε ότι

$$g(x) \geq \frac{f(x - q_m)}{2^m} = \frac{1}{2^m \sqrt{x - q_m}} > M$$

για κάθε $x \in (q_m, q_m + \delta)$, όπου $\delta = \min \left\{ \frac{1}{2^m M}, \epsilon \right\}$. Αφού το $(q_m, q_m + \delta)$ είναι υποδιάστημα του (a, b) , έπεται ότι

$$\lambda(\{x \in (a, b) : g(x) > M\}) > 0$$

και το ίδιο θα ισχύει για κάθε συνάρτηση h που είναι ίση με την g σχεδόν παντού. Αυτό αποδεικνύει ότι κάθε τέτοια h δεν είναι φραγμένη στο (a, b) .

Έπεται επίσης ότι η g δεν είναι συνεχής σε κανένα $x \in \mathbb{R}$. Αν $g(x) = +\infty$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, ενώ αν $g(x) < \infty$ παρατηρούμε ότι αν η g ήταν συνεχής στο x τότε θα υπήρχε κάποιο διάστημα $(x - \eta, x + \eta)$ στο οποίο η g θα ήταν φραγμένη, κάτι που είδαμε ότι δεν μπορεί να συμβεί.

(γ) Θεωρούμε τυχόν διάστημα $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Υπάρχει ρητός q_m τέτοιος ώστε $q_m < b < q_m + 1$. Αφού

$$g(x) \geq \frac{f(x - q_m)}{2^m} \geq 0,$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{(a,b)} g^2(x) d\lambda(x) &\geq \int_{(a,b)} \frac{f^2(x - q_m)}{2^{2m}} d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{2^{2m}} \int_{q_m}^b \frac{1}{x - q_m} d\lambda(x) \\ &= \int_0^{b-q_m} \frac{1}{t} d\lambda(t) = \infty. \end{aligned}$$

Άρα, η g^2 δεν είναι ολοκληρώσιμη στο (a, b) , παρόλο που, αφού $|g(x)| < \infty$ σχεδόν παντού, έχουμε $g^2(x) < \infty$ σχεδόν παντού.

49. Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του \mathbb{R} με $0 < \lambda(A) < \infty$. Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια γνησίως θετική μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι: για κάθε $t > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν E είναι Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του A με $\lambda(E) > t$ τότε $\int_E f d\lambda \geq \delta$.

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = \{x \in A : f(x) < \frac{1}{n}\}$. Η (A_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του A , και $\bigcap_n A_n = \emptyset$ διότι η f είναι γνησίως θετική. Αφού $\lambda(A) < \infty$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_n \lambda(A_n) = 0$.

Έστω $t > 0$. Επιλέγουμε $n(t)$ ώστε $\lambda(A_{n(t)}) < \frac{t}{2}$. Τότε, για κάθε μετρήσιμο $E \subseteq A$ με $\lambda(E) > t$, έχουμε

$$\lambda(E \setminus A_{n(t)}) \geq \lambda(E) - \lambda(A_{n(t)}) \geq \frac{t}{2}.$$

Συνεπώς,

$$\int_E f d\lambda \geq \int_{E \setminus A_{n(t)}} f d\lambda \geq \frac{1}{n(t)} \lambda(E \setminus A_{n(t)}) \geq \frac{t}{2n(t)}.$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο, με $\delta = \delta(t) = \frac{t}{2n(t)}$.

50. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο 0. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η συνάρτηση $f_n(x) = f(x^n)$ είναι ολοκληρώσιμη.

Υπόδειξη. Αφού η f είναι συνεχής στο 0, μπορούμε να βρούμε $\delta \in (0, 1)$ και $M > 0$ ώστε $|f(t)| \leq M$ για κάθε $t \in [0, \delta]$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_n(x)| d\lambda(x) &= \frac{1}{n} \int_0^1 |f(t)| t^{\frac{1}{n}-1} d\lambda(t) \\ &= \frac{1}{n} \int_0^\delta |f(t)| t^{\frac{1}{n}-1} d\lambda(t) + \frac{1}{n} \int_\delta^1 |f(t)| t^{\frac{1}{n}-1} d\lambda(t) \\ &\leq \frac{M}{n} \int_0^\delta t^{\frac{1}{n}-1} d\lambda(t) + \frac{1}{n\delta^{1-\frac{1}{n}}} \int_\delta^1 |f(t)| d\lambda(t) \\ &\leq M\delta^{\frac{1}{n}} + \frac{\delta^{\frac{1}{n}}}{\delta n} \int_0^1 |f(t)| d\lambda(t) < \infty. \end{aligned}$$

Άρα, $f_n \in L_1[0, 1]$.

51. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[0, 1]$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt[n]{f(x)} d\lambda(x) = \lambda(\{x : f(x) > 0\}).$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\sqrt[n]{f(x)} \leq f(x) + 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Πράγματι, αν $0 \leq f(x) \leq 1$ έχουμε $\sqrt[n]{f(x)} \leq 1 \leq f(x) + 1$, ενώ αν $f(x) \geq 1$ έχουμε $\sqrt[n]{f(x)} \leq f(x) \leq f(x) + 1$. Αν ορίσουμε

$$g_n(x) = \sqrt[n]{f(x)}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

έχουμε λοιπόν $0 \leq g_n \leq f + 1$, και η συνάρτηση $f + 1$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

Παρατηρούμε τώρα ότι: αν $f(x) = 0$ τότε $g_n(x) = \sqrt[n]{f(x)} = 0 \rightarrow 0$, ενώ αν $0 < f(x) < \infty$ τότε $g_n(x) = \sqrt[n]{f(x)} \rightarrow 1$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, έχουμε $0 \leq f(x) < \infty$ σχεδόν παντού. Άρα,

$$\sqrt[n]{f(x)} = g_n(x) \rightarrow \chi_{\{x:f(x)>0\}}$$

σχεδόν παντού. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int_0^1 \sqrt[n]{f(x)} d\lambda(x) = \int_0^1 g_n(x) d\lambda(x) \rightarrow \int_0^1 \chi_{\{x:f(x)>0\}}(x) d\lambda(x) = \lambda(\{x : f(x) > 0\}).$$

52. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση, η οποία είναι γνήσια θετική σχεδόν παντού. Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0, 1]$ με την ιδιότητα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f(x) d\lambda(x) = 0.$$

Δείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n) = 0$.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $B = \{f \leq 0\}$ και $B_k = \{f < \frac{1}{k}\}$, $k \in \mathbb{N}$. Τότε, η (B_k) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0, 1]$, και $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = B$, άρα

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(B_k) = \lambda(B) = 0.$$

Επομένως, υπάρχει k_0 τέτοιος ώστε $\lambda(B_{k_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Από την υπόθεση υπάρχει n_0 τέτοιος ώστε, για κάθε $n \geq n_0$,

$$\int_{A_n} f d\lambda \leq \frac{\varepsilon}{2k_0}.$$

Τότε, για κάθε $n \geq n_0$, αφού $f \geq \frac{1}{k_0}$ στο $[0, 1] \setminus B_{k_0}$, έχουμε

$$\begin{aligned} \lambda(A_n) &= \lambda(A_n \cap B_{k_0}) + \lambda(A_n \cap ([0, 1] \setminus B_{k_0})) \leq \lambda(B_{k_0}) + k_0 \int_{A_n \cap ([0, 1] \setminus B_{k_0})} \frac{1}{k_0} d\lambda \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + k_0 \int_{A_n} f d\lambda \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $\lambda(A_n) \rightarrow 0$.

Σημείωση. Το γεγονός ότι το $[0, 1]$ έχει πεπερασμένο μέτρο χρησιμοποιήθηκε ουσιαστικά. Αν θεωρήσουμε την $f(x) = \frac{1}{x^2}$ στο $[1, \infty)$, τότε η f είναι γνήσια θετική και αν θέσουμε $A_n = [n, n+1]$ έχουμε

$$\int_{A_n} f d\lambda \leq \frac{1}{n^2} \rightarrow 0,$$

όμως $\lambda(A_n) = 1 \not\rightarrow 0$.

53. Έστω $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για $x > 0$ ορίζουμε $g(x) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-xt} d\lambda(t)$. Δείξτε ότι η g είναι συνεχής και ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Υπόδειξη. Έστω $t > 0$. Θέτουμε $g_t(x) = e^{-xt}$. Η παράγωγος της g_t είναι ίση με $g_t'(x) = -te^{-xt}$. Σταθεροποιούμε $x_0 > 0$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \frac{x_0}{2}$, από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε

$$|e^{-tx} - e^{-tx_0}| = |g_t'(z)||x - x_0| = te^{-tz}|x - x_0|$$

για κάποιο z μεταξύ των x, x_0 . Αφού $z \geq x_0 - \frac{x_0}{2} = \frac{x_0}{2}$, έχουμε $e^{-tz} \leq e^{-tx_0/2}$. Άρα,

$$|e^{-tx} - e^{-tx_0}| \leq te^{-tx_0/2}|x - x_0|.$$

Θεωρούμε την $h_{x_0}(t) = te^{-tx_0/2}$. Αφού $\lim_{t \rightarrow 0^+} h_{x_0}(t) = 0$ και $\lim_{t \rightarrow +\infty} h_{x_0}(t) = 0$, υπάρχει $M_{x_0} > 0$ τέτοιος ώστε $|h_{x_0}(t)| \leq M_{x_0}$ για κάθε $t > 0$. Άρα, αν $|x - x_0| < \frac{x_0}{2}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &= \left| \int_0^{\infty} f(t)(e^{-xt} - e^{-x_0t}) d\lambda(t) \right| \leq \int_0^{\infty} |f(t)|te^{-tx_0/2}|x - x_0| d\lambda(t) \\ &\leq M_{x_0}|x - x_0| \int_0^{\infty} |f| d\lambda. \end{aligned}$$

Παίρνοντας το όριο καθώς το $x \rightarrow x_0$ βλέπουμε ότι $g(x) \rightarrow g(x_0)$, άρα η g είναι συνεχής.

Για να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, θεωρούμε τυχόν $0 < \varepsilon < 1$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^{\delta} |f| d\lambda < \varepsilon.$$

Επομένως, αν $x > \frac{-\log \varepsilon}{\delta}$ και $t > \delta$, τότε $-xt < \log \varepsilon$. Άρα, αν $x > \frac{-\log \varepsilon}{\delta}$,

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq \int_0^{\infty} |f(t)|e^{-xt} d\lambda(t) = \int_0^{\delta} |f(t)|e^{-xt} d\lambda(t) + \int_{\delta}^{\infty} |f(t)|e^{-xt} d\lambda(t) \\ &\leq \int_0^{\delta} |f(t)| d\lambda(t) + \int_{\delta}^{\infty} |f(t)|e^{\log \varepsilon} d\lambda(t) < \varepsilon + \varepsilon \int_0^{\infty} |f| d\lambda. \end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon \in (0, 1)$ ήταν τυχόν και $\int_0^{\infty} |f| d\lambda < \infty$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

54. Έστω $E \subset \mathbb{R}^d$ με $\lambda(E) < \infty$ και έστω $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με

$$\int_E f d\lambda = \int_E g d\lambda.$$

Δείξτε ότι είτε

(α) $f = g$ σχεδόν παντού στο E είτε

(β) υπάρχει μετρήσιμο $A \subset E$ τέτοιο ώστε

$$\int_A f \, d\lambda < \int_A g \, d\lambda.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι

$$\int_A g \, d\lambda \leq \int_A f \, d\lambda$$

για κάθε μετρήσιμο $A \subset E$. Τότε, για κάθε μετρήσιμο $F \subset E$, θέτοντας $A = E \setminus F$ στην προηγούμενη ανισότητα παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_F g \, d\lambda &= \int_E g \, d\lambda - \int_{E \setminus F} g \, d\lambda \\ &= \int_E f \, d\lambda - \int_{E \setminus F} g \, d\lambda \\ &\geq \int_E f \, d\lambda - \int_{E \setminus F} f \, d\lambda \\ &= \int_F f \, d\lambda, \end{aligned}$$

άρα τελικά έχουμε

$$\int_F g \, d\lambda \leq \int_F f \, d\lambda$$

για κάθε μετρήσιμο $F \subset E$. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και ορίζουμε $B_\varepsilon = \{f - g \geq \varepsilon\}$ και $C_\varepsilon = \{g - f \geq \varepsilon\}$. Τότε, τα B_ε και C_ε είναι μετρήσιμα, και

$$0 = \int_{B_\varepsilon} f \, d\lambda - \int_{B_\varepsilon} g \, d\lambda = \int_{B_\varepsilon} (f - g) \, d\lambda \geq \varepsilon \lambda(B_\varepsilon),$$

άρα $\lambda(B_\varepsilon) = 0$. Όμοια δείχνουμε ότι $\lambda(C_\varepsilon) = 0$. Έπεται ότι

$$\lambda(\{|f - g| \geq 1/n\}) = \lambda(B_{1/n} \cup C_{1/n}) = 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\lambda(\{f \neq g\}) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{|f - g| \geq 1/n\}\right) = 0.$$

Δηλαδή, $f = g$ σχεδόν παντού στο E .

55. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάποιο κλειστό σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ ισχύει το εξής: για κάθε $E \subset [0, 1]$ με $\lambda(E) > 0$ ισχύει

$$t_E := \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f d\lambda \in A.$$

Δείξτε ότι το σύνολο $Z = \{x \in [0, 1] : f(x) \notin A\}$ έχει μέτρο μηδέν.

Υπόδειξη. Αφού το A είναι κλειστό, μπορούμε να γράψουμε το συμπλήρωμά του σαν αριθμήσιμη ένωση ξένων ανοικτών διαστημάτων:

$$\mathbb{R} \setminus A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k).$$

Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} Z &= \{x \in [0, 1] : f(x) \notin A\} = \left\{x \in [0, 1] : f(x) \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)\right\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in [0, 1] : f(x) \in (a_k, b_k)\}. \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι $\lambda(Z) > 0$. Τότε, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε το σύνολο

$$Z_k := \{x \in [0, 1] : f(x) \in (a_k, b_k)\}$$

να έχει θετικό μέτρο. Εφαρμόζοντας την υπόθεση με $E = Z_k$ βλέπουμε ότι

$$t_k := \frac{1}{\lambda(Z_k)} \int_{Z_k} f d\lambda \in A.$$

Όμως, $a_k < f(x) < b_k$ για κάθε $x \in Z_k$. Άρα,

$$a_k \lambda(Z_k) < \int_{Z_k} f d\lambda < b_k \lambda(Z_k),$$

από όπου έπεται ότι

$$a_k < t_k := \frac{1}{\lambda(Z_k)} \int_{Z_k} f d\lambda < b_k.$$

Δηλαδή, $t_k \in (a_k, b_k)$. Άρα, $t_k \notin A$, το οποίο είναι άτοπο.

56. Έστω $f, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t) - f_n(t)| d\lambda(t) \leq \frac{1}{n^2}.$$

Δείξτε ότι $f_n \rightarrow f$ σχεδόν παντού.

Υπόδειξη. Από το θεώρημα Βερρο Levi έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t) - f(t)| d\lambda(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| d\lambda(t) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Άρα, η συνάρτηση $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Έπεται ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t) - f(t)|$$

συγκλίνει σχεδόν παντού. Ειδικότερα, $f_n(t) - f(t) \rightarrow 0$ σχεδόν παντού.

57. Έστω $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που ικανοποιούν τα εξής:

(α) Υπάρχει μη αρνητική ολοκληρώσιμη $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε: για κάθε n ισχύει $|f_n| \leq h$ σχεδόν παντού.

(β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda \rightarrow 0.$$

Δείξτε ότι: για κάθε Borel σύνολο $A \subset [0, 1]$,

$$\int_A f_n \, d\lambda \rightarrow 0.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η h είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: αν E είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $[0, 1]$ και $\lambda(E) < \delta$, τότε $\int_E h \, d\lambda < \varepsilon$.

Έστω A Borel υποσύνολο του $[0, 1]$. Μπορούμε να βρούμε συμπαγές K και ανοικτό $U \subset [0, 1]$ ώστε $K \subseteq A \subseteq U$ και $\lambda(U \setminus K) < \delta$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Urysohn βρίσκουμε συνεχή συνάρτηση $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $0 \leq g \leq 1$, $g(x) = 1$ για κάθε $x \in K$ και $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1] \setminus U$. Τώρα γράφουμε

$$\int_A f_n \, d\lambda = \int_{[0,1]} f_n \chi_A \, d\lambda = \int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda + \int_{[0,1]} f_n (\chi_A - g) \, d\lambda,$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \left| \int_{[0,1]} f_n (\chi_A - g) \, d\lambda \right| &\leq \int_{[0,1]} |f_n| |\chi_A - g| \, d\lambda \leq \int_{[0,1]} h |\chi_A - g| \, d\lambda \\ &= \int_{U \setminus K} h |\chi_A - g| \, d\lambda \leq \int_{U \setminus K} h \, d\lambda < \varepsilon, \end{aligned}$$

διότι $\chi_A - g \equiv 0$ στο K και στο $[0, 1] \setminus U$, $|\chi_A - g| \leq 1$ στο $U \setminus K$, και $\lambda(U \setminus K) < \delta$. Έπεται ότι

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_A f_n \, d\lambda \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda \right| + \varepsilon = \varepsilon,$$

διότι $\int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda \rightarrow 0$ από την υπόθεση. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_A f_n \, d\lambda \right| = 0,$$

και έπεται το ζητούμενο.

58. Έστω $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \rightarrow 0$ σχεδόν παντού, και

$$\int_{[0,1]} |f_n(x)|^2 d\lambda(x) \leq 10$$

για κάθε n . Δείξτε ότι

$$\int_{[0,1]} |f(x)| d\lambda(x) \rightarrow 0.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $\alpha > 0$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} |f_n| d\lambda &= \int_{\{|f_n| \leq \alpha\}} |f_n| d\lambda + \int_{\{|f_n| > \alpha\}} |f_n| d\lambda \\ &\leq \int_{\{|f_n| \leq \alpha\}} |f_n| d\lambda + \int_{\{|f_n| > \alpha\}} \frac{|f_n|^2}{\alpha} d\lambda \\ &\leq \alpha \int_{\{|f_n| \leq \alpha\}} d\lambda + \frac{10}{\alpha} \\ &= \alpha \int_{[0,1]} \chi_{\{|f_n| \leq \alpha\}} d\lambda + \frac{10}{\alpha}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι $g_n := \chi_{\{|f_n| \leq \alpha\}}$ φράσσονται από την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g \equiv 1$ στο $[0, 1]$, και από την υπόθεση ότι $|f_n(x)| \rightarrow 0$ σχεδόν παντού έπεται ότι « $|f_n(x)| < \alpha$ τελικά» σχεδόν παντού, δηλαδή « $\chi_{\{|f_n| \leq \alpha\}}(x) = 1$ τελικά» σχεδόν παντού, δηλαδή $\chi_{\{|f_n| \leq \alpha\}}(x) \rightarrow 0$ σχεδόν παντού. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int_{[0,1]} \chi_{\{|f_n| \leq \alpha\}} d\lambda \rightarrow 0.$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} |f_n| d\lambda \leq \frac{10}{\alpha}.$$

Αφού το $\alpha > 0$ ήταν τυχόν, αφήνοντας το $\alpha \rightarrow \infty$ παίρνουμε

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} |f_n| d\lambda = 0 \quad \text{άρα} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} |f_n| d\lambda = 0.$$

59. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υπολογίστε το

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{\mathbb{R}} \ln \left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \right) d\lambda(x).$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \leq \left(1 + \frac{|f(x)|}{n}\right)^2$, άρα

$$n \ln \left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) \leq 2n \ln \left(1 + \frac{|f(x)|}{n}\right) \leq 2|f(x)|,$$

αν χρησιμοποιήσουμε και την $\ln \left(1 + \frac{|f(x)|}{n}\right) \leq \frac{|f(x)|}{n}$. Δηλαδή, αν θεωρήσουμε τις $g_n(x) = n \ln \left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)$, έχουμε $|g_n| \leq 2|f|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Η f είναι ολοκληρώσιμη, άρα $|f(x)| < \infty$ σχεδόν παντού. Συνεπώς,

$$|g_n(x)| = n \ln \left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) \leq n \frac{|f(x)|^2}{n^2} = \frac{|f(x)|^2}{n} \rightarrow 0$$

σχεδόν παντού. Δηλαδή, $g_n \rightarrow 0$ σχεδόν παντού. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}} n \ln \left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} g_n(x) d\lambda(x) \rightarrow 0.$$

60. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow [1, \infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{[0,1]} f \ln f d\lambda \geq \int_{[0,1]} f d\lambda \cdot \int_{[0,1]} \ln f d\lambda.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $\alpha = \int_{[0,1]} f d\lambda > 0$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $g = f/\alpha$. Παρατηρούμε ότι $(y-1)\ln y \geq 0$ για κάθε $y > 0$ (αν $y \leq 1$ τότε $y-1 \leq 0$ και $\ln y \leq 0$, ενώ αν $y > 1$ τότε $y-1 > 0$ και $\ln y > 0$). Συνεπώς, $y \ln y \geq \ln y$ για κάθε $y > 0$. Αφού η g παίρνει θετικές τιμές, έχουμε $g \ln g \geq \ln g$ στο $[0, 1]$, άρα

$$\int_{[0,1]} g \ln g d\lambda \geq \int_{[0,1]} \ln g d\lambda.$$

Αφού $g = f/\alpha$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} \frac{f}{\alpha} (\ln f - \ln \alpha) d\lambda &= \int_{[0,1]} \frac{f}{\alpha} \ln \frac{f}{\alpha} d\lambda \geq \int_{[0,1]} \ln \frac{f}{\alpha} d\lambda \\ &\geq \int_{[0,1]} \ln f d\lambda - \int_{[0,1]} \ln \alpha d\lambda = \int_{[0,1]} \ln f d\lambda - \ln \alpha, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\frac{1}{\alpha} \int_{[0,1]} f \ln f d\lambda - \frac{\int_{[0,1]} f d\lambda}{\alpha} \ln \alpha \geq \int_{[0,1]} \ln f d\lambda - \ln \alpha,$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\int_{[0,1]} f \ln f d\lambda \geq \alpha \int_{[0,1]} \ln f d\lambda = \int_{[0,1]} f d\lambda \cdot \int_{[0,1]} \ln f d\lambda.$$